El legado matemático de Juan Bautista Sancho Guimerá

SUPERVARIEDADES, FERMIONES Y ESTRUCTURAS GRADUADAS

DANIEL HERNÁNDEZ RUIPÉREZ

Resumen. En los años 80 se empezaron a estudiar modelos de la supersimetría que incorporaban variables de tipo "fermiónico". Eso supuso la búsqueda de un marco geométrico para esos modelos, lo que dio lugar a varios tipos de *supervariedades* o variedades que incorporan variables anti-conmutativas. Se revisan esos diversos tipos, que, incluso para supervariedades diferenciables, necesitan de métodos de geometría algebraica que no se habían empleado antes en geometría diferencial. Se describen algunas de sus aplicaciones, como el cálculo de variaciones graduado o la construcción intrínseca de la integral de Berezin. Se estudian también supervariedades de tipo algebraico, o superesquemas, con especial énfasis en las curvas supersimétricas, sus jacobianas y variedades de divisores positivos (o supervórtices) y los problemas de móduli asociados. Se discuten también resultados recientes sobre la estructura del supermóduli de curvas supersimétricas.

La exposición tiene la forma de un artículo de revisión y se centra fundamentalmente sobre las contribuciones de alumnos de Juan Sancho Guimerá y de colaboradores de ellos

Palabras clave: supervariedad, variedad graduada, integral de Berezin, superesquema, curva supersimétricas, curva SUSY, superdivisor, superjacobiana, supervórtice, supermóduli, N-punturas.

Abstract. The introduction of models of supersymmetry that incorporate variables of fermionic type dates back to the eighties. The search for a geometric framework for those models gave rise to various kinds of supervarieties. We revise them under the idea that, even for (differentiable) supermanifolds, one needs algebraic geometrical techniques never present before in differential geometry. We describe several applications, including graded variational calculus or an intrinsic construction of the Berezinian integral. Superschemes, or algebraic supervarieties, are studied as well, with special emphasis on supersymmetric curves, their Jacobians and varieties of positive divisors (supervortices) and the associated moduli problems. We also discuss recent results on the structure of the supermoduli of supersymmetric curves.

This is a survey paper focussed on the contributions of some of the Juan Sancho Guimerá's students and their collaborators.

Key words: supermanifold, supervariety, graded manifold, Berezin integral, superschema, supersymmetric curve, SUSY curve, superdivisor, superjacobian, supervortice, supermoduli, N-punctures.

Conferencia pronunciada en el Simposio de homenaje al Profesor Sancho Guimerá. Salamanca, Abril de 2014. Trabajo financiado con el proyecto MTM2013-45935-P (MINECO).

Introducción

Dentro de las variadas posibilidades que se ofrecían para abordar una conferencia en homenaje a Juan Bautista Sancho Guimerá, he preferido centrarme en algo en lo que él no trabajó directamente, pero que ha sido tratado por varios de sus alumnos siguiendo el espíritu de acercamiento a la geometría que siempre estuvo presente en sus lecciones, un espíritu que, en lo que se refiere a estas cuestiones, podemos calificar como una presentación esencializada y clara que las ideas de Grothendieck y de la escuela francesa en la que éste tuvo tanta influencia.

Se trata de la *supergeometría*, o estudio de las denominadas *supervariedades* que habían sido introducidas [15, 55] para incorporar "variables anti-conmutativas" del tipo de las utilizadas en física teórica para el estudio de la *supersimetría*.

El uso de variables anti-conmutativas se debe principalmente a Berezin, que las había usado en sus trabajos sobre la segunda cuantificación [13] y servían para "integrar sobre los fermiones" por medio de un mecanismo formal al que nos referiremos de nuevo y que ahora se conoce como *integral de Berezin*. Aunque en el artículo de Berezin y Kac [14] se habían introducido los grupos de Lie formales con variables anti-conmutativas y su relación con las álgebras de Lie graduadas, solo con la aparición de la supersimetría en física teórica se extendió el interés por la supergeometría.

Hasta entonces, las partículas bosónicas y fermiónicas habían sido tratadas de forma muy diferente: los vectores bosónicos pueden ser considerados como partículas "gauge", lo que significa en términos matemáticos que el campo clásico (no cuántico) que representa la partícula es una conexión en un fibrado principal sobre el espacio-tiempo. El grupo de los automorfismos verticales del fibrado proporciona simetrías locales, lo que da una pista para la renormalización de la teoría cuántica asociada [11, 12]. Sin embargo, no hubo una descripción similar para las partículas fermiónicas hasta que Wess y Zumino [85] desarrollaron una teoría de campos invariante por supersimetría que mezcla bosones y fermiones. Esta teoría lleva a la *supergravedad*, que puede ser considerada, en cierto sentido, como una teoría gauge con partículas tanto bosónicas como fermiónicas.

El primer intento de establecer un adecuado marco geométrico para la supersimetría es la teoría de Berezin-Leĭtes-Kostant [15, 55]. Se considera una variedad diferencial m-dimensional X y se amplía su haz de funciones diferenciables reales a un haz $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas-conmutativas que es localmente isomorfo al haz de funciones valoradas en el álgebra exterior de $\mathbb{R}^n$ (Definición 1.4). Se obtiene así una *variedad graduada* $(X, \mathcal{A})$ de dimensión (m, n). La construcción tiene un gran aroma de geometría algebraica, la pareja $(X, \mathcal{A})$ es un *espacio localmente anillado*, como los usados para definir la noción de esquema, que había sido introducida por Grothendieck como un modelo general de variedad algebraica. En términos de coordenadas locales, $(x^1, \dots, x^m, \theta^1, \dots, \theta^n)$ en $(X, \mathcal{A})$ – aquí las x son coordenadas pares y las θ coordenadas impares o anti-conmutativas– una sección local de $\mathcal{A}$ puede ser desarrollada en potencias de las θ, siendo así un *supercampo*, y los coeficientes de la expansión son funciones reales en X que representan los campos bosónicos o fermiónicos, cuando afectan a un producto de un número, respectivamente par o impar, de las variables anti-conmutativas.

De Witt y Rogers [29, 75] iniciaron un tratamiento más analítico. Consideran una ampliación del cuerpo real a un conjunto que contiene a la vez variables conmutativas y anti-conmutativas y modelan sobre ese modelo local su noción de variedad. Para ello toman un álgebra exterior B, que es $\mathbb{Z}_2$-graduada-conmutativa de modo natural, pues es la suma directa de sus partes par e impar $B = B_0 \oplus B_1$, y definen el modelo local como $B^{m,n} = B_0^m \times B_1^n$. Una supervariedad es entonces un espacio topológico junto con un atlas de abiertos coordenados $B^{m,n}$-valorados, cuyas funciones de transición son "lisas" en un determinado sentido. Esa condición de "lisitud" es el punto crucial – y la principal debilidad – de la teoría. Rogers eligió la noción de función G^∞, lo que conduce a un haz de estructura cuyo haz de derivaciones no es localmente libre. Eso significa que la supervariedad no puede ser descrita por coordenadas locales, lo que es decididamente poco práctico para las aplicaciones físicas. Tampoco las supervariedades GH^∞ definidas después por Rogers para intentar resolver ese problema [76] están libres de incovenientes. Aunque sus derivaciones forman un haz localmente libre, no es posible desarrollas para ellas una noción sensata de "espacio tangente graduado" de forma que los espacios tangentes en los diferentes puntos sean módulos libres sobre el álgebra B.

De esta descripción, quizá demasiado rápida, sobre los diferentes modos de buscar la geometría que subyace a la supersimetría, se desprende al menos que para encontrar esa geometría, hay que asegurarse de que cumple determinadas propiedades sin las cuales no puede dar lugar a teorías aplicables y consistentes. No es sorprendente que se tuviera la tentación de categorizar esos requisitos como axiomas y proponer una teoría axiomática de supervariedades. Eso fue lo que hizo Rothstein [78], que indicó cuatro axiomas que para cada elección de un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada-conmutativa B, determinan una amplia categoría de supervariedades "con buen comportamiento". Aunque las variedades graduadas satisfacen la axiomática de Rothstein cuando se hace la elección $B = \mathbb{R}$, tanto las supervariedades de tipo G^∞ como las de tipo GH^∞ violan dichos axiomas, lo que explica la razón por la que no son adecuadas. Sin embargo, no dejan de tener propiedades deseables, principalmente porque incorporan las variables anti-conmutativas dentro del substrato geométrico, lo que las hace deseables para aplicaciones físicas no triviales.

Por esa razón, parecía necesario hacer modificaciones substanciales a las definiciones de Rogers de modo que mantuvieran esas propiedades pero que verificaran una axiomática razonable. Eso nos llevó a definir una nueva noción de supervariedades [4] a las que llamamos *G-supervariedades*, que representa de un modo preciso las estructuras geométricas que tienen las supervariedades de Rogers y que satisfacen los axiomas de Rothstein. En esencia, una G-supervariedad es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{A})$ en el que X es un espacio topológico y $\mathcal{A}$ un haz de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas-conmutativas, que es localmente isomorfo con una cierta "G-supervariedad estándar" (Definición 1.23). La definición es similar a la de las supervariedades de Rogers, pero engloba también a las variedades graduadas y requiere métodos de geometría algebraica que son también esenciales para el estudio de su geometría y propiedades. En el libro *The Geometry of Supermanifolds* [5] puede encontrarse el desarrollo completo de la geometría de las G-supervariedades.

Hay que hacer notar que la categoría de supervariedades que verifican la axiomática de Rothstein es demasiado grande. De hecho, no es cierto que se reduzca a la categoría de las variedades graduadas de Kostant cuando el álgebra base es conmutativa. Para conseguir esto, y por tanto una axiomática más adecuada, es necesario añadir a los axiomas de Rothstein un quinto axioma, que de hecho requiere la completitud de los anillos de funciones del haz estructural con respecto a cierta topología natural, algo similar a lo que sucede en una variedad diferenciable ordinaria. El estudio de esta nueva axiomática se encuentra en [6].

Antes de seguir adelante, es necesario advertir de la diferente terminología utilizada en la literatura sobre supergeometría. Aunque en los primeros artículos se empleaba la palabra *supervariedad* para referirse a lo que hemos denominado supervariedades de Rogers o de DeWitt, en la escuela rusa (y parte de la occidental) se usaba siempre "supervariedades" para referirse a las variedades graduadas de Kostant o a sus equivalentes analíticos o algebraicos, hablando así de *supervariedades analíticas* o *superesquemas*. Para evitar confusión, en este texto emplearemos la palabra supervariedad en este sentido, y emplearemos para las variedades de tipo Rogers los términos de G^∞-supervariedad o GH^∞-supervariedad, así como reservaremos la denominación de G-supervariedad para dichos objetos, sin abreviar la terminología.

Las propiedades globales de las G-supervariedades son muy diferentes de las de las variedades diferenciables; por ejemplo, el haz de estructura de una G-supervariedad tiene, en general, cohomología no trivial. Eso hace su estudio particularmente interesante, no solo desde el punto de vista matemático sino también de sus aplicaciones a la física; téngase en cuenta que la maquinaria cohomológica ha sido utilizada en conexión con las anomalías de las teorías de campo supersimétricas [19, 7]. También hay aplicaciones a la teoría de cuerdas en las que se pone de manifiesto que las consideraciones locales son insuficientes para dar una descripción completa del problema [61].

El texto está ordenado como sigue. En la Sección 1 se da la definición de supervariedad describiendo algunas de las aplicaciones que motivaron que decidiéramos estudiarlas. La principal fue el desarrollo de un cálculo de variaciones [48, 50], que puso de manifiesto que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas introducían ligaduras sobre las variables fermiónicas. Se describe también intrínsecamente la *integral de Berezin* [49], un mecanismo formal que había sido introducido por Berezin para "integrar sobre los fermiones" y que necesitaba de una definición consistente. Las propiedades de dicha integral fueron generalizadas a medidas de Haar de tipo fermiónico en [52]. Sin embargo, no se consideran algunas aplicaciones de la geometría de las variedades graduadas, como algunos desarrollos recientes en el marco de la geometría simpléctica.

La Sección 2 está orientada a propiedades de las supervariedades algebraicas o superesquemas. La motivación para iniciar ese estudio partió de la versión supersimétrica de la *integral de Polyakov*. La integral de Polyakov clásica es un método para calcular el "scattering" cuántico de las amplitudes de vacío en la teoría de la cuerda bosónica y requiere la integración sobre el espacio de móduli de las curvas algebraicas (o superficies de Riemann) de un determinado género [74]. La compactificación del espacio de móduli tiene el efecto de que la integral de Polyakov tiene polos en la frontera. Una de las razones de la introducción de la supersimetría en este contexto es compensar esos polos mediante la definición de una nueva medida con una componente fermiónica. Friedan sugirió que esa nueva medida o integral de amplitud supersimétrica requeriría la integración sobre un espacio de móduli de *supersuperficies de Riemann* [36]. Para ello es necesario el estudio de las *curvas supersimétricas* o *curvas SUSY* y de su espacio de móduli [31] [32]. Construiremos un espacio de supermóduli para curvas supersimétricas como un *superespacio algebraico*, la generalización natural al mundo de la supergeomtría de los espacios algebraicos de Artin [1], que son ejemplos especiales de stacks, más generales que los esquemas, pero que tienen suficientes funciones meromorfas.

Muchas de las cuestiones sobre la estructura de los superespacios de móduli de curvas SUSY están aún pendientes y algunas sólo se han resuelto muy recientemente. Por ejemplo, en [33] se demuestra que para género mayor o igual a cinco, dicho supermóduli no es proyectado, es decir la inmersión natural de su subespacio no graduado subyacente no tiene un retracto (Definición 1.3); en particular no es equivalente a una variedad graduada trivial sobre el espacio subyacente, por lo que no puede construirse simplemente a partir de técnicas de geometría algebraica no graduada.

Digamos para terminar esta introducción que, aunque se cita una abundante bibliografía, se hace un énfasis especial en los trabajos de los alumnos de Sancho y de sus colaboradores, lo que puede dar la impresión de una sobrevaloración de sus contribuciones, que se justifica por perseguir un homenaje a la figura a la que se dedica este congreso.

1. Supervariedades diferenciales

1.1. Variedades diferenciales desde un punto de vista de geometría algebraica. Las variedades diferenciables se definen como espacios topológicos (a los que se exige que sean separados) que tienen un atlas de abiertos homeomorfos a abiertos de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ y de modo que las funciones de transición son diferenciables. En realidad, lo que de verdad define las variedades diferenciales es cuál es la noción de función diferenciable sobre ellas.

El punto de partida es la noción de función diferenciable real sobre un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, que se conoce del análisis. Las funciones diferenciables sobre el abierto U constituyen de forma natural un anillo $\mathcal{C}^\infty(U)$ definiendo la suma y el producto a través de sus valores. Estos anillos verifican algunas propiedades muy sencillas: cuando se tienen dos abiertos $V \subseteq U$ la restricción a V de una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en V de modo que la restricción de funciones define un morfismo de anillos $\phi_{UV} : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(V)$ de forma que si tomamos abiertos $W \subset V \subset U$ restringir desde U a V y después hacerlo de V a W es igual a restringir directamente de U a W, o sea $\phi_{UW} = \phi_{VW} \circ \phi_{UV}$. Pero la propiedad fundamental de la diferenciabilidad es su *carácter local*, es decir, si se tiene una función $f\colon U\to\mathbb{R}$ cuya restricción a cada uno de los abiertos de un recubrimiento es diferenciable, entonces f es también diferenciable, $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$.

Las personas familiarizadas con la teoría de haces, habrán reconocido que eso significa que asignar a cada abierto U de $\mathbb{R}^m$ el anillo de funciones diferenciables $\mathcal{C}^\infty(U)$, define un *haz* $\mathcal{C}^\infty$ sobre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$, de forma que $(\mathbb{R}^m,\mathcal{C}^\infty)$ no es otra cosa que un espacio localmente anillado, es decir, una pareja formada por un espacio topológico y un haz de anillos sobre él, cuyas fibras en cada punto son anillos locales.

La definición de variedad diferenciable desde el punto de vista de la geometría algebraica podría ser simplemente esta:

Definición 1.1. Una variedad diferenciable es un espacio anillado $(X,\mathcal{C}^\infty_X)$ donde X es un espacio topológico separado y $\mathcal{C}^\infty_X$ es un haz de funciones reales de forma que cada punto x tiene un entorno abierto U dotado de un homeomorfismo $\varphi\colon U\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^m$ que induce un isomorfismo $(U,\mathcal{C}^\infty_U)\xrightarrow{\sim}(\mathbb{R}^m,\mathcal{C}^\infty)$ de espacios localmente anillados.

La última condición significa que para cada función diferenciable real g sobre $\mathbb{R}^m$, la función $\varphi^*(g)\colon U\to\mathbb{R}$ está en $\mathcal{C}^\infty_X(U)$ y que $\varphi^*\colon\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)\to\mathcal{C}^\infty_X(U)$ es un isomorfismo de anillos. Es sencillo ver que esta definición coincide con la usual en términos de atlas a la que nos hemos referido antes.

Esta es la definición que se generaliza fácilmente para definir supervariedad (diferenciable) en sentido de Kostant.

1.2. Supervariedades en sentido de Kostant. Empecemos por definir la noción más general de *superespacio*. Para ello consideramos un cuerpo base k (que será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en la mayor parte de los casos) y un espacio localmente anillado $(X,\mathcal{S})$ en k-álgebras conmutativas.

Definición 1.2. Un superespacio de dimension impar n con espacio subyacente $(X,\mathcal{S})$ es una pareja $(X,\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es un haz de k-álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas-conmutativas, tal que:

1. se tiene una sucesión exacta $0\to\mathfrak{J}\to\mathcal{A}\xrightarrow{\pi}\mathcal{S}\to 0$, donde π es un epimorfismo de k-álgebras graduadas, y $\mathfrak{J}=\mathcal{A}_1+(\mathcal{A}_1)^2$.
2. $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ es un modulo localmente libre de rango n sobre $\mathcal{S}=\mathcal{A}/\mathfrak{J}$, y $\mathcal{A}$ es localmente isomorfo, como haz de álgebras, al álgebra exterior $\Lambda_{\mathcal{S}}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$.

La segunda condición implica que $\mathfrak{J}^{n+1}=0$. Cuando $\mathcal{S}$ no tiene nilpotentes, $\mathfrak{J}$ coincide con el haz $\mathfrak{N}$ de nilpotentes de $\mathcal{A}$. Se observa además que los anillos de las fibras de $\mathcal{A}$ son locales, de modo que $(X,\mathcal{A})$ es un espacio localmente anillado graduado. Por tanto pueden definirse los *morfismos de superespacios* como morfismos de espacios localmente anillados graduados y se observa que un morfismo de superespacios induce un morfismo entre los espacios ordinarios subyacentes.

El morfismo π induce una immersion del espacio subyacente $(X,\mathcal{S})$ en el superespacio $(X,\mathcal{A})$.

Definición 1.3. Se dice que el superespacio $(X,\mathcal{A})$ es proyectado si existe una proyección $(X,\mathcal{A})\to(X,\mathcal{S})$ que es un retracto de la immersion anterior, es decir, si

π tiene una sección $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{A}$. Se dice que $(X, \mathcal{A})$ es escindido si existe un isomorfismo global $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathcal{S}}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$.

Los superespacios escindidos son también proyectados.

Una supervariedad es simplemente un superespacio sobre $\mathbb{R}$ cuyo espacio subyacente es una variedad diferenciable:

Definición 1.4. Una supervariedad, o variedad graduada en sentido de Kostant, de dimensión (m, n) es un superespacio en $\mathbb{R}$-álgebras de dimensión impar n cuyo espacio subyacente es una variedad diferenciable m-dimensional $(X, \mathcal{C}^\infty_X)$.

Del mismo modo se definen las *supervariedades complejas* tomando $k = \mathbb{C}$ y $(X, \mathcal{S})$ como una variedad compleja, o los *superespacios analíticos*, los *superesquemas* y así sucesivamente.

Con la definición de supervariedad como un espacio anillado, tenemos a nuestra disposición todas las definiciones naturales de subvariedad, inmersión abierta y cerrada, puntos, etc.

Un hecho destacable es que las supervariedades son escindidas [8] de modo que se tiene un isomorfismo global $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})$ para el haz localmente libre $\mathcal{M} = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ de rango n sobre X. En particular, toda supervariedad es proyectada. El problema de determinar cuando otro tipo de superespacios más generales son escindidos depende de la anulación de determinadas clases de cohomolokía; ha sido estudiado, entre otros, por Green [45], Manin [62], Rothstein [77], Vaintrob [80, 81] y Onishchik [72], entre otros.

1.2.1. Coordenadas locales en supervariedades. Si $(X, \mathcal{A})$ es una supervariedad de dimensión (m, n), un entorno coordenado $(U, \mathcal{A}_{|U})$ donde U es un abierto coordenado de X y $\mathcal{A}_{|U} = \Lambda(\mathcal{J}_{|U}/\mathcal{J}^2_{|U})$.

Definición 1.5. Un sistema local de coordenadas es una familia $(x, \theta) = (x^1, \dots, x^m, \theta^1, \dots, \theta^n)$ donde $(x^1, \dots, x^m)$ son coordenadas locales ordinarias y $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ es una base $\mathcal{J}(U)/\mathcal{J}(U)^2$.

Las x^i son coordenadas pares mientras que las θ^J son impares. Todo elemento de $\mathcal{A}(U)$ se escribe de modo único como

$$f = \sum_\beta f_\beta \theta^\beta$$

donde $f_\beta = f_\beta(x^1, \dots, x^m)$ son funciones diferenciables, $\beta = (\beta_1 < \dots < \beta_p)$, $1 \le \beta_1$, $\beta_p \le n$ y $\theta^\beta = \theta_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \theta_n^{\beta_p}$.

Pueden definirse derivaciones graduadas $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial \theta^J}$ del anillo $\mathcal{A}(U)$ que forman una base libre del $\mathcal{A}(U)$ módulo de las derivaciones. La base dual en $\Omega^1(\mathcal{A}(U))$ está formada por las diferenciales $(dx, d\theta)$.

1.2.2. Productos de supervariedades. En el caso diferenciable, incluso para variedades diferenciables ordinarias, para dar la definición de producto, y en consecuencia la de fibrado, desde este punto de vista, se ponen de manifiesto problemas relacionados con las topologías de los anillos de funciones diferenciables. Puesto que en la definición de supervariedad es necesario describir el haz de estructura, pensemos en dos variedades diferenciables ordinarias X, Y y tratemos de definir el haz de estructura – el haz de las funciones diferenciables – de la variedad producto $X \times Y$ en términos de los haces de funciones diferenciables en X y en Y. Si las cosas fueran como en el caso algebraico, el haz $\mathcal{C}^\infty_{X\times Y}$ sería simplemente el producto tensorial $\pi_X^*\mathcal{C}^\infty_X \otimes \pi_Y^*\mathcal{C}^\infty_Y$, siendo π_X, π_Y las proyecciones de $X\times Y$ sobre sus factores, de modo que dados abiertos euclídeos $U \subset X$, $V \subset Y$ se tendría $\mathcal{C}^\infty(U\times V) \simeq \mathcal{C}^\infty(U) \otimes \mathcal{C}^\infty(V)$.

Si tomamos coordenadas $(x^1,\dots,x^m)$, $(y^1,\dots,y^n)$ en U y en V, las funciones de $\mathcal{C}^\infty(U)\otimes\mathcal{C}^\infty(V)$ son las que pueden expresarse como suma finita

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^k f_i(x^1,\dots,x^m) g_i(y^1,\dots,y^n)\,.$$

de productos de funciones diferenciables en U y en V. No toda función diferenciable en $(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^n)$ es de esa forma, pero puede expresarse como una serie de funciones cuyos sumandos son productos $f_i(x^1,\dots,x^m)g_i(y^1,\dots,y^n)$. Los anillos $\mathcal{C}^\infty(U)$, $\mathcal{C}^\infty(V)$ tienen la estructura de $\mathbb{R}$-álgebras de Fréchet respecto de la topología de la convergencia uniforme en compactos de la función y todas sus derivadas – que puede definirse por una familia de seminormas – y se puede dotar al anillo $\mathcal{C}^\infty(U)\otimes\mathcal{C}^\infty(V)$ de la topología π, introducida por Grothendieck en su memoria sobre los espacios nucleares [47]. Si se completa el producto tensorial respecto de dicha topología resulta:

$$\mathcal{C}^\infty(U\times V) \simeq \mathcal{C}^\infty(U)\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{C}^\infty(V)\,.$$

Podemos dotar del mismo modo al haz estructural de una supervariedad diferenciable con una estructura de haz de $\mathbb{R}$-álgebras de Fréchet graduadas [48] y definir el producto de dos supervariedades diferenciables $(X,\mathcal{A}_X)$, $(Y,\mathcal{A}_Y)$, como:

$$(X,\mathcal{A}_X)\times(Y,\mathcal{A}_Y) \simeq (X\times Y, \pi_X^*\mathcal{A}_X \widehat{\otimes}_\pi \pi_Y^*\mathcal{A}_Y)\,.$$

Si $\dim(X,\mathcal{A}_X) = (m,n)$, $\dim(Y,\mathcal{A}_Y) = (p,q)$, entonces $\dim[(X,\mathcal{A}_X)\times(Y,\mathcal{A}_Y)] = (m+p, n+q)$. Del mismo modo se puede definir el fibrado vectorial sobre una supervariedad diferenciable $(X,\mathcal{A}_X)$ asociado a un haz localmente libre $\mathcal{M}$ de rango (p,q) como la supervariedad diferenciable de dimensión $(m+p,n+q)$ de la forma

$$V(\mathcal{M}) \simeq (V(\widetilde{\mathcal{M}}), \widehat{\mathrm{Sym}}_\pi \mathcal{M}^*)\,,$$

donde $\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{A}_X}\mathcal{C}^\infty_X$ es el modulo localmente libre de rango p inducido sobe X, $V(\widetilde{\mathcal{M}})$ es el *superfibrado vectorial* asociado a $\widetilde{\mathcal{M}}$ y el producto simétrico está completado respecto a una topología π de forma similar a la descrita para el producto. La definición de superfibrado vectorial muestra, de nuevo, como es imprescindible el uso de los haces estructurales de las supervariedades, y no puede hacerse simplemente en coordenadas.

Los principales ejemplos de superfibrados vectoriales sobre una supervariedad $(X,\mathcal{A}_X)$ son el *superfibrado tangente* $T_{(X,\mathcal{A}_X)} = V(\mathcal{D}er(\mathcal{A}_X))$ asociado al $\mathcal{A}_X$-modulo de las derivaciones de $\mathcal{A}_X$ y el *superfibrado cotangente* $T_{(X,\mathcal{A}_X)} =$

$V(\Omega_{(\mathcal{A}_X)})$, que es el asociado al módulo de las diferenciales $\Omega_(\mathcal{A}_X) = \Delta/\Delta^2$, donde Δ es el ideal de la inmersión diagonal $(X, \mathcal{A}_X) \hookrightarrow (X, \mathcal{A}_X) \times (X, \mathcal{A}_X)$. Como en el caso ordinario, se tiene que $\mathcal{D}er(\mathcal{A}_X)^* \xrightarrow{\sim} \Omega_{(\mathcal{A}_X)}$. Además, si (x, θ) son coordenadas locales en un abierto U, las diferenciales $(dx, d\theta)$ forman una base libre de $\Omega^1(\mathcal{A}(U))$ y su base dual está formada por las derivaciones graduadas $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial \theta^J}$.

1.2.3. Supervariedades de superjets. Denotemos, por simplicidad, una supervariedad diferenciable por letras caligráficas $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ mientras que $X = (X, \mathcal{O}_X)$ será la variedad diferenciable ordinaria subyacente.

Si consideramos en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ el ideal Δ de la diagonal $\delta_\Delta \colon \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, el haz de $\Omega_{\mathcal{X}(k)} = \Delta/\Delta^{k+1}$ es el haz de las *diferenciales de orden* k de $\mathcal{X}$. En particular, $\Omega_{\mathcal{X}(1)}$ es el haz de las 1-formas diferenciales $\Omega_\mathcal{X}$. Los haces $\Omega_{\mathcal{X}(k)}$ tienen estructura de álgebras graduadas de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-módulos, si los consideramos como módulos por la derecha, para la estructura heredada de definir localmente $(a \otimes b) \cdot f = (a \otimes b)(1 \otimes f)$ sobre $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}$.

Tomemos ahora dos supervariedades $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. Sobre $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tenemos el superfibrado vectorial de homomorfismos $\mathcal{E} = V(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}}(\pi_1^*\Omega_{\mathcal{X}(k)}, \pi_2^*\Omega_{\mathcal{Y}(k)})) \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, siendo π_i las proyeciones de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ sobre sus factores.

Definición 1.6. La supervariedad de superjets de orden k de morfismos de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ es la sub-supervariedad cerrada $\mathcal{J}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \hookrightarrow \mathcal{E}$ definida por los morfismos que respetan la estructura de álgebra.

Si $f \colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$ es un morfismo de supervariedades, se tiene un *morfismo de extensiones k-superjet*, $f_* \colon \mathcal{J}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \mathcal{J}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y}')$. Si f es una proyección regular también lo es f_*.

Por otra parte, todo morfismo de supervariedades $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ induce una inmersión cerrada

$$j^k f \colon \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{J}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

llamado *extensión k-superjet de f*. Tiene entonces sentido la siguiente:

Definición 1.7. Sea $p \colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ una proyección regular de supervariedades. La supervariedad de las extensiones k-superjet de secciones de p es la anti-imagen $\mathcal{J}^k(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ por p_* de la extensión k-superjet de la identidad en $\mathcal{X}$, es decir, la supervariedad definida por el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}^k(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \arrow[r, "p_*"] & \mathcal{J}^k(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \\
\mathcal{J}^k(\mathcal{Y}/\mathcal{X}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "p_*"] & \mathcal{X} \arrow[u, hook, "j^k\mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}$$

Como el producto en $\Omega_\mathcal{Y}$ es nulo, $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ se identifica con el *superfibrado vertical* $T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ a p, definido por la sucesión exacta de superfibrados vectoriales

$$0 \to T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})} \to T_\mathcal{Y} \to p^*T_\mathcal{X} \to 0\,, \tag{1}$$

sobre $\mathcal{Y}$.

Si $\sigma\colon \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ es una sección de p, su extensión k-superjet $j^k\sigma$ valora, de hecho, en $\mathcal{J}^k(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$.

Si tomamos coordenadas locales graduadas $(x^1,\dots,x^m,\theta^1,\dots,\theta^n)$ en $\mathcal{X}$ y coordenadas locales fibradas $(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots y^s,\theta^1,\dots,\theta^n,\eta^1,\dots,\eta^q)$ en $\mathcal{Y}$, un sistema de coordenadas locales para $\mathcal{J}^k(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ está dado por:

$$(x^i, y^h, \theta^J, \eta^K, p^h_{\alpha,\beta} = d_k y^h \otimes D_{\alpha,\beta}, p^K_{\alpha,\beta} = d_k \eta^K \otimes D_{\alpha,\beta})\,,$$

donde $i = 1,\dots,m$, $J = 1,\dots,n$, $h = 1,\dots,s$, $K = 1,\dots,q$, d_k es la diferencial de orden k y $D_{\alpha,\beta}$ el operador

$$D_{\alpha,\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta_d}}$$

siendo $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, $\beta = (\beta_1 < \cdots < \beta_p)$, con $1 \le \beta_1$, $\beta_{d(\beta)} \le n$ y $0 \le |\alpha| + d(\beta) \le k$.

Consideremos el superfibrado vectorial $p_1\colon \mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X}) \simeq T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})} \to \mathcal{Y}$ de 1-jets de secciones locales de p. Si se toma la imagen inversa de la sucesión exacta (1), se obtiene una sucesión exacta de superfibrados vectoriales

(2)
$$\begin{tikzcd} & & 0 & & \\ 0 \arrow[r] & p_1^*T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})} \arrow[r] & p_1^*T_{\mathcal{Y}} \arrow[u] \arrow[r, "p_*"] & \pi^*T_{\mathcal{X}} \arrow[r] & 0 \\ & & T_{\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})} \arrow[u, "p_{1*}"] & & \end{tikzcd}$$

donde $\pi = p \circ p_1\colon T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})} \to \mathcal{X}$. Existe un único morfismo $\rho\colon p_1^*T_{\mathcal{Y}} \to p_1^*T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ que escinde la sucesión exacta y tal que la 1-forma sobre $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ con valores en $p_1^*T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ dada por composición $\vartheta^{(1)} = \rho \circ p_{1*}\colon T_{\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})} \to p_1^*T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ caracteriza las extensiones 1-superjet de las secciones locales de p, esto es, una sección local $\bar\sigma$ de π es la extensión 1-superjet de una sección local de p si y sólo si se tiene $\bar\sigma^*\vartheta^{(1)} = 0$ [48, Thm. 17]. La forma $\vartheta^{(1)}$ se llama *forma de estructura del superfibrado de 1-superjets* (ver, por ejemplo, [37] para el caso ordinario). En coordenadas locales, $\vartheta^{(1)}$ está dada por $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(1)}_h \otimes \partial/\partial y^h + \vartheta^{(1)}_K \otimes \partial/\partial\eta^K$ con

$$\vartheta^{(1)}_h = dy^h - dx^i p^h_i - d\theta^J p^h_J\,, \quad \vartheta^{(1)}_K = d\eta^K - dx^i p^K_i - d\theta^J p^K_J\,.$$

Análogamente, tomando imagen inversa por $p_{21}\colon \mathcal{J}^2(\mathcal{Y}/\mathcal{X}) \to \mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ de la sucesión exacta del superfibrado vertical (1) aplicada al morfismo π, resulta que existe una 1-forma $\vartheta^{(2)}\colon T_{\mathcal{J}^2(\mathcal{Y}/\mathcal{X})} \to p_{21}^*T_{\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ sobre $\mathcal{J}^2(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ con valores en $p_{21}^*T_{\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ que caracteriza las extensiones 2-superjet de las secciones locales de $p\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. La utilidad de esta forma de estructura de los 2-superjets se pondrá de manifiesto en la expresión de las ecuaciones de Euler-Lagrange graduadas, como veremos más adelante (Teorema 1.9).

1.2.4. Transformaciones infinitesimales de contacto graduadas. La noción habitual de transformación infinitesimal de contacto como campo sobre el fibrado de 1-jets que deja invariante la forma de estructura, se generaliza sin más al caso graduado. Como en el caso ordinario, para poder calcular la derivada de Lie de una forma valorada, es necesario introducir una conexión. Ahora será una *superconexión* o *ley de derivación graduada* en el módulo donde la superforma toma valores.

Definición 1.8. Una derivación (homogénea) $\bar{D}$ sobre $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ es una transformación infinitesimal de contacto graduada si para alguna superconexión ∇ en el módulo de secciones de $p_1^*T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ se verifica:

$$\mathbf{L}_{\bar{D}}\vartheta^{(1)} = h \circ \vartheta^{(1)}$$

donde h es un endomorfismo de $p_1^*T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ como módulo por la izquierda y la derivada de Lie se calcula respecto a ∇.

1.3. Cálculo de variaciones para supervariedades diferenciables. En [48, 50] desarrollamos un cáculo de variaciones sobre supervariedades de Kostant, siguiendo el modelo geométrico que había sido desarrollado por P.L. García Pérez y Antonio Pérez-Rendón [39, 37, 40] e inspirado por las ideas de Juan Sancho Guimerá. Este modelo geométrico es muy rico y ha sido objeto de un gran desarrollo posterior.

El modelo contempla la introducción de una serie de objetos, Lagrangianas, formas de estructura de los Jets, formas de Poincaré-Cartán y de Legendre que permiten una caracterización global de las ecuaciones de Euler-Lagrange que caracterizan las secciones críticas para una proyección regular de variedades diferenciables y el estudio de muchas de sus propiedades, como la definición y el cálculo de los invariantes de Noether asociados a simetrías infinitesimales y de la variedad de soluciones de un problema variacional.

Para el caso graduado, partimos de una proyección regular $p\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ de supervarieades de Kostant. Se supone que X es una variedad orientada por un elemento de volumen $\omega \in \Omega^m(X)$ y se fija un retracto $\mathcal{X} \to X$ de la inmersión en $\mathcal{X}$ de su variedad subyacente, que existe por un teorema de Batchelor [8]; todos los sistemas de coordenadas graduados se eligen de modo compatible con esa proyección. En particular, ω induce una m-forma sobre $\mathcal{X}$ que permite definir una integral $\Lambda^m\Omega(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$.

Un cáculo variaciones graduado sobre $p\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ está definido por una *superdensidad Lagrangiana*; por tal se entiende una m-forma graduada sobre $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ de la forma $\mathscr{L}\omega$, siendo $\mathscr{L}$ una sección global del anillo de secciones del haz $\mathcal{O}_{\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$.

1.3.1. Superformas de Legendre y de Poincaré-Cartán. Existe una $(m-1)$-*superforma de Legendre* $\Omega_{\mathscr{L}}$ sobre $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ con valores en $p_1^*T^*_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$, que se expresa en coordenadas como

$$\Omega_{\mathscr{L}} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p_i^h}\omega_i \otimes dy^h + \frac{\partial \mathscr{L}^\tau}{\partial p_i^K}\omega_i \otimes d\eta^K\,, \quad \left(\omega_i = i\frac{\partial}{\partial x^i}\omega\right)$$

siendo τ la multiplicación por (-1) en la componente impar. Se define entonces la *superforma de Poincaré-Cartán* como la m-superforma sobre $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ dada por:

$$\Theta = \vartheta^{(1)} \wedge \Omega_{\mathscr{L}} - \mathscr{L}\omega\,.$$

La expresión clásica de $d\Theta$ en términos del operador de Euler-Lagrange no se traslada al contexto graduado y para obtener una expresión adecuada es necesario hacer imagen inversa al superfibrado de 2-superjets $\mathcal{J}^2(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$. En primer lugar, puesto que el cáculo de la diferencial involucra formas valoradas, es necesario introducir superconexiones sobre los módulos donde valoran las formas. Para ello se parte de una superconexión en el $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-módulo de derivaciones relativas $\mathcal{D}er_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y)$ sin torsión vertical, es decir, tal que $\nabla_D D' = (-1)^{|D|\cdot|D'|}\nabla_{D'}D$ cuando D y D' están en $\mathcal{D}er_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{D}er_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_Y)$. Levantando esa ley de derivación graudada donde sea necesario, pueden definirse las diferenciales exteriores $d\vartheta^{(1)}$, $d\Omega_{\mathscr{L}}$. En particular se construye un *operador de Euler-Lagrange "naive"*

$$\xi^{\nabla} = d\Omega_{\mathscr{L}} + \omega \otimes f$$

que es una m-superforma sobre $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ con valores en $p_1^* T^*_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})}$ dependiente de la superconexión ∇.

Al contrario de lo que sucede en el cáculo de variaciones ordinario, este operador no basta para calcular la diferencial de la superforma de Poincaré-Cartán. El resultado es

Teorema 1.9. [50, Thm. 2.14] *Existe una única m-superforma ζ sobre $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ con valores en $p_1^*(p^*T_{\mathcal{X}} \otimes T^*_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})})$ tal que la imagen inversa de la diferencial de la superforma de Poincaré-Cartán a $\mathcal{J}^2(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ es:*

$$d\Theta = -\vartheta^{(1)} \wedge \xi^{\nabla} + \vartheta^{(2)\nabla} \wedge \zeta \quad \textit{mod. } p_{21}^*\pi^*\Lambda^{m+1}\Omega_{\mathcal{X}}\,,$$

donde $\vartheta^{(2)\nabla}$ es una 1-forma sobre $\mathcal{J}^2(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ con valores en $p_1^*(p^*T^*_{\mathcal{X}} \otimes T_{(\mathcal{Y}/\mathcal{X})})$ construida a partir de la forma de estructura $\vartheta^{(2)}$ y la superconexión ∇.

La expresión local de ζ es:

$$\zeta = \zeta_h^J \otimes \frac{\partial}{\partial\theta^J} \otimes dy^h + \zeta_K^J \otimes \frac{\partial}{\partial\theta^J} \otimes d\eta^K\,,$$

con

$$\zeta_h^J = -\omega\frac{\partial\mathscr{L}^\tau}{\partial p_J^h} - d\theta^J \wedge \omega_i\frac{\partial\mathscr{L}^\tau}{\partial p_i^h}\,, \quad \zeta_K^J = -\omega\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial p_J^K} + d\theta^J \wedge \omega_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial p_i^K}\,,$$

luego ζ *no depende de* ∇. Llamaremos a la m-superforma ζ el *segundo operador de Euler -Lagrange* del problema variacional definido por la superdensidad Lagrangiana $\mathscr{L}\omega$.

1.3.2. Caracterización de las secciones críticas. La generalización al caso graduado de la noción de sección crítica de un problema variacional es esta:

Definición 1.10. [50, Def. 3.1] Una sección $\sigma\colon \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ de p es crítica respecto del problema variacional graduado definido por una superdensidad Lagrangiana $\mathscr{L}\omega$, si para toda transformación infinitesimal de contacto graduada $\bar{D}$ en $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ (Definición 1.8) cuyo soporte tiene imagen compacta en X, se verifica:

$$\int_{\mathcal{X}} (j^1\sigma)^* \mathbf{L}_{\bar{D}}(\mathscr{L}\omega) = 0$$

donde la integral se toma respecto de ω.

La caracterización de las secciones críticas es:

Teorema 1.11. [50, Thm. 3.4] *Sea $\sigma\colon \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ una sección de p. Si σ es crítica respecto del problema variacional graduado definido por una superdensidad Lagrangiana $\mathscr{L}\omega$, se tiene*

$$[(j^1\sigma)^*\xi_\nabla]_{|X} = 0\,, \quad [(j^1\sigma)^*\zeta]_{|X} = 0\,,$$

para toda superconnexión ∇ del tipo que hemos considerado. Recíprocamente, si esas ecuaciones se verifica para alguna de dichas superconexiones, σ es una sección crítica.

Contra lo que sucede en el caso ordinario, la restricción a las secciones críticas del operador de Euler-Lagrange ξ^∇ sigue dependiendo de la superconexión. Sin embargo, las *ecuaciones graduadas de Euler-Lagrange*

$$\xi^\nabla = 0\,, \quad \zeta = 0\,,$$

son localmente equivalentes a un sistema de ecuaciones que es independiente de ∇:

$$\begin{aligned}
&\left[(j^1\sigma)^*\frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial y^h} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left((j^1\sigma)^*\frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial p_i^h}\right)\right]_{|X} = 0\,, \quad \left[(j^1\sigma)^*\frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial p_J^K}\right]_{|X} = 0\\
&\left[(j^1\sigma)^*\frac{\partial\mathscr{L}_1}{\partial \eta^K} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left((j^1\sigma)^*\frac{\partial\mathscr{L}_1}{\partial p_i^K}\right)\right]_{|X} = 0\,, \quad \left[(j^1\sigma)^*\frac{\partial\mathscr{L}_1}{\partial p_J^h}\right]_{|X} = 0\,,
\end{aligned}$$

donde $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$ es la descomposición en parte par e impar de $\mathscr{L}$.

El primer grupo de las ecuaciones se corresponde con las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange, pero aparecen otros tres grupos de ecuaciones que son totalmente nuevos. En particular, los grupos segundo y cuarto, que proceden de la anulación de ζ pueden ser interpretados como *ligaduras*, del tipo de las impuestas desde fuera de la teoría por diversos autores [64, 83], por ejemplo, en Supergravedad. Eso pone en relación el cálculo de variaciones graduado con el cáculo de variaciones con ligaduras, ampliamente tratado en la literatura [25, 35, 65, 44, 23, 24].

Se tiene también un segundo teorema de caracterización de las secciones críticas.

Teorema 1.12. [50, Thm. 3.10] *Una sección $\sigma\colon \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ de $p\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es crítica para $\mathscr{L}\omega$ si y sólo si se tiene:*

$$[(j^1\sigma)^* i_{\bar{D}} d\Theta]_{|X} = 0\,,$$

para toda transformación infinitesimal de contacto $\bar{D}$ en $\mathcal{J}^1(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$. Aquí $i_{\bar{D}}$ es la contracción interior.

Digamos, para terminar esta parte, que se han desarrollado algunos modelos de cáculo variacional para supervariedades del tipo de Rogers (Sección 1.5), que, en general, no consideran los aspectos geométricos del problema [18, 20].

1.4. La integral de Berezin y el haz bereziniano. La integral de Berezin sobre variables anticonmutativas es una de las nociones más sorprendentes introducidas en Matemáticas [13], [58, 2.4.4].

Consideremos el álgebra anticonmutativa $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)\otimes\Lambda(\mathbb{R}^n)$ de las funciones graduadas sobre $\mathbb{R}^m$ con valores en un álgebra de Grassman; sus elementos se expresan en la forma:

$$f=\sum_\beta f_\beta(x^1,\dots,x^m)\theta^\beta\,,$$

siendo $\beta=(\beta_1<\cdots<\beta_p)$, $1\le\beta_1$, $\beta_p\le n$ y $\theta^\beta=\theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_p}$. Cuando las f_β tienen soporte compacto, la definición de Berezin de la integral de f es

$$\int_{Ber} f=\int_{\mathbb{R}^m} f_{(1,\dots,n)}(x^1,\dots,x^m)\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\,. \tag{3}$$

siendo $f_{(1,\dots,n)}$ la componente de f según $\theta^1\cdots\theta^n$.

El propio Berezin demostró la fórmula de cambio de variables para dicha integral: el papel del Jacobiano para la integral de Riemann de funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}^m$ lo juega aquí el *bereziniano de la matriz del cambio de variables*, donde para una matriz invertible par, $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, el bereziniano está dado por:

$$\operatorname{Ber}(M)=|D|^{-1}\cdot|A-BD^{-1}C|\,.$$

Una pregunta surge inmediatamente, tanto para conocer la naturaleza de esta integral, como para extender la definición al caso de variedades graduadas más generales, y es la que pretende saber cuales son los objetos que evalúa la integral de Berezin.

En el caso ordinario, la integral evalúa m-formas diferenciales, puesto que cambian de coordenadas multiplicando por el determinante de la matriz Jacobiana, al igual que la integral. Por tanto, en el caso graduado, la integral de Berezin evaluará aquellos objetos (de soporte compacto) que cambien de coordenadas multiplicando por el bereziniano de la matriz jacobiana graduada, lo que tiene sentido, pues el bereziniano es multiplicativo. Esta idea llevó a Leĭtes [58, §4] a definir superformas de volumen sobre una variedad graduada $(X,\mathcal{A})$: definió un haz de línea $\operatorname{Ber}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$-módulos, al que llamó *haz bereziniano*, tomando como función de transición el bereziniano de la matriz Jacobiana graduada del cambio de coordenadas. Por su propia construcción, si X es orientable y se elige una orientación, existe una *integral de Berezin*:

$$\int_{\operatorname{Ber}\mathcal{A}}\colon\Gamma_c(X,\operatorname{Ber}\mathcal{A})\to\mathbb{R}\,,$$

donde Γ_c denota las secciones con soporte compacto.

Esta definición proporciona un conocimiento bastante pobre de la naturaleza geométrica del haz bereziniano, y por consiguiente, del significado de la integral de Berezin. Para las variedades diferenciables ordinarias, por ejemplo, deja en la sombra que las secciones del haz bereziniano son las formas de orden máximo.

Por esa razón dimos una construcción intrínseca del haz bereziniano [49]:

Los operadores diferenciales de orden n sobre $\mathcal{A}$ forman un haz $\mathcal{P}^n(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$-módulos tanto por la izquierda como por la derecha. La estructura de módulo por la derecha viene dada por $(P \cdot a)(b) = P(ab)$ en cada abierto. Respecto de ambas estructuras es localmente libre. Lo mismo sucede con el haz $\Omega^m_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{P}^n(\mathcal{A})$ de operadores diferenciales de orden n valorados en las m-formas diferenciales. Escribamos $\omega \mapsto \widetilde{\omega}$ para el morfismo $\Omega^m_{\mathcal{A}} \to \Omega^m_X$ inducido por el morfismo estructural $\mathcal{A} \to \mathcal{C}^\infty_X$.

Sea $K(\mathcal{A})$ el subhaz de $\Omega^m_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{P}^n(\mathcal{A})$ cuyas secciones en un abierto U son los operadores diferenciales graduados de orden n tales que para cada sección $f \in \mathcal{A}(U)$ con soporte compacto, existe una $(m-1)$-forma ordinaria ω sobre U con soporte compacto que verifica $\widetilde{P(f)} = dw$. $K(\mathcal{A})$ es un submódulo por la derecha del haz $\Omega^m_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{P}^n(\mathcal{A})$, pero no es un submódulo por la izquierda.

Definición 1.13. Se llama haz bereziniano de $(X, \mathcal{A})$ al haz cociente $\mathrm{Ber}(\mathcal{A}) = \Omega^m_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{P}^n(\mathcal{A})/K(\mathcal{A})$ con su estructura de $\mathcal{A}$-módulo por la derecha.

Teorema 1.14. *El haz bereziniano* $\mathrm{Ber}(\mathcal{A})$ *verifica las siguientes propiedades:*

1. *Es localmente libre de rango 1.*
2. *Si* (x^j, θ^J) *es un sistema local de coordenadas graduadas en un abierto* $U \subset X$*, se verifica:*

$$\Gamma(U, \mathrm{Ber}(\mathcal{A})) = \left[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \otimes \frac{\partial}{\partial\theta^1} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta^n}\right] \cdot \mathcal{A}(U)\,.$$

El haz bereziniano así definido es isomorfo, salvo por la paridad, al haz bereziniano construido antes por “recollement”. De este modo se ha dado una construcción geométrica que nos permite definir globalmente la integral de Berezin. Para ello, supongamos que la variedad X está orientada.

Teorema 1.15. *Existe una forma lineal sobre el espacio de secciones de soporte compacto del haz bereziniano, llamada integral de Berezin asociada a la orientación de* X*, y definida por la fórmula:*

$$\int_{(X,\mathcal{A})} \xi = \int_X \widetilde{P(1)}\,,$$

donde $P \in \Gamma(X, \Omega^m_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{P}^n(\mathcal{A}))$ *es una sección con soporte compacto en la clase* $\xi = [P]$.

Es facil ver que si $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^m} \otimes \Lambda(\mathbb{R}^n)$, la integral de Berezin coincide, salvo el signo $(-1)^{\binom{n}{2}}$, con la integral definida por Berezin (3).

Se han considerado en la literatura problemas variaciones sobre supervariedades asociados a “densidades berezinianas” en lugar de a las densidades lagrangianas que hemos descrito antes, problemas difíciles de tratar por la inexistencia de un cálculo diferencial de Cartán para dichas densidades. En general, un formalismo lagrangiano de primer orden para un problema variacional bereziniano es equivalente a un problema variacional graduado pero de orden superior [51, 67]. La adaptación del formalismo lagrangiano geométrico de orden superior (ver, por ejemplo, [79, 38, 69, 70, 71, 35]) al caso graduado no se ha desarrollado apenas.

En el caso de supersequemas proyectivos, Penkov [73] ha dado una construcción del bereziniano, demostrando que es el haz “dualizante” en el sentido de la dualidad de Serre. La importancia del bereziniano y de la integral de Berezin en el estudio del móduli de supersuperficies de Riemann y en la teoría de supercuerdas es notable (véase, por ejemplo, [60, 57]).

1.5. G-supervariedades.

1.5.1. Supervariedades à la Rogers. Como dijimos en la introducción, una supervariedad es un espacio localmente anillado en álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas-conmutativas, que es localmente isomorfo con una cierta “supervariedad estándar”.

Para cada entero positivo L, denotaremos por B_L el álgebra graduada $\Lambda(\mathbb{R}^L)$ y escribimos $B_L^{m,n} = (B_L)_0^m \times (B_L)_1^n$. Se tiene un morfismo natural $\sigma^{m,n}\colon B_L^{m,n} \to \mathbb{R}^m$. Provisionalmente podemos definir:

Definición 1.16. Una supervariedad en sentido de Rogers es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{S}_X)$ en álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas-conmutativas, donde X es Hausdorff y paracompacto y $(X, \mathcal{S}_X)$ es localmente isomorfo a $(B_L^{m,n}, \mathcal{S})$ siendo $\mathcal{S}$ un haz de “funciones superdiferenciables”.

De otro modo, un espacio paracompacto Hausdorff admite una estructura de supervariedad diferenciable *à la Rogers* si tiene un atlas

$$\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \varphi_\alpha\colon U_\alpha \xrightarrow{\sim} B_L^{m,n}\}$$

cuyas funciones de transición son superdiferenciables.

Por la propia definición, una supervariedad *à la Rogers* de dimensión (m, n) tiene una estructura subyacente de variedad diferenciable ordinaria de dimensión $2^{L-1}(m + n)$.

Vamos a describir diferentes nociones de “función superdiferenciable”, que darán lugar a diferentes definiciones de supervariedad.

Fijemos un nuevo entero positivo L' tal que sea $L' \leq L \leq n$.

Para cada variedad differentiable ordinaria X, sea $\mathcal{C}^\infty_{L'}(W)$ al álgebra graduada de funciones diferenciables valoradas en $B_{L'}$ en un abierto W de X. El *desarrollo* Z es el morfismo de álgebras graduadas

$$Z_{L'}\colon \mathcal{C}^\infty_{L'}(U) \to \mathcal{C}^\infty_L((\sigma^{m,0})^{-1}(U)),$$

dado por la fórmula [76]:

$$Z_{L'}(h)(x) = h(\sigma^{m,0}(x)) + \sum_{j=1}^{L} \frac{1}{j!} D^{(j)} h_{\sigma^{m,0}(x)}(s^{m,0}(x), \dots, s^{m,0}(x)) \tag{4}$$

con $h \in \mathcal{C}^\infty_{L'}(U)$, $x \in (\sigma^{m,0})^{-1}(U)$; aquí la j-ésima diferencial de Fréchet $D^{(j)}h_{\sigma^{m,0}(x)}$ de h en el punto $\sigma^{m,0}(x)$ opera en $B_L^{m,0} \times \overset{j)}{\cdots} \times B_L^{m,0}$ simplemente extendiendo por linealidad sobre $(B_L)_0$ su acción en $\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m$; la aplicación $s^{m,0}\colon B_L^{m,0} \to \mathfrak{N}_L^{m,0}$

es la proyección sobre la segunda componente de la suma directa $B_L^{m,0} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{N}_L^{m,0}$.

Definición 1.17. Fijados m, n, L, L' como antes, el haz de funciones superdiferenciables sobre $B_L^{m,n}$ es el haz $\mathcal{S}_{L'}$ de $B_{L'}$-álgebras graduadas conmutativas dado por

$$\mathcal{S}_{L'}(V) = \mathcal{S}_{L'}\left((\sigma^{m,n})^{-1}\sigma^{m,n}(V)\right).$$

para cada abierto $V \subset B_L^{m,n}$.

Para cada unos de estos haces $\mathcal{S}_{L'}$ tenemos, en consecuencia, una noción de supervariedad à la Rogers.

Sea $\hat{\mathcal{S}}_{L'}$ el subhaz de $\mathcal{S}_{L'}$ cuyas secciones son funciones que no dependen de las variables impares y^α, es decir, tienen sólo el primer término en la suma (4). El haz $\hat{\mathcal{S}}_{L'}$ sobre $BL^{m,n}$ es la imagen inversa por la proyección $B_L^{m,n} \to B_L^{m,0}$ del haz $\mathcal{S}_{L'}$ sobre $B_L^{m,0}$. Por tanto, (4) demuestra la existencia, para cada abierto $U \subset B_L^{m,n}$, de un epimorfismo

$$\begin{aligned} \lambda\colon \hat{\mathcal{S}}_{L'}(U) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n &\to \mathcal{S}_{L'}(U) \\ \sum_{\mu\in\Xi_n} f_\mu \otimes y^\mu &\mapsto \sum_{\mu\in\Xi_n} f_\mu\, y^\mu, \end{aligned} \tag{5}$$

donde se ha identificado $\Lambda_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ con el álgebra exterior generado por las y^α.

Proposición 1.18. *El morfismo de haces* (5) *es inyectivo (y por tanto, un isomorfismo) si y sólo si if $L - L' \geq n$.*

Así pues, cuando $L - L' \geq n$, se tiene una buena descripción de las funciones superdiferenciables.

1.5.2. Supervariedades H^∞. Si $L' = 0$ el haz $\mathcal{S}_{L'}$ coincide con el haz de *funciones H^∞*, considerado por Batchelor [9] y DeWitt [29].

Para ellas se verifica la Proposición 1.18 y en este caso, $B_{L'} = \mathbb{R}$. Para las aplicaciones físicas, se ha argumentado que las funciones H^∞ no son adecuadas por la siguiente razón: en el estudio de la teoría de campos supersimétricos mediante el superespacio, [84], las funciones superdiferenciables se consideran como instrumentos de registro, de modo que las funciones coeficiente del desarrollo Z (o desarrollo en supercampos) se identifican con los campos físicos de tipo bosónico o fermiónico cuando afectan, respectivamente, a potencias pares o impares de las y_j. Restringiendo los argumentos a valores reales (lo que físicamente significa restringirse al espacio-tiempo), los campos físicos tienen valores reales, luego no pueden anti-conmutar, y la supersimetría no puede establecerse. Por eso las supervariedades H^∞ no son adecuadas desde el punto de vista físico (ver, por ejemplo, [28]); las variedades graduadas tienen también este problema.

1.5.3. Supervariedades G^∞. Las *funciones G^∞* se obtienen tomando $L' = L$, y fueron introducidas por Rogers [75]. Aunque las funciones G^∞ proporcionan campos físicos con la paridad adecuada, es decir, los campos fermiónicos anticonmutan, tienen serias inconsistencias. En particular, no es posible definir en ese caso derivadas respecto a las variables impares, básicamente porque el morfismo (5) no es inyectivo. En consecuencia, el haz de derivaciones del haz de funciones G^∞ no es localmente libre. Por esa razón, las supervariedades *à la Rogers* de tipo G^∞ no son manejables.

Como veremos más adelante, las funciones G^∞ juegan, sin embargo, un papel importante en el desarrollo de la geometría graduada porque toda G-supervariedad tiene una estructura subyacente de supervariedad G^∞. Además, las funciones G^∞ pueden describirse sin necesidad del desarrollo Z:

Proposición 1.19. [16] *Sea $U \subset B_L^{m,0}$ de la forma $U = (\sigma^{m,0})^{-1}(V)$ para algún abierto convexo V en $\mathbb{R}^m$. Una función diferenciable $f\colon U \to B_L$ es G^∞ si y sólo si su diferencial de Fréchet es lineal sobre $(B_L)_0$.*

1.5.4. Supervariedades GH^∞. Cuando se tiene que $L - L' \geq n$, las correspondientes funciones superdiferenciables se llaman *funciones GH^∞*. Incluyen, como caso particular, las funciones H^∞. Para ellas se verifica la Proposición 1.18, por lo que tienen propiedades muy interesantes. Verifican también una variante de la Proposición 1.19, a saber, una función diferenciable $f\colon U \to B_L$ (donde U es como en dicha Proposición) cuya restricción a V toma valores en $B_{L'}$ es GH^∞ si y sólo si su diferencial de Fréchet es $(B_L)_0$-lineal.

Para las funciones superdiferenciables GH^∞ sobre $B_L^{m,n}$ utilizaremos la notación $\mathcal{GH}_{L'}$ en lugar de $\mathcal{S}_{L'}$.

Si $(X, \mathcal{GH}_X)$ es una supervariedad GH^∞, para cada abierto U con coordenadas $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n)$ (las x^i son las variables pares y las y^α las impares), pueden definirse derivaciones

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \mid i = 1 \dots m,\ \alpha = 1 \dots n \right\} \tag{6}$$

que son secciones de $\mathcal{D}er(\mathcal{GH}_X)$.

Proposición 1.20. *$\mathcal{D}er(\mathcal{GH}_X)$ es un haz localmente libre de $\mathcal{GH}_X$-módulos graduados. Dado un abierto coordenado U, las derivaciones* (6) *forman una base de secciones de $\mathcal{D}er(\mathcal{GH}_X)$ en U.*

Las supervariedades GH^∞ tienen pues una de las propiedades fundamentales que debe tener cualquier supervariedad, que su derivaciones sean localmente libres, de modo que pueda establecerse un cáculo diferencial adecuado. Es necesario, además, que se tenga una noción razonable de espacio tangente y, con carácter más general, de fibrado vectorial. Sin embargo, no esposible desarrollar una teoría geométrica de fibrados vectoriales para una supervariedad GH^∞, y eso se debe a que el espacio de los valores que toman las funciones GH^∞ no es el mismo en unos puntos que en otros:

Sea $\mathcal{V}_z \subset B_L$ es espacio de los valores que toman en un punto $z \in B_L^{m,n}$ los gérmenes $f \in \mathcal{GH}_z$, de modo que

$$\mathcal{V}_z = \{a \in B_L | a = \widetilde{f(z)} \text{ para algún } f \in \mathcal{GH}_z\},$$

donde la tilde denota la evaluación de los gérmenes. Si $\mathfrak{L}_z$ es el ideal de $\mathcal{GH}_z$ formado por los gérmenes que se anulan en z, se tiene una sucesión exacta de

$B_{L'}$-módulos:

$$0 \to \mathfrak{L}_z \to \mathcal{GH}_z \to \mathcal{V}_z \to 0\,. \tag{7}$$

Hay que hacer notar que las funciones GH^∞ que son constantes, toman sólo valores en $B_{L'}$, luego no es claro que $B_L \hookrightarrow \mathcal{V}_z$, como sucede para las funciones C^∞ valoradas en B_L. De hecho, $\mathcal{V}_z$ depende esencialmente del punto z y, en general, no es libre como $B_{L'}$-módulo. Por ejemplo, en el caso de $B_L^{m,0}$, se tiene $\mathcal{V}_z = B_{L'}$ si $z \in \mathbb{R}^m$, pero $B_{L'} \subset \mathcal{V}_z \subset B_L$ con inclusiones estrictas para ciertos puntos z.

Este extraño fenómeno ocasiona muchos problemas a la hora de definir superfibrados vectoriales GH^∞, lo que obliga a considerar nuevas definiciones de supervariedades.

1.5.5. G-supervariedades. [5] La discusión anterior pone de manifiesto que no es sencillo encontrar una noción de función superdiferenciable que de lugar a una teoría de supervariedades que no tenga inconsistencias. En concreto, es difícil conseguir que se verifiquen los siguientes requerimientos:

1. El haz de derivaciones del haz estructural debe ser localmente libre;
2. las restricciones a argumentos reales de los coeficientes del desarrollo Z, o desarrollo en supercampos, deben tomar valores en un álgebra graduada conmutativa B;
3. debe haber una buena teoría de superfibrados vectoriales, en particular una buena noción de espacio tangente graduado.

Estas dificultades se superan introduciendo una nueva categoría de supervariedades, a las que llamamos *G-supervariedades*, caracterizadas localmente en términos de un haz $\mathcal{G}$ en $B_L^{m,n}$ que, en cierto sentido, es una "completación" de $\mathcal{GH}_{L'}$ (suponemos siempre que se tiene $L - L' \geq n$).

Más precisamente, se define un haz de B_L-álgebras graduadas conmutativas sobre $B_L^{m,n}$ por

$$\mathcal{G}_{L'} \equiv \mathcal{GH}_{L'} \otimes_{B_{L'}} B_L\,,$$

donde el producto tensorial es en el sentido de las álgebras graduadas.

Si $\mathcal{C}_L$ es el haz de funciones continuas sobre $B_L^{m,n}$ valoradas en B_L, se tiene un morfismo de evaluación $\delta\colon \mathcal{G}_{L'} \to \mathcal{C}_L$ extendiendo por aditividad la apliacación

$$\delta(f \otimes a) = fa\,. \tag{8}$$

Un hecho notable es que el haz $\mathcal{G}_{L'}$ es independiente de la elección de L':

Proposición 1.21. *Dado un segundo entero L'' tal que $L - L'' \geq n$, se tiene un isomorfismo natural de haces de B_L-álgebras graduadas conmutativas: $\mathcal{G}_{L'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{L''}$.*

Por tanto, es posible definir un haz canónico $\mathcal{G}$ de B_L-álgebras graduadas conmutativas sobre $B_L^{m,n}$, como la clase de isomorfismo de los haces $\mathcal{G}_{L'}$ donde L' es cualquier entero positivo tal que $L - L' \geq n$. También puede elegirse $L \geq 2n$ y tomar de una vez para todas L' como la parte entera de $L/2$ (cf. [76]). Del mismo puede puede definirse un haz $\hat{\mathcal{G}}$ de gérmenes de secciones de $\mathcal{G}$ que "no dependen de las variables impares" y se tiene:

$$\mathcal{G} \simeq \hat{\mathcal{G}} \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n\,.$$

como para el caso de ls funciones GH^∞.

En este caso, el análogo de la sucesión exacta (7) es

$$0 \to \mathfrak{L}_z \to \mathcal{G}_z \to B_L \to 0\,,$$

luego el espacio de valores de los gérmenes de secciones del haz $\mathcal{G}$ en todos los puntos $z \in B_L^{m,n}$ es siempre B_L, de modo que los inconvenientes de las superfunciones GH^∞ para definir una buena teoría de fibrados vectoriales no se presentan en el caso que nos ocupa.

Además, el haz $\mathcal{G}$ sobre $B_L^{m,n}$ mantiene las buenas propiedades de las derivaciones, es decir, pueden definirse secciones de $\mathcal{D}er(\mathcal{G})$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \mid i = 1\dots m,\ \alpha = 1\dots n\right\} \tag{9}$$

que generan $\mathcal{D}er(\mathcal{G})$, de modo que

Proposición 1.22. *$\mathcal{D}er(\mathcal{G})$ es un haz localmente libre de $\mathcal{G}$-módulos graduados.*

Llegamos así a la deficinición de G-supervariedad

Definición 1.23. [5, Chap. III, Def. 4.1] Una G-supervariedad de dimensión (m, n) es un espacio localmente anillado en B_L-álgebras graduadas $(X, \mathcal{A}_X)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. X es un espacio topológico paracompacto y Hausdorff;
2. $(X, \mathcal{A}_X)$ es localmente isomorfo a $(B_L^{m,n}, \mathcal{G})$;
3. si $\mathcal{C}^X_{B_L}$ es el haz de funciones continuas sobre X valoradas en B_L, existe un morfismo de haces de B_L-álgebras $\delta^X\colon \mathcal{A}_X \to \mathcal{C}^X_{B_L}$ localmente compatible con el morfismo de evaluación (8) y con los isomorfismos locales de la condición anterior.

Las G-supervariedades satisfacen todos los requerimientos señalados al inicio de esta parte, por lo que puede desarrollarse con ellas una geometría graduada satisfactoria [5]. Para terminar esta descripción sucinta, y de cara a la caracterización axiomática de las G-supervariedades, veamos como los anillos graduados de secciones del haz estructural de una G-supervariedad $(X, \mathcal{A}_X)$ pueden ser dotados de una topología, del mismo modo que los anillos de funciones diferenciables ordinarias. Para ello, dado un abierto $U \subseteq X$, consideramos la familia de seminormas $p_{L,K}\colon \mathcal{A}_X(U) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$p_{L,K}(f) = \max_{z\in K} \|\delta(P(f))(z)\|\,,$$

donde P varía en el espacio de operadores diferenciales sobre $\mathcal{A}_X(U)$ y K en el conjunto de las partes compactas de U.

Proposición 1.24. [5, Chap. III, Prop. 4.5] *Las seminormas $p_{L,K}$ dotan a $\mathcal{A}_X(U)$ de una estructura de álgebra graduada de Fréchet.*

1.6. Construcciones axiomáticas. En su artículo [78], Rothstein estableció cuatro axiomas que debe verificar cualquier noción sensata de supervariedad; sin embargo, la categoría de las supervariedades determinada por esos axiomas, a las que llamaremos R-supervariedades, es demasiado grande, en el sentido de que, contra lo afirmado en [78], no es cierto ni que cuando el álgebra graduada base es conmutativa esa categoría se reduce a la de variedades graduadas de Kostant, ni que cuando dicho álgebra es un álgebra exterior finito-dimensional, se reduce a la categoría de supervariedades que extienden a las supervariedades $\mathcal{G}^\infty$ en el sentido que explicaremos después. Veremos que es necesario introducir un quinto axioma – aunque el sistema de cinco axiomas resultantes puede reducirse a uno con cuatro – para evitar estos problemas [5, 6].

Para establecer los axiomas de Rothstein consideramos la siguiente definición: Sea X un espacio topológico paracompacto y Hausdorff y B un álgebra de Banach graduada conmutativa. Denotamos, del mismo modo que hemos hecho antes, $B^{m,n} = (B_0)^m \times (B_1)^n$; $\mathcal{C}_B^X$ será el haz de funciones continuas en X con valores en B.

Definición 1.25. Un R-superespacio (o superespacio de Rothstein) es un triple $(X, \mathcal{A}_X, \delta)$ donde $(X, \mathcal{A}_X)$ es un espacio anillado en B-álgebras graduadas y $\delta\colon \mathcal{A}_X \to \mathcal{C}_B^X$ es un morfismo, al que denominamos de "evaluación".

Denotaremos por $\sim$ la acción de δ de modo que $\tilde{f} = \delta(f)$. Un morfismo de R-superespacios es un morfismo de espacios anillados compatible con los morfismos de evaluación.

Fijemos una pareja (m, n) de enteros no negativos. Los axiomas de Rothstein son los siguientes:

Axioma 1. El haz $\mathcal{D}er^*\mathcal{A}_X$ es localmente libre. Cada punto $z \in X$ posee un abierto coordenado U con secciones $x^1, \dots, x^m \in \mathcal{A}_X(U)_0$, $y^1, \dots, y^n \in \mathcal{A}_X(U)_1$ tales que $\{dx^1, \dots, dx^m, dy^1, \dots, dy^n\}$ es una base graduada de $\mathcal{D}er^*\mathcal{A}_X(U)$.

Llamaremos a $(U, dx^1, \dots, dx^m, dy^1, \dots, dy^n)$ un *abierto coordenado* del R-superespacio. El axioma implica que $\mathcal{D}er\mathcal{A}_X$ es un haz localmente libre de $\mathcal{A}_X$módulos graduados generado localmente por las derivaciones $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ definidas como base dual de las dx^i y las dy^α.

Axioma 2. Si $(U, dx^1, \dots, dx^m, dy^1, \dots, dy^n)$ es un abierto coordenado, la aplicación $\psi\colon U \to B^{m,n}$ dada por $z \mapsto (\tilde{x}^1(z), \dots, \tilde{x}^m(z), \tilde{y}^1(z), \dots, \tilde{y}^n(z))$, es un homeomorfismo con un abierto de $B^{m,n}$.

Axioma 3. *(Existencia del desarrollo de Taylor)* Si $(U, dx^1, \dots, dx^m, dy^1, \dots, dy^n)$ es un abierto coordenado, para cada punto $z \in U$ y cada germen $f \in \mathcal{A}_z$ existen gérmenes $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in \mathcal{A}_z$ tales que

$$f = \tilde{f}(z) + \sum_{i=1}^{m} g_i\,(x^i - \tilde{x}^i(z)) + \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha\,(y^\alpha - \tilde{y}^\alpha(z))\,.$$

Axioma 4. Sea $\mathcal{P}(\mathcal{A}_X)$ el haz de los operadores diferenciales sobre $\mathcal{A}_X$ y $f \in \mathcal{A}_z$ un germen de $\mathcal{A}_X$ en un punto $z \in X$. Si $\widetilde{P(f)} = 0$ para todo $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_X)_z$, entonces $f = 0$.

Definición 1.26. Una R-supervariedad es un R-superespacio $(X, \mathcal{A}_X, \delta)$ que satisface los axiomas 1 a 4 anteriores.

Sea $\mathfrak{L}_z$ el ideal de $\mathcal{A}_z$ formado por los gérmenes $f \in \mathcal{A}_z$ que se anulan al evaluar en z, es decir, $\tilde{f}(z) = 0$.

Consideremos un nuevo axioma:

Axioma 3'. El ideal $\mathfrak{L}_z$ es finito-generado para todo punto $z \in X$.

Proposición 1.27. *Para los R-superespacios que son espacios localmente anillados (es decir, tales que los anillos $\mathcal{A}_z$ son todos locales), el axioma 3 puede reemplazarse por el axioma 3'.*

Para identificar quienes son las R-supervariedades, vamos a centrarnos en el caso $B = B_L$ [5] aunque los resultados que vamos a mencionar son ciertos para tipos más generales de álgebras de Banach [6]. De la discusión realizada sobre las supervariedades *à la Rogers* se desprende que ninguna de ellas verifica los axiomas de las R-supervariedades. Sin embargo, se observa que *toda G-supervariedad es una R-supervariedad*; se trata, por tanto, de identificar quienes son las R-supervariedades que son G-supervariedades.

Para ello, consideremos una R-supervariedad $(X, \mathcal{A}_X, \delta)$ y el haz $\mathcal{A}^\infty = \operatorname{Im}\delta \subset \mathcal{C}_L^X$ imagen del morfismo de evaluación. En [78] se asegura que $(X, \mathcal{A}^\infty)$ es una supervariedad G^∞, es decir, que las R-supervariedades son las supervariedades que *extienden* a las supervariedades G^∞; sin embargo, eso no es cierto pues los anillos de una R-supervariedad no tienen porqué ser completos respecto de su topología natural (que ahora introduciremos). El siguiente ejemplo clarifica este problema.

Ejemplo 1.28. Sea $B = \mathbb{R}$, $n = 0$ and $X = \mathbb{R}^m$. Si consideramos el haz $\mathcal{A} = \mathbb{R}[x^1, \dots, x^m]$ de las funciones polinómicas sobre $\mathbb{R}^m$ y el morfismo de evaluación trivial $\delta\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}_\mathbb{R}$, $\delta(f) = f$, resulta que $(X, \mathcal{A}, \delta)$ es una R-supervariedad de dimensión $(m, 0)$. Sin embargo $(X, \delta(\mathcal{A})) = (X, \mathbb{R}[x^1, \dots, x^m])$ no es una supervariedad G^∞ $(m, 0)$-dimensional, es decir, no es una variedad diferenciable ordinaria. $\triangle$

Si $(X, \mathcal{A}_X, \delta)$ es una R-supervariedad, los anillos de secciones $\mathcal{A}(U)$ en cada abierto $U \subset X$ tienen una topología de álgebras localmente convexas respecto de la familia de seminormas $p_{P,K}\colon \mathcal{A}_X(U) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$p_{P,K}(f) = \max_{z \in K} \|\widetilde{(L(f)}(z)\|\,,$$

donde P es un operador diferencial sobre $\mathcal{A}$ en U y $K \subset U$ es compacto. Podemos establecer ahora un axioma de completitud:

Axioma 5. Los anillos $\mathcal{A}_X(U)$ son completos respecto de dicha familia de seminormas para todo abierto U de X.

Los axiomas 4 y 5 equivalen a un nuevo axioma:

Axioma 6. Los anillos $\mathcal{A}_X(U)$ son completos y Hausdorff, es decir, álgebras de Freéchet graduadas, para todo abierto U de X.

Tenemos ahora

Definición 1.29. Una supervariedad R^∞ es una R-supervariedad que satisface además el axioma 5; de otro modo, es un R-superespacio que verifica los axiomas 1, 2, 3 y 6.

Puesto que estamos en el caso $B = B_L$, se tiene además:

Proposición 1.30. [6, Thm. 4.4] *Un R-superespacio es una supervariedad R^∞ si y sólo si verifica los axiomas 1,2,3' y 6. Además toda supervariedad R^∞ es un espacio localmente anillado.*

Sólo las supervariedades R^∞, y no todas las R-supervariedades, extienden supervariedades G^∞:

Proposición 1.31. *Si $(X, \mathcal{A}_X, \delta)$ es una supervariedad R^∞, entonces $(X, \mathcal{A}^\infty = \operatorname{Im}\delta)$ es una supervariedad G^∞.*

Terminamos con la descripción completa de las supervariedades R^∞:

Teorema 1.32. *Un R-superespacio es una supervariedad R^∞ si y sólo si es una G-supervariedad.*

Si consideramos como morfismos de supervariedades R^∞ sólo los morfismos de espacios localmente anillados, resulta:

Corolario 1.33. *Las categorías de las supervariedades R^∞ y de las G-supervariedades son equivalentes.*

Este resultado pone, por una parte, de manifiesto la importancia de las G-supervariedades puesto que son los únicos ejemplos de supervariedades que verifican la axiomática de Rothstein (modificada con el axioma de completitud) y por otra parte demuestra que dicha axiomática tiene modelos concretos.

2. Supervariedades en geometría algebraica

2.1. Generalidades. En esta sección consideraremos siempre superesquemas en el sentido de la Definición 1.2. Como ya hicimos para las supervariedades, los denotaremos por letras caligráficas $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ dejando la notación $X = (X, \mathcal{O}_X)$ para el esquema ordinario subyacente. Un buena referencia para la geometría algebraica de los superesquemas es [62].

Llamaremos *supercurvas* a los superesquemas de dimensión $(1, n)$. Aunque es mucha la geometría algebraica conocida de los superesquemas, vamos a centrarnos en cuestiones relativos a las supercurvas, que, como hemos dicho, tienen una gran importancia en teoría de cuerdas en relación con la integral de Polyakov. En particular vamos a considerar las denominadas *curvas supersimétricas* (Definición 2.6) y algunos problemas de móduli relacionados con ellas.

El supermóduli de las curvas supersimétricas ha sido ampliamente tratado en la literatura física, pero su estructura geométrica no fue considerada hasta [32] y algunas de sus propiedades globales no se han descubierto hasta [33], aunque la carta de Deligne [26] contiene información suficiente para construir globalmente un superespacio de móduli cuyo espacio subyacente es el stack algebraico de Deligne-Mumford's que es el móduli de las curvas lisas estables [27]. Las primeras construcciones analíticas son de naturaleza local [22, 57] (también [3, 21, 42]). Una descripción en coordenadas de un espacio de supermóduli se encuentra en [34].

2.2. Superdivisores sobre supercurvas. Los divisores positivos de grado p sobre una curva algebraica X son familias de p puntos de X, que pueden ser repetidos y donde no tenemos en cuenta el orden. Pueden verse como los puntos del *producto simétrico* $\mathrm{Sym}^p(X)$ de orden p de X, que no es otra cosa que el espacio de órbitas de la acción del grupo simétrico S_p en el producto cartesiano X^p; de este modo los divisores positivos de grado p tienen la estructura de una variedad algebraica $\mathrm{Div}_p(X)$, de gran importancia en el estudio de la geometría de las curvas, especialmente en la construcción de la variedad Jacobiana mediante el morfismo de Abel.

Desde el punto de vista físico, la variedad de divisores positivos de grado p en una curva compleja proyectiva lisa (una superficie de Riemann, vista como variedad real) es la variedad de soluciones de las ecuaciones vorticiales o de Bogonolmy [17, 41]. Los únicos trabajos equivalentes para los supervortices o extensiones supersimétricas de las ecuaciones de Bogonolmy son [59] y [31], en el segundo de los cuales se da la estructura de la supervariedad de superdivisores positivos o supervórtices sobre una supercurva.

La identificación de los divisores positivos de orden p con los puntos del producto simétrico $\mathrm{Sym}^p(X)$ se realiza mediante el *divisor universal.* Se trata de un divisor positivo relativo Z de grado p sobre $X \times \mathrm{Sym}^p(X) \to \mathrm{Sym}^p(X)$ (es decir, una familia plana divisores positivos en las fibras de ese morfismo), cuya fibra sobre un punto $(x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{Sym}^p(X)$ es el divisor $x_1 + \cdots + x_p$ definido por él. Resulta entonces que para cada esquema S, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Sym}^p(X)) &\to \mathrm{Div}(X \times S/S) \\ \psi &\mapsto \psi^*(Z) \end{aligned} \tag{10}$$

es un isomorfismo, donde $\mathrm{Div}(X \times S/S)$ son los divisores positivos relativos de grado p sobre $X \times S \to S$. Es decir, todo divisor positivo se obtiene como imagen inversa del divisor universal. La propiedad (10) se expresa también diciendo que *el producto simétrico es un espacio de móduli fino para los divisores positivos.*

2.2.1. Productos simétricos de supercurvas. Para poder extender la propiedad universal (10) a las supercurvas, empecemos por considerar su producto simétrico.

Si $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ es una supercurva lisa, el grupo simétrico S_p opera de modo natural en el producto cartesiano $\mathcal{X}^p = (X^p, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\otimes p})$ dando lugar a un superespacio de órbitas $\mathrm{Sym}^p(\mathcal{X}) = (\mathrm{Sym}^p(X), \mathcal{O}^p)$, con $\mathcal{O}^p = (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\otimes p})^{S_p}$.

Teorema 2.1. [31] *Sea $\mathcal{X}$ una supercurva lisa de dimensión $(1,n)$. El superespacio $\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X})$ es un superesquema si y sólo si $n=1$, es decir, si y sólo si $\dim\mathcal{X}=(1,1)$.*

2.2.2. Superdivisores. Vayamos ahora a una adecuada noción de supervisor para una supercurva $\mathcal{X}$.

Definición 2.2. [10] Sea $\mathcal{X}$ una supercurva. Un superdivisor positivo es un sub-superesquema cerrado $\mathcal{Z}=(Z,\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ de codimensión $(1,0)$. El grado de $\mathcal{Z}$ es el grado del divisor $Z\hookrightarrow X$ de la curva suyacente.

Por tanto, los puntos no son superdivisores de grado 1, pues tienen codimensión $(1,1)$. Sin embargo, los superdivisores tienen relación con los puntos de otra curva, como veremos más adelante.

La defición de superdivisor relativo de grado p para un morfismo $\mathcal{X}\times\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ es similar a la de divisor relativo. Serán sub-superesquemas cerrados $\mathcal{Z}\hookrightarrow\mathcal{X}\times\mathcal{S}$ de codimensión $(1,0)$ cuya restricción a $X\times\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ es una familia plana de divisores de grado p en X parametrizada por el superesquema $\mathcal{S}$.

Supongamos en lo que queda de este párrafo que $\mathcal{X}$ es una supercurva de dimensión $(1,1)$. En este caso, se tiene $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}\simeq\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{L}$, siendo $\mathcal{L}$ un haz invertible de $\mathcal{O}_X$-módulos, o sea, $\mathcal{X}$ es escindido en el sentido de la Definición 1.3.

Podemos entonces considerar la supercurva $\mathcal{X}^c=(X,\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{L}^c)$ donde $\mathcal{L}^c=\kappa_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^{-1}$ siendo κ_X el haz canónico o de diferenciales sobre X. Esta curva se denomina *supercurva de fermiones conjugados o de superdivisores positivos de grado 1 sobre $\mathcal{X}$* [63]. La razón de esta terminología es la siguiente:

Sea $\mathcal{T}$ un superesquema afín definido por un haz de álgebras graduadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{Z}$ un superdivisor relativo de grado 1 sobre $X\times\mathcal{T}\to\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}\simeq\mathcal{B}\oplus\bar{\mathcal{L}}$, donde $\bar{\mathcal{L}}$ es la imagen de $\mathcal{L}\otimes_k\mathcal{B}$ en $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ de donde se deduce que $\mathcal{Z}$ está caracterizado por un morfismo $f\colon\mathcal{L}\to\mathcal{O}_X$ y una derivación $\Delta\colon\mathcal{O}_X\to\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{B}_1$. Como Δ puede ser entendida como un elemento de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\kappa_X,\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{B}_1)\simeq\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}^c,\mathcal{B}_1)$, la pareja (f,Δ) es equivalente a un morfismo de anillos graduados $g\colon\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{L}^c\to\mathcal{B}$. Lo mismo sucede si $\mathcal{T}$ no es afín, luego:

Proposición 2.3. [31] *La supercurva $\mathcal{X}^c$ representa el functor de superdivisores de grado 1 sobre $\mathcal{X}$. De modo más preciso, existe un superdivisor relativo de grado 1 "universal" $\mathcal{Z}_1^u$ en $\mathcal{X}\times\mathcal{X}^c\to\mathcal{X}^c$ tal que el morfismo de functores:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{X}^c)&\to\operatorname{Div}^1_{\mathcal{S}}(\mathcal{X}\times\mathcal{S})\\ \phi&\mapsto(1\times\phi)^{-1}(\mathcal{Z}_1^u)\,,\end{aligned}$$

es un isomorfismo functorial.

Localmente, si (z,θ) son coordenadas locales graduadas en $\mathcal{X}$, la ecuación local del superdivisor universal de grado 1 $\mathcal{Z}_1^u$ en $\mathcal{X}\times\mathcal{X}^c$ es

$$z_1-z_2-\theta\otimes\theta^c\,, \tag{11}$$

donde $z_1=z\otimes 1$, $z_2=1\otimes z$ y $\theta^c=\omega_\theta\cdot dz$, siendo ω_θ la base dual de θ en $\mathcal{L}^{-1}$.

Para superdivisores de grado superior, podemos definir

Definición 2.4. El superesquema de superdivisores positivos de grado p sobre $\mathcal{X}$ es el producto simétrico $\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X}^c)$ de la curva $\mathcal{X}^c$ de fermiones conjugados de $\mathcal{X}$.

El superdivisor universal de grado p, $\mathcal{Z}_p^u$, se construye del siguiente modo: se consideran las proyecciones

$$\begin{aligned}\pi_i\colon \mathcal{X}\times\mathcal{X}^c\times\overset{p}{\dots}\times\mathcal{X}^c &\to \mathcal{X}\times\mathcal{X}^c\\ (x,x_1^c,\dots,x_p^c) &\mapsto (x,x_i^c)\end{aligned}$$

y el superdivisor $\mathcal{Z}=\pi_1^*(\mathcal{Z}_1^u)+\dots+\pi_p^*(\mathcal{Z}_1^u)$. Si $\pi\colon \mathcal{X}\times\mathcal{X}^c\times\overset{p}{\dots}\times\mathcal{X}^c\to\mathcal{X}\times\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X}^c)$ es la proyección natural, $\mathcal{Z}_p^u$ es el superdivisor relativo de grado p en $\mathcal{X}\times\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X}^c)\to\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X}^c)$ caracterizado por la fórmula $\pi^*(\mathcal{Z}_p^u)=\mathcal{Z}$. Resulta así:

Teorema 2.5. *El producto simétrico* $\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X}^c)$ *parametriza los superdivisores positivos de grado p sobre $\mathcal{X}$.*

De modo más formal podemos decir que la aplicación:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(\mathcal{S},\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X}^c)) &\to \operatorname{Div}^p_{\mathcal{S}}(\mathcal{X}\times\mathcal{S})\\ f &\mapsto (1\times f)^{-1}(\mathcal{Z}_p^u)\end{aligned}$$

es un isomorfismo functorial para todo superesquema $\mathcal{S}$.

2.3. Curvas supersimétricas o curvas-SUSY.

La definición de *curva supersimétrica* es:

Definición 2.6. Una curva supersimétrica o curva-SUSY es una supercurva de dimensión $(1,1)$ dotada de una distribución totalmente no integrable, es decir, de un submódulo libre $\mathcal{D}$ de rango $(0,1)$ del haz tangente $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}=\mathcal{D}er(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ tal que la composición

$$\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}\xrightarrow{[\ ,\ ]}\mathcal{T}_{\mathcal{X}}\to\mathcal{T}_{\mathcal{X}}/\mathcal{D}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-módulos (ver, por ejemplo, [57]).

Una definición similar da lugar a la noción de curva-SUSY relativa.

Si $\mathcal{X}=(X,\mathcal{O}_{\mathcal{X}},\mathcal{D})$ es una curva-SUSY, X puede recubrirse por abiertos coordenados U con coordenadas locales (z,θ) de forma que $\mathcal{D}$ está generado localmente por

$$\frac{\partial}{\partial\theta}+\theta\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Se dice entonces que (z,θ) son*coordenadas conformes.*

Se tiene un isomorfismo natural $\mathcal{D}^*\xrightarrow{\sim}\operatorname{Ber}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ y una diferencial "bereziniana" $\partial\colon\Omega^1_{\mathcal{X}}\to\mathcal{D}^*\xrightarrow{\sim}\operatorname{Ber}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, que es la proyección inducida por la inmersión $\mathcal{D}\hookrightarrow\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$. En coordenadas conformes, ∂ se expresa como

$$\partial(df)=\left[dz\otimes\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\cdot D(f)\,,$$

donde $dz\otimes\frac{\partial}{\partial\theta}$ denota la base local del bereziniano determinada por (z,θ).

Las curvas-SUSY tienen una importante propiedad: son isomorfas a sus curvas de fermiones conjugados. En efecto, se tienen isomorfismos

$$\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}\mathcal{O}_X\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}^{-1}\,,\quad \mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}\xrightarrow{\sim}\kappa_X\,,$$

y el segundo de ellos – que es lo que se denomina una *estructura espín* sobre la curva X – puede ser visto como un isomorfismo $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^c$. En consecuencia,

Proposición 2.7. [31, Thm. 4] *Sea $\mathcal{X}$ una supercurva de dimensión $(1,1)$. $\mathcal{X}$ es una curva-SUSY si y sólo si existe un isomorfismo $\mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}^c$ entre $\mathcal{X}$ y la supercurva de superdivisores positivos de grado 1 sobre ella que induce la identidad en la curva ordinaria subyacente X. Además hay una correspondencia biunívoca entre tales isomorfismos y las estructuras espín sobre X.*

Resulta así, de acuerdo con la Proposición 2.3, que para una curva-SUSY, la propia curva es el espacio de móduli de los superdivisores positivos de grado 1, como ya había demostrado Manin [63] por otros medios. El superdivisor universal se identifica con la *superdiagonal* de Manin, que vamos a describir: Sea $\mathcal{X}$ una curva-SUSY e $\mathcal{I}_\Delta$ el ideal de la inmersión diagonal $\delta\colon \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. El núcleo de la composición $\mathcal{I}_\Delta \to \mathcal{I}_\Delta/\mathcal{I}_\Delta^2 \simeq \delta_*\Omega^1_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ber}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ es un ideal homogéneo de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}$, luego define un sub-superesquema cerrado Δ^s de codimensión $(1,0)$, al que se denomina *superdiagonal* de $\mathcal{X}$. En coordenadas conformes, su ecuación local es:

$$z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2 = 0\,,$$

donde $z_1 = z \otimes 1$ y $z_2 = 1 \otimes z$ como antes. Si comparamos esta ecuación con (11), resulta que a través del isomorfismo $\mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}^c$, la superdiagonal se corresponde con el superdivisor universal $\mathcal{Z}_1^u$, como habíamos anunciado. Para superdivisores de grado mayor se tiene un resultado análogo:

Teorema 2.8. *Si $\mathcal{X}$ es una curva-SUSY, el producto simétrico $\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X})$ parametriza los superdivisores positivos de grado p sobre $\mathcal{X}$.*

En resumen, sólo para las curvas-SUSY, las familias no ordenadas de p puntos (los puntos de $\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X})$) son equivalentes a los superdivisores de grado p (los puntos de $\operatorname{Sym}^p(\mathcal{X}^c)$).

2.3.1. Punturas de Neveu-Schwarz. Hemos visto que los superdivisores de grado 1 de una curva-SUSY no son sus puntos. Un punto está definido en coordenadas conformes por ecuaciones del tipo $(z,\theta) \mapsto (z_0,\theta_0)$. Por tanto, impone una condición par y una condición impar a los automorfismos permitidos en un entorno. El álgebra de Lie de los supercampos conformes (los que dejan invariante la distribución $\mathcal{D}$) cambia y dentro del formalismo de los operadores, el cambio se interpreta como la inserción de un operador vórtice en el punto. Tiene también el efecto de aumentar en uno tanto la dimensión par como la impar del móduli de curvas-SUSY, como veremos más adelante (Thm. 2.17). Estas N-punturas son conocidas en la literatura física como N-punturas de Neveu-Schwarz [42].

La generalización natural a curvas-SUSY relativas es definir una N-puntura en una familia $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de curvas SUSY, como una familia ordenada $(s_1,\dots,s_N)$ de secciones de $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

2.4. Móduli de curvas-SUSY y sus propiedades. Como ya hemos comentado, el móduli de curvas-SUSY parece ser el adecuado espacio de integración para la medida de Polyakov en el caso supersimétrico, es decir, para los cálculos de tipo perturbativo en la teoría de la supercuerda. Esos cálculos se hacen también por integración sobre el superespacio de móduli de curvas-SUSY con punturas (de Neveu-Scharwz) [30, 86].

Vamos a describir una construcción global de dicho móduli.

2.4.1. Móduli de curvas algebraicas. En el caso de curvas ordinarias (serán siempre lisas sobre un cuerpo fijado k) el problema de móduli asociado está determinado por la noción de *curva relativa de género g* o *familia plana de curvas de género g parametrizadas por un esquema S*, entendiendo por tal un morfismo plano de esquemas $X \to S$ cuyas fibras son curvas (lisas) de género g. De este modo se define un functor $\mathbf{M}_g$ que asocia a cada esquema S el conjunto $\mathbf{M}_g(S)$ de las familias planas de ese tipo parametrizadas por él. Tomando $S = \operatorname{Spec} k$ como un punto, resulta que $\mathbf{M}_g(\operatorname{Spec} k)$ es el conjunto de las curvas de género g.

Idealmente, un esquema $\mathfrak{M}_g$ sería un espacio de móduli fino si estuviera dotado de una curva relativa $\xi \equiv \mathfrak{X}_g \to \mathfrak{M}_g$ de género g de modo que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(S, \mathfrak{M}_g) &\to \mathbf{M}_g(S) \\ \phi &\mapsto \phi^*(\xi) = S \times_\phi \mathfrak{X}_g \to S \end{aligned} \tag{12}$$

fuera un isomorfismo functorial para todo esquema S. En el lenguaje de Grothendieck, un esquema de móduli fino sería un esquema que *representa el functor $\mathbf{M}_g$ de las curvas de género g*, es decir, cuyos "puntos con valores en un esquema cualquiera" fueran las curvas relativas parametrizadas por ese esquema, de modo que cualquiera de esas curvas relativas se obtiene como imagen inversa de la "curva universal de género g", $\mathfrak{X}_g$. En particular, los puntos (racionales) del espacio de móduli fino serían el conjunto $\mathbf{M}_g(\operatorname{Spec} k)$ de las curvas de género g, que tendría así una estructura de esquema.

Pero una tal curva universal no puede existir y su inexistencia se deriva de que hay curvas que tienen automorfismos (no triviales); los tienen todas las de género menor o igual que 2 y algunas para género superior. Como tantas veces sucede en matemáticas, eso no nos debe limitar; del mismo modo que cuando no podemos restar dentro de los números naturales llamamos número entero a una clase de diferencias de naturales, basta ampliar la noción de esquema a una noción más general. En este caso llamamos *stack algebraico* al functor[1], de modo que ahora $\mathbf{M}_g$ ya tiene una estructura algebraica más general que la de un esquema, es un stack algebraico. Las propiedades de los stacks y su diferentes tipos pueden consultarse, por ejemplo, en [27, 43, 56, 82, 53, 2].

Así pues, el móduli fino de las curvas de género g es un stack algebraic $\mathbf{M}_g$ y "no existe como esquema". Sin embargo, se tiene

Teorema 2.9. *Existe un espacio de "móduli grosero", $\mathfrak{M}_g$, que es un verdadero esquema* [27]*, cuyos puntos (racionales) son las curvas de género g.*

[1]En realidad los stacks algebraicos son un determinado tipo, aunque bastante general, de esos functores y $\mathbf{M}_g$ es, de hecho, uno de ellos.

Este esquema "correpresenta" el functor de móduli, en un sentido que no vamos a precisar aquí. Nos conformaremos con observar que la curva stack universal sobre $\mathbf{M}_g$ induce un morfismo de stacks algebraicos $\mathbf{M}_g \to \mathfrak{M}_g$ que sobre los puntos de $\mathfrak{M}_g$ definidos por curvas con automorfismos no es un isomorfismo local, se comporta localmente como el cociente por el grupo de automorfismos.

Un modo de conseguir un espacio de móduli fino es fijar estructuras adicionales que no se preserven por ningún automorfismo no trivial. En el caso de las curvas de género g, se fija un *estructura de nivel* n, es decir, un isomorfismo entre el grupo de puntos de n-torsión de la Jacobiana de la curva X y el grupo de cohomología $H^1(X, \mathbb{Z}_n)$, lo que sirve a nuestro propósito ya que, por el Lema de Serre [68], si $n \geq 3$, el único automorfismo de la curva que preserva una estructura de nivel n es la identidad.

Si se generaliza para una familia plana de curvas $X \to S$ la noción de estructura de nivel n como un isomorfismo de grupos entre la n-torsión de la Jacobiana relativa y el grupo $\Gamma(S, R^1\pi_*\mathbb{Z}_n)$, resulta:

Teorema 2.10. *Para $g \geq 2$ y $n \geq 3$, el esquema $\mathfrak{M}_g$ es un espacio de móduli fino para las curvas de género g con una estructura fijada de nivel n.*

Una discusión similar se aplica al caso de curvas con N-puntos prefijados o *curvas con punturas*. Se tiene un stack algebrico $\mathbf{M}_{g,N}$ que es el móduli de las curvas de género g con N-punturas, un esquema de móduli grosero $\mathfrak{M}_{g,N}$ y si se fija un estructura de nivel n, $\mathfrak{M}_{g,N}$ es un móduli fino cuando $g \geq 2$ y $n \geq 3$.

2.4.2. Móduli de curvas espín. Puesto que las curvas-SUSY son curvas espín (Porposición 2.7), antes de considerar el problema de móduli para las curvas-SUSY en el mundo de los superesacios, vamos a trata el problema del móduli de las curvas espín en el mundo de los esquemas, en geometría algebraica ordinaria.

Para simplificar la exposición, supondremos siempre $g \geq 2$, $n \geq 3$ y que se consideran curvas lisas de género g con una estructura fijada de nivel n.

Si definimos una estructura espín sobre una familia $X \to Y$ de curvas como un haz de línea $\mathcal{L}$ en X con un isomorfismo $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \overset{\sim}{\to} \kappa_{X/Y}$, no puede existir un esquema de móduli fino para el functor que asocia a cada esquema S el conjunto de estructuras espín relativas sobre $X \times_Y S \to S$ porque dicho functor no verifica las propiedades del functor de puntos de ningún esquema: no está definido por condiciones "locales" para ninguna de las topologías usuales, o en palabras más técnicas, no es un haz para ninguna de ellas.

Es un problema de naturaleza similar al que tiene el functor de Picard, cuyo espacio de móduli es la variedad Jacobiana. Vamos a describir brevemente este problema que nos dará la pista sobre como actuar para construir el móduli de curvas espín.

Dada una curva relativa, $X \to Y$, puede considerarse el functor que asocia a un "Y-esquema" $f\colon T \to Y$ el grupo cociente $\operatorname{Pic}(X \times_Y T)/f^* \operatorname{Pic} T$ de las clases de equivalencia de haces invertibles sobre $X \times_Y T$ módulo pullbacks de haces invertibles sobre T. El *functor de Picard* relativo se define como su "haz asociado para la topología étale" [46] y el *grupo de Picard relativo* como $\operatorname{Pic}(X/Y) = \mathcal{P}ic_{X/Y}(Y)$.

Para comprender lo que significa el tomar el haz asociado para la topología étale, notemos que si bien las clases $[\mathcal{L}]$ de haces invertibles en X definen elementos $\gamma = [\mathcal{L}]$ del grupo de Picard $\operatorname{Pic}(X/Y)$, no todas las secciones $\gamma \in \operatorname{Pic}(X/Y)$ son de esa forma; para cada una de ellas existe, sin embargo, un "revestimiento étale" $p\colon Y' \to Y$ tal que $p^*\gamma = [\mathcal{L}']$ para un haz invertible $\mathcal{L}'$ en $X \times_Y Y'$.

Los functores de Picard $\mathcal{P}ic^d_{X/Y}$ de las "clases de haces invertibles de grado relativo d" son representables, es decir, existe un esquema de móduli fino $J^d(X/Y) \to Y$, la *Jacobiana relativa de grado d*, y una clase universal $\Upsilon_d \in \operatorname{Pic}^d(X \times_Y J^d(X/Y)/J^d(X/Y))$ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(T, J^d(X/Y)) &\to \operatorname{Pic}^d(X \times_Y T/T) \\ \phi &\mapsto \phi^*\Upsilon_d \end{aligned}$$

es un isomorfismo functorial para todo Y-esquema $T \to Y$ [46]. Siguiendo esa idea se define:

Definición 2.11. Una curva espín relativa sobre un esquema Y es una curva relativa $X \to Y$ dotada de una "clase espín de haces invertibles" $\Upsilon \in \operatorname{Pic} X/Y$ tal que $\Upsilon^2 = [\kappa_{X/Y}]$.

Teorema 2.12. [32] *Existe un esquema de móduli fino $S\mathfrak{M}_g$ para las curvas espín y una curva espín universal $S\mathfrak{X}_g \to S\mathfrak{M}_g$ con una clase espín universal $\Upsilon_s \in \operatorname{Pic}(S\mathfrak{X}_g/S\mathfrak{M}_g)$. El esquema de móduli $S\mathfrak{M}_g$ es una variedad casi-proyectiva de dimensión $3g-3$.*

La clase espín universal no está definida por un haz de línea, pero existe un revestimiento étale $p\colon S\mathfrak{U} \to S\mathfrak{M}_g$ tal que $\Upsilon = [\mathcal{L}]$ con $\mathcal{L}^2 = \kappa_s$ con $\kappa_s = p^*\kappa_{S\mathfrak{X}_g/S\mathfrak{M}_g}$; escribimos entonces $\mathcal{L} = \kappa_s^{1/2}$. Además puede tomarse $S\mathfrak{U}$ afín.

El móduli $S\mathfrak{M}_g$ tiene dos componentes, correspondientes a las estructuras espín pares e impares, teniendo en cuenta que se dice que una estructura espín $\mathcal{L}$ en una curva X es *par* o *impar* de acuerdo con la paridad de la dimensión de $H^0(X, \mathcal{L})$. Si fijamos N-punturas de Neveu-Schwarz, se tiene análogamente:

Teorema 2.13. [32] *El producto fibrado $S\mathfrak{M}_{g,N} = S\mathfrak{X}_g^N$ sobre $S\mathfrak{M}_g$ de N copias de la curva espín universal, es un esquema de móduli fino para las curvas espín con N-punturas. Además $\widetilde{S\mathfrak{X}_{g,N}} = S\mathfrak{X}_g \times_{S\mathfrak{M}_g} S\mathfrak{M}_{g,N} \to S\mathfrak{M}_{g,N}$ es la curva espín universal con N-punturas.*

2.4.3. Móduli de curvas SUSY. Procediendo como en los problemas de móduli que hemos considerado antes, es posible definir un "superstack algebraico" $\mathbf{SM}_g$ de las curvas supersimétricas de género g. En este caso, no puede existir un superesquema de móduli, aunque fijemos estructuras de nivel n en la curva ordinaria subyacente, porque *toda curva supersimétrica $\mathcal{X}$ tiene un automorfismo no trivial*: Como $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L}$, el automorfismo que opera por la identidad en $\mathcal{O}_X$ y por la multiplicación por -1 en $\mathcal{L}$ es un automorfismo no trivial de $\mathcal{X}$.

Eso pone de manifiesto que para curvas SUSY el problema de móduli tiene una naturaleza "stacky" intrínsecamente asociada a la definición de curva supersimétrica, luego un espacio de móduli no puede ser construido simplemente a partir de espacios de móduli de curvas ordinarias.

Consideremos un revestimiento étale afín $p\colon S\mathfrak{U} \to S\mathfrak{M}_g$ del móduli de curvas espín tal que $\Upsilon = [\mathcal{L}]$ con $\mathcal{L} = \kappa_s^{1/2}$; nos referiremos a $S\mathfrak{U}$ como a un *revestimiento trivializante* del móduli de curvas espín. Sea $\pi\colon p^*\mathfrak{X}_{g,s} \to S\mathfrak{U}$ la restricción a $S\mathfrak{U}$ de la curva espín universal.

Definición 2.14. El superesquema de los gravitinos espín es el superesquema de dimensión $(3g-3, 2g-2)$ dado por $S\mathcal{U} = (S\mathfrak{U}, \Lambda\pi_*\kappa_s^{3/2})$.

El superesquema de los gravitinos espín sobre un revestimiento trivializante de $S\mathfrak{M}_g$ es el candidato natural para ser un "móduli local" para las curvas-SUSY. Usando una generalización para el caso graduado de la teoría de Kodaira-Spencer [54], LeBrun and Rothstein demostraron [57] que de hecho es así.

La estructura global del "superstack algebraico" de móduli $\mathbf{SM}_g$ de las curvas supersimétricas está dado por el siguiente resultado:

Teorema 2.15. [32, Thm. 27] *El functor* $\mathbf{SM}_g$ *es el cociente de la "relación de equivalencia étale":*

$$\mathcal{R} = (S\mathcal{U} \times_{S\mathfrak{M}_g} S\mathcal{U}) \rightrightarrows S\mathcal{U} \to \mathbf{SM}_g\,,$$

en la categoría de haces sobre los superesquemas.

Observamos así como, de hecho, el móduli de las curvas supersimétricas no puede construirse directamente a partir del móduli de curvas espín. Tiene, sin embargo, una estructura más rica que la de superstack algebraico. Para explicarlo mejor, volvamos a la geometría algebraica no graduada. En esa situación clásica, los stacks algebraicos que son cociente de una relación de equivalencia étale de esquemas fueron introducidos por Artin bajo la denominación de *espacios algebraicos* [2]; son generalizaciones naturales de los esquemas y tienen una geometría muy rica [53]. Para hacernos un idea de su importancia, consideremos el caso de los esquemas sobre el cuerpo de los números complejos. En esta situación, el cociente de una relación de equivalencia étale de esquemas (ahora étale significa simplemente isomorfismo local analítico) existe siempre como espacio analítico complejo, de modo que los espacios algebraicos de Artin son ejemplos de espacios analíticos; pues bien, los espacios algebraicos son exactamente los espacios analíticos con "suficientes funciones meromorfas", es decir, aquellos cuyo cuerpo de funciones meromorfas tiene grado de trascendencia igual a la dimensión [66].

Siguiendo esa idea, definimos *superespacio algebraico* como un cociente de una relación de equivalencia étale de superesquemas [32, Def. 28]. Los superespacios algebraicos tienen espacios algebraicos subyacentes y son una generalización natural de los superesquemas. Podemos ahora reformular el Teorema 2.15 como:

Teorema 2.16. *Existe un superespacio algebraico* $\mathbf{SM}_g$ *que es un espacio de móduli fino para el functor de las curvas-SUSY. Su dimensión es* $(3g-3, 2g-2)$.

El resultado, que caracteriza el stack algebraico $\mathbf{SM}_g^N$ del móduli de las curvas-SUSY con N-punturas, es:

Teorema 2.17. [32, Thm. 27] *El functor* $\mathbf{SM}_g^N$ *de móduli de curvas-SUSY con* N*-punturas (de Neveu-Schwarz) es representable por un superespacio algebraico. Su dimensión es* $(3g-3+N, 2g-2+N)$.

Puesto que el espacio algebraico de Artin subyacente a $\mathbf{SM}_g^N$ es el esquema de móduli $S\mathfrak{M}_g$ de las curvas espín, $\mathbf{SM}_g^N$ tiene, al menos, dos componentes, a las que llamaremos *par* e *impar*, correspondientes a las estructuras espín pares e impares, respectívamente.

La estructura del móduli de curvas-SUSY sigue siendo objeto de mucho interés. Uno de las cuestiones principales es decidir si $\mathbf{SM}_g$ es escindido o al menos proyectado en el mismo sentido de la Definición 1.3 para los superesquemas. Ahora, ser proyectado significaría que la immersión natural del móduli de curvas espín $S\mathfrak{M}_g$ en $\mathbf{SM}_g$ tiene un retracto. Donagi y Witten han dado respuesta con los siguientes resultados:

Teorema 2.18. [33, Thm. 1.1] *Para* $g \geq 5$*, el móduli de curvas-SUSY* $\mathbf{SM}_g$ *no es proyectado (luego tampoco escindido).*

En el caso del superespacio algebraico $\mathbf{SM}_g^N$ de móduli de las curvas-SUSY con punturas, se tiene:

Teorema 2.19. [33, Thms. 1.2, 1.3] $\mathbf{SM}_g^1$ *no es proyectado en la componente par. Si* $g-1 \geq N-1 > 0$*,* $\mathbf{SM}_g^N$ *no es proyectado en las componentes par e impar cuando* g *es impar, mientras que si* g *es par, no es proyectado en la componente par.*

Desde el punto de vista físico, el hecho de que $\mathbf{SM}_g$ no sea proyectado significa que no puede seguirse la estrategia que sugeriría la teoría perturbativa de cuerdas consistente en integrar sobre $\mathbf{SM}_g$ integrando primero sobre las fibras de su proyección sobre $S\mathfrak{M}_g$ [30], y que es la usual en el caso $g = 2$.

Referencias

[1] M. Artin, *The implicit function theorem in algebraic geometry*, in Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, pp. 13–34.

[2] ———, *Algebraic spaces*, Yale University Press, New Haven, Conn., 1971. A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1969, Yale Mathematical Monographs, 3.

[3] M. A. Baranov and A. S. Schwarz, *On the multiloop contribution to the string theory*, Internat. J. Modern Phys. A, 2 (1987), pp. 1773–1796.

[4] C. Bartocci, U. Bruzzo, and D. Hernández Ruipérez, *A remark on a new category of supermanifolds*, J. Geom. Phys., 6 (1989), pp. 509–516.

[5] ———, *The geometry of supermanifolds*, vol. 71 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[6] C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernández Ruipérez, and V. G. Pestov, *Foundations of supermanifold theory: the axiomatic approach*, Differential Geom. Appl., 3 (1993), pp. 135–155.

[7] C. Bartocci, U. Bruzzo, and G. Landi, *Geometry of standard constraints and Weil triviality in supersymmetric gauge theories*, Lett. Math. Phys., 18 (1989), pp. 235–245.

[8] M. Batchelor, *The structure of supermanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 253 (1979), pp. 329–338.
[9] ———, *Two approaches to supermanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 258 (1980), pp. 257–270.
[10] M. Batchelor and P. Bryant, *Graded Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys., 114 (1988), pp. 243–255.
[11] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Renormalization of gauge theories*, Ann. Physics, 98 (1976), pp. 287–321.
[12] ———, *Renormalizable theories with symmetry breaking*, in Field theory, quantization and statistical physics, vol. 6 of Math. Phys. Appl. Math., Reidel, Dordrecht, 1981, pp. 3–32.
[13] F. A. Berezin, *The method of second quantization*, Translated from the Russian by Nobumichi Mugibayashi and Alan Jeffrey. Pure and Applied Physics, Vol. 24, Academic Press, New York, 1966.
[14] F. A. Berezin and G. I. Kac, *Lie groups with commuting and anticommuting parameters*, Mat. Sb. (N.S.), 82 (124) (1970), pp. 343–359.
[15] F. A. Berezin and D. A. Leĭtes, *Supermanifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 224 (1975), pp. 505–508.
[16] C. P. Boyer and S. Gitler, *The theory of G^∞-supermanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 285 (1984), pp. 241–267.
[17] S. B. Bradlow, *Vortices in holomorphic line bundles over closed Kähler manifolds*, Comm. Math. Phys., 135 (1990), pp. 1–17.
[18] U. Bruzzo and R. Cianci, *Variational calculus on supermanifolds and invariance properties of superspace field theories*, J. Math. Phys., 28 (1987), pp. 786–791.
[19] U. Bruzzo and G. Landi, *Simple proof of Weil triviality in supersymmetric gauge theories*, Phys. Rev. D (3), 39 (1989), pp. 1174–1178.
[20] R. Cianci, M. Francaviglia, and I. Volovich, *Variational calculus and Poincaré-Cartan formalism on supermanifolds*, J. Phys. A, 28 (1995), pp. 723–734.
[21] J. D. Cohn, *Modular geometry of superconformal field theory*, Nuclear Phys. B, 306 (1988), pp. 239–270.
[22] L. Crane and J. M. Rabin, *Super Riemann surfaces: uniformization and Teichmüller theory*, Comm. Math. Phys., 113 (1988), pp. 601–623.
[23] M. de León and P. L. García, *Variational integrators in nonholonomic and vakonomic mechanics [foreword]*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM, 106 (2012), pp. 47–48.
[24] M. de León, F. Jiménez, and D. Martín de Diego, *Hamiltonian dynamics and constrained variational calculus: continuous and discrete settings*, J. Phys. A, 45 (2012), pp. 205204, 29.
[25] M. de León, J. C. Marrero, and D. Martín de Diego, *Vakonomic mechanics versus nonholonomic mechanics: a unified geometrical approach*, J. Geom. Phys., 35 (2000), pp. 126–144.
[26] P. Deligne, *Letter to Y.I. Manin.* Princeton, 1987, 1987.
[27] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (1969), pp. 75–109.
[28] J. Dell and L. Smolin, *Graded manifold theory as the geometry of supersymmetry*, Comm. Math. Phys., 66 (1979), pp. 197–221.
[29] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
[30] E. D'Hoker and D. H. Phong, *The geometry of string perturbation theory*, Rev. Modern Phys., 60 (1988), pp. 917–1065.
[31] J. A. Domínguez Pérez, D. Hernández Ruipérez, and C. Sancho de Salas, *Supersymmetric products of SUSY-curves*, in Differential geometric methods in theoretical physics (Rapallo, 1990), vol. 375 of Lecture Notes in Phys., Springer, Berlin, 1991, pp. 271–285.
[32] ———, *Global structures for the moduli of (punctured) super Riemann surfaces*, J. Geom. Phys., 21 (1997), pp. 199–217.
[33] R. Donagi and E. Witten, *Supermoduli space is not projected.* arXiv:1304.7798, 2013.

[34] G. Falqui and C. Reina, *A note on the global structure of supermoduli spaces*, Comm. Math. Phys., 128 (1990), pp. 247–261.
[35] A. Fernández, P. L. García, and C. Rodrigo, *Lagrangian reduction and constrained variational calculus*, in Proceedings of the IX Fall Workshop on Geometry and Physics (Vilanova i la Geltrú, 2000), vol. 3 of Publ. R. Soc. Mat. Esp., R. Soc. Mat. Esp., Madrid, 2001, pp. 53–64.
[36] D. Friedan, *Notes on string theory and two-dimensional conformal field theory*, in Workshop on unified string theories (Santa Barbara, Calif., 1985), World Sci. Publishing, Singapore, 1986, pp. 162–213.
[37] P. L. García, *The Poincaré-Cartan invariant in the calculus of variations*, in Symposia Mathematica, Vol. XIV (Convegno di Geometria Simplettica e Fisica Matematica, INDAM, Rome, 1973), Academic Press, London, 1974, pp. 219–246.
[38] P. L. García and J. Muñoz, *On the geometrical structure of higher order variational calculus*, in Proceedings of the IUTAM-ISIMM symposium on modern developments in analytical mechanics, Vol. I (Torino, 1982), vol. 117, 1983, pp. 127–147.
[39] P. L. García and A. Pérez-Rendón, *Symplectic approach to the theory of quantized fields. I*, Comm. Math. Phys., 13 (1969), pp. 24–44.
[40] ———, *Symplectic approach to the theory of quantized fields. II*, Arch. Rational Mech. Anal., 43 (1971), pp. 101–124.
[41] O. García-Prada, *A direct existence proof for the vortex equations over a compact Riemann surface*, Bull. London Math. Soc., 26 (1994), pp. 88–96.
[42] S. B. Giddings, *Punctures on super Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys., 143 (1992), pp. 355–370.
[43] T. L. Gómez, *Algebraic stacks*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 111 (2001), pp. 1–31.
[44] X. Gràcia, J. Marín-Solano, and M.-C. Muñoz-Lecanda, *Some geometric aspects of variational calculus in constrained systems*, Rep. Math. Phys., 51 (2003), pp. 127–148.
[45] P. Green, *On holomorphic graded manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., 85 (1982), pp. 587–590.
[46] A. Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]*, Secrétariat mathématique, Paris, 1962.
[47] ———, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, in Séminaire Bourbaki, Vol. 2, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. Exp. No. 69, 193–200.
[48] D. Hernández Ruipérez and J. Muñoz Masqué, *Global variational calculus on graded manifolds. I. Graded jet bundles, structure* 1*-form and graded infinitesimal contact transformations*, J. Math. Pures Appl. (9), 63 (1984), pp. 283–309.
[49] ———, *Construction intrinsèque du faisceau de Berezin d'une variété graduée*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 301 (1985), pp. 915–918.
[50] ———, *Global variational calculus on graded manifolds. II*, J. Math. Pures Appl. (9), 64 (1985), pp. 87–104.
[51] ———, *Variational Berezinian problems and their relationship with graded variational problems*, in Differential geometric methods in mathematical physics (Salamanca, 1985), vol. 1251 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1987, pp. 137–149.
[52] ———, *Berezinian measures and graded Haar theory*, Adv. Math., 76 (1989), pp. 200–217.
[53] D. Knutson, *Algebraic spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 203, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[54] K. Kodaira and D. C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures. I, II*, Ann. of Math. (2), 67 (1958), pp. 328–466.
[55] B. Kostant, *Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization*, in Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975), Springer, Berlin, 1977, pp. 177–306. Lecture Notes in Math., Vol. 570.
[56] G. Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, vol. 39 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[57] C. LeBrun and M. Rothstein, *Moduli of super Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys., 117 (1988), pp. 159–176.

[58] D. A. Leĭtes, *Introduction to the theory of supermanifolds*, Uspekhi Mat. Nauk, 35 (1980), pp. 3–57, 255.

[59] D. Maison, *Bogomolny equations and supersymmetry*, in Supersymmetry and supergravity 1983 (Karpacz, 1983), World Sci. Publishing, Singapore, 1983, pp. 381–393.

[60] Y. I. Manin, *Critical dimensions of string theories and a dualizing sheaf on the moduli space of (super) curves*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 20 (1986), pp. 88–89.

[61] ———, *Quantum strings and algebraic curves*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), Providence, RI, 1987, Amer. Math. Soc., pp. 1286–1295.

[62] ———, *Gauge field theory and complex geometry*, vol. 289 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by N. Koblitz and J. R. King, second edition 1997, with an appendix by S. Merkulov.

[63] ———, *Neveu-Schwarz sheaves and differential equations for Mumford superforms*, J. Geom. Phys., 5 (1988), pp. 161–181.

[64] F. Mansouri, *Superunified theories based on the geometry of local (super-) gauge invariance*, Phys. Rev. D (3), 16 (1977), pp. 2456–2467.

[65] J. Marín-Solano, *Mixed first- and second-order differential equations and constrained variational calculus: an inverse problem*, Inverse Problems, 18 (2002), pp. 1593–1603.

[66] B. G. Moĭšezon, *An algebraic analogue of compact complex spaces with a sufficiently large field of meromorphic functions. I, II, III*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 33 (1969), 174-238; ibid. 33 (1969), Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya, 33 (1969), pp. 506–548.

[67] J. Monterde, *Higher order graded and Berezinian Lagrangian densities and their Euler-Lagrange equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 57 (1992), pp. 3–26.

[68] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Studies, No. 59, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.

[69] J. Muñoz Masqué, *Formes de structure et transformations infinitésimales de contact d'ordre supérieur*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 298 (1984), pp. 185–188.

[70] ———, *Poincaré-Cartan forms in higher order variational calculus on fibred manifolds*, Rev. Mat. Iberoamericana, 1 (1985), pp. 85–126.

[71] S.-W. Niu, *Higher order variational calculus*, Tensor (N.S.), 57 (1996), pp. 109–118.

[72] A. L. Onishchik, *A construction of non-split supermanifolds*, Ann. Global Anal. Geom., 16 (1998), pp. 309–333.

[73] I. B. Penkov, *$\mathcal{D}$-modules on supermanifolds*, Invent. Math., 71 (1983), pp. 501–512.

[74] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. B, 103 (1981), pp. 207–210.

[75] A. Rogers, *A global theory of supermanifolds*, J. Math. Phys., 21 (1980), pp. 1352–1365.

[76] ———, *Graded manifolds, supermanifolds and infinite-dimensional Grassmann algebras*, Comm. Math. Phys., 105 (1986), pp. 375–384.

[77] M. J. Rothstein, *Deformations of complex supermanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., 95 (1985), pp. 255–260.

[78] ———, *The axioms of supermanifolds and a new structure arising from them*, Trans. Amer. Math. Soc., 297 (1986), pp. 159–180.

[79] S. Sternberg, *Some preliminary remarks on the formal variational calculus of Gel′fand and Dikiĭ*, in Differential geometrical methods in mathematical physics, II (Proc. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1977), vol. 676 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1978, pp. 399–407.

[80] A. Y. Vaĭntrob, *Deformations of complex structures on supermanifolds*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 18 (1984), pp. 59–60.

[81] ———, *Deformations of complex superspaces and of the coherent sheaves on them*, in Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 32, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk

SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1988, pp. 125–211. J. Soviet Math. **5**1 (1990), no. 1, 2140–2188.

[82] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Invent. Math., 97 (1989), pp. 613–670.

[83] J. Wess, *Supersymmetry-supergravity*, in Topics in quantum field theory and gauge theories (Proc. VIII Internat. GIFT Sem. Theoret. Phys., Salamanca, 1977), vol. 77 of Lecture Notes in Phys., Springer, Berlin, 1978, pp. 81–125.

[84] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1983.

[85] J. Wess and B. Zumino, *Supergauge transformations in four dimensions*, Nuclear Phys., B70 (1974), pp. 39–50.

[86] E. Witten, *Superstring perturbation theory revisited*. arXiv:1209.5461, 2012.

Correo electrónico: `ruiperez@usal.es`

Departamento de Matemáticas e Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas (IUFFyM), Universidad de Salamanca, Plaza de la Merced 1-4, 37008 Salamanca, Spain.