Contrôle optimal/*Optimal Control*

Sur la contrôlabilité approchée des inéquations variationnelles et d'autres problèmes paraboliques non linéaires

Jesus Ildefonso Diaz

Résumé – On montre que la contrôlabilité approchée, bien connue pour les équations linéaires, n'est pas toujours satisfaite dans le cas des problèmes paraboliques non linéaires. Dans le cas du problème d'obstacle la réponse dépend de la « négativité » du second membre et dans le cas semilinéaire elle dépend du caractère sous ou superlinéaire à l'infini du terme non linéaire.

On the approximate controllability of variational inequalities and others nonlinear parabolic problems

Abstract – *We show how the approximate controllability of nonlinear parabolic problems may fail although it is a well-known property for linear equations. For the case of the obstacle problem the answer depends on the negativeness of the righ hand side term and for semilinear equations it depends on the sub or superlinear character at the infinity of the nonlinear term.*

1. Introduction. – L'étude de la contrôlabilité approchée est un sujet très lié à la recherche de l'irréversibilité des changements dans les systèmes dissipatifs. Cette question semble être d'une certaine importance dans l'étude du Système Global de la Planète Terre [1]. La contrôlabilité approchée des problèmes paraboliques linéaires a été montrée depuis longtemps [2]. Le but de cette Note est de mettre en évidence que même si on se restreint à des formulations non linéaires « assez concrètes » la réponse peut être variable dans la même classe de problèmes. Ce type d'alternative est illustré ici par l'étude du problème d'obstacle et des équations paraboliques semilinéaires.

2. Sur la contrôlabilité approchée des inéquations variationnelles paraboliques. – Pour fixer les idées, on se concentre ici sur l'étude de la contrôlabilité approchée (par contrôles sur le bord) du problème d'obstacle

$$\text{(I.V.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y \geqq f, \quad y \geqq 0, \qquad y\left(\dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - f\right) = 0 \qquad \text{dans } Q, \\ y(t, x) = v(t, x) \quad \text{sur } \Sigma, \qquad y(0, x) = y_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geqq 1$, $T > 0$, $Q = (0, T) \times \Omega$ et $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$. L'existence, l'unicité et la régularité de y solution faible sont bien connues sous différentes hypothèses. Pour le cas où v dépend de t il suffit de prendre (*voir* [3]) $f \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2_+(\Omega)$ et $v \in X$ avec $L^2_+(\Omega) = \{ w \in L^2(\Omega) : w \geqq 0 \text{ p.p. sur } \Omega \}$,

$$(1) \qquad X = \{ v \in W_2^{3/4,\, 3/2}(\Sigma) : v \geqq 0 \text{ sur } \Sigma \}$$

pour avoir une unique solution $y \in H^1(0, T : L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T : H^1(\Omega))$. On s'intéresse ici à l'étude de *l'ensemble d'atteignabilité à l'instant* T

$$E^{IV}(T : X) = \{ y(T, . : v) \mid y \text{ solution de (IV)}, v \in X \}.$$

Note présentée par Jacques-Louis Lions.

0764-4442/91/03120519 $ 2.00

Dans le cas de l'équation linéaire

$$\text{(L)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f \quad \text{sur } Q, \\ y = v \quad \text{sur } \Sigma, \qquad y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

il est bien connu [2] que si $X = L^2(\Sigma)$ alors l'ensemble d'atteignabilité associé

$$E^L(T : X) = \{ y(T, . : v) \,|\, y \text{ solution de (L)}, v \in X \}$$

est un sous-espace affine *dense* dans $L^2(\Omega)$. On dit qu'il y a *Contrôlabilité approchée.*

Pour le problème d'obstacle (IV) quelques précisions de départ sont nécessaires. D'abord il est clair que $E^{IV}(T : X) \subset L^2_+(\Omega)$. De plus, par le principe de comparaison [5], on sait que $y(t, . : v) \geqq y(t, . : 0)$ car $v \geqq 0$. La question qui se pose est alors la suivante : *Sous quelles conditions l'ensemble* $E^{IV}(T : X)$ *est-il dense dans* $\{ y(T, . : 0) \} + L^2_+(\Omega)$?

On va montrer qu'il y a une alternative : (*a*) Si f est « peu négative » la réponse est affirmative; (*b*) si f est « très négative » la réponse est négative.

L'étude du premier cas passe par un raffinement des résultats pour le cas linéaire.

THÉORÈME 1. — *Soient* $f \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2_+(\Omega)$ *et* $v \in X$ *avec* $X \subset L^2_+(\Sigma)$ *tels que les problèmes* (L) *et* (I.V.) *admettent une solution unique telle que* $y(T, . : v) \in L^2(\Omega)$. *On fait l'hypothèse*

$$\text{(2)}\qquad X \textit{ est dense dans } L^2_+(\Sigma).$$

Alors on a

(i) $E^L(T : X)$ *est dense dans* $\{ y(T, . : 0) \} + L^2_+(\Omega)$, *où* y *est solution de* (L).

(ii) *Supposons* f *et* y_0 *telles que*

$$\text{(3)}\qquad z(T, .) > 0 \ p.p. \ sur\ \Omega, \qquad z(t, .) = S(t) y_0(.) + \int_0^t S(t-s) f(s, .)\, ds$$

où $S(t)$ *est le semigroupe sur* $L^2(\Omega)$ *associé à l'opérateur*

$$A u = -\Delta u, \qquad D(A) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Alors, $E^{IV}(T : X)$ *est dense dans* $\{ y(T, . : 0) \} + L^2_+(\Omega)$, *y solution du* (I.V.).

Remarque 1. — Par le principe du maximum fort, l'hypothèse (4) est satisfaite si $f \geqq 0$ p.p. sur Q. Par contre, elle est aussi satisfaite pour des fonctions f changeant de signe (convenablement). C'est le cas, par exemple, du $y_0 > 0$ sur Ω, $f \geqq -\varepsilon$ sur Q et T suffisamment petit. Une hypothèse un peu plus générale que (3) est donnée dans [4].

Principe de la démonstration. — Pour montrer (i) il est suffisant de vérifier que l'ensemble $F \equiv F^L(T : X) = \{ y(T, . : v) - y(T, . : 0) \,|\, y$ solution du (L), $v \in X \}$ est dense si on prend, par exemple, $X \subset C^\infty(\Sigma)$. On remarque que $F^L(T : X) = \{ z(T, . : v) \,|\, v \in X$ et z satisfait $z_t - \Delta z = 0$ sur Q, $z = v$ sur Σ et $z(0, . v) = 0$ sur $\Omega \}$. Par l'absurde, soit $g \in L^2_+(\Omega)$, $g \not\equiv 0$ tel que $g \notin \bar{F}$. Par le théorème de la projection, comme F est un cône convexe, il existe une unique $u \in \bar{F}$ tel que

$$\text{(4)}\qquad (g-u, e) \leqq 0, \quad \forall e \in \bar{F}, \qquad \text{et} \qquad (g-u, u) = 0$$

(*voir*, par exemple [2]). Soit $q \in C([0, T] : L^2(\Omega))$ la solution unique du problème

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} -\frac{\partial q}{\partial t} - \Delta q = 0 \quad \text{sur } Q, \\ q = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \qquad q(T, x) = g(x) - u(x) \quad \text{sur } \Omega. \end{aligned}$$

Par intégration par parties on trouve que (3) et (4) conduisent à

$$0 \geqq \int_\Sigma \left(-\frac{\partial q}{\partial n} \right) v, \quad \forall v \in X, \qquad \text{et} \qquad \int_\Sigma \left(-\frac{\partial q}{\partial n} \right) v^0 = 0 \tag{6}$$

où $v^0 \in X$ [resp. $v^0 \in L^2(\Sigma)$] si $u \in F$ (resp. $u \in \bar{F}$) avec $u = z(T, . : v^0)$. Par (2) et (6) on déduit que $(\partial q/\partial n) v^0 = 0$ sur Σ. On montre ensuite qu'il suffit d'argumenter quand $g > 0$ au voisinage de $\partial\Omega$ et que dans ce cas il existe $\delta > 0$ tel que $v^0 > 0$ sur $\Sigma_\delta^T \equiv (T-\delta, T) \times \partial\Omega$. Ceci implique que $\partial q/\partial n = 0$ sur Σ_δ^T et d'un résultat de Mizohata (*voir* [2]) on déduit que $q \equiv 0$ sur $[T-\delta, T] \times \Omega$ et donc la contradiction.

Pour montrer (ii) il suffit de remarquer que, grâce à (3), $z(t, .) = y(t, . ; 0)$ avec y solution du problème (I.V.). Par le principe de comparaison $y(t, . : v) \geqq z(t, .) > 0$ car $v \geqq 0$, et alors y est solution du problème (L). Le résultat est maintenant une conséquence de (i).

Remarque 2. — Des résultats sur la contrôlabilité approchée par des contrôles à l'intérieur (c'est-à-dire, sur $\omega \subset\subset \Omega$) sont donnés dans [4], où on pourra trouver aussi des réponses pour les Inéquations Variationelles du type « élasto-plastique ».

On considère maintenant le cas d'une fonction f « très négative » au voisinage de $\partial\Omega$.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *avec* $N > 4$. *Soit* $f \in H^1(0, T : L^2(\Omega))$ *avec* $f_t(t, .) \geqq 0$ *p.p.* $t \in (0, T)$ *sur* Ω *et telle qu'il existe* $\lambda > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 \geqq 0$ *et* $2 < \alpha < N/2$ *avec*

$$f(t, x) \leqq -C_1 d(x)^{-\alpha} e^{-\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} \ p.p.\ x \in \Omega, \qquad \forall t \in (T-\varepsilon, T), \quad d(x) = d(x, \partial\Omega).$$

Soit $y_0 \in H^2(\Omega)$, $y_0 \geqq 0$ *sur* Ω *tel que* $\Delta y_0 + f(0, .) \geqq 0$ *p.p. sur* Ω. *Alors il existe* $C_3 > 0$ *et* $C_4 \geqq 0$ *telles que*

$$0 \leqq y(t, . : v) \leqq C_3 e^{-\lambda t} d(x)^{2-\alpha} + C_4 e^{-\lambda t}, \qquad \forall t \in (T-\varepsilon, T],\ p.p.\ sur\ \Omega, \quad \forall v \in C^2(\Sigma).$$

En particulier, $E^{IV}(T : X)$ *n'est pas dense dans* $\{ y(T, . : 0) \} + L_+^2(\Omega)$.

Principe de la démonstration. — Sans perte de généralité, il suffit de supposer

$$v \in C^2(\Sigma) \text{ avec } v_t(t, .) \geqq 0, \qquad \forall t \in (0, T) \text{ sur } \partial\Omega. \tag{7}$$

En effet, par un argument d'approximation, il est facile de voir que pour tout $\hat{v} \in C^2(\Sigma)$ il existe v satisfaisant (7) tel que $v \geqq \hat{v}$ et alors $0 \leqq y(t, . : \hat{v}) \leqq y(t, . : v)$. Une fois qu'on suppose (7) on montre que $y_t(t, . : v) \geqq 0$ p. p. $t \in (0, T)$ sur Ω. Pour montrer cela il suffit d'approcher y par y_ε solutions du problème approché associé à l'approximation du graphe maximal monotone $\beta(r) = \Phi$ si $r < 0$, $\beta(r) = \{0\}$ si $r > 0$, $\beta(0) = (-\infty, 0]$ par ses approximations Yosida. On dérive l'équation approchée par rapport à t et on utilise (7). Ensuite on fait le changement $\hat{y}(t, x) = e^{\lambda t} y(t, x)$ et pour terminer on construit $\bar{y}_\infty(x) = C_3 d(x)^{2-\alpha} + C_4$. En utilisant que Δd est borné et que $|\Delta d| = 1$ au voisinage de $\partial\Omega$ on peut choisir C_3 et C_4 telles que $-\Delta \bar{y}_\infty + \lambda \bar{y}_\infty \geqq -C_1 d(x)^{-\alpha} + C_2$ sur Ω. Mais comme

$$\begin{gathered} -\Delta \hat{y}(t, .) + \lambda \hat{y}(t, .) + \beta(\hat{y}(t, .)) \ni e^{\lambda t} f(t, .) - \hat{y}_t(t, .) \quad \text{sur } \Omega, \\ \hat{y}(t, .) = v(t, .) \leqq \bar{y}_\infty(.) \quad \text{sur } \partial\Omega \end{gathered} \tag{8}$$

on en déduit que $\hat{y}(t, .) \leqq \bar{y}_\infty(.)$ sur Ω et p. p. $t \in (T-\varepsilon, T)$ ce qui donne le résultat. ■

3. QUELQUES REMARQUES SUR LA CONTRÔLABILITÉ APPROCHÉE D'AUTRES PROBLÈMES PARABOLIQUES NON LINÉAIRES. — Considérons le problème parabolique suivant :

$$\text{(SL)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = 0 \quad \text{sur } Q \\ y = v \quad \text{sur } \Sigma \qquad y(0, x) = y_0(x) \quad \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

La question qui se pose est la suivante : *quelles sont les hypothèses sur f pour que* (SL) *vérifie la propriété de la contrôlabilité approchée?* Pour fixer les idées on se restreint ici au cas où

$$f(r)=\lambda|r|^{p-1}r, \qquad \forall r\in\mathbb{R}, \tag{9}$$

avec $\lambda>0$ et $p>0$. On a

THÉORÈME 3. — *Soient* $y_0\in L^2_+(\Omega)$ *et* $v\in X$ *avec* X *donné par* (1). *Alors le problème* (SL) *satisfait la propriété de la contrôlabilité approchée si et seulement si* $p\leqq 1$.

La démonstration de la contrôlabilité approchée dans le cas $p<1$ ($p=1$ est connu) est réduite à l'application d'un résultat abstrait [6]. La réponse négative pour $p>1$ est déduite d'une estimation *a priori* universelle du type

$$\hat{y}(t, x)\leqq\psi_1(\psi_2(d(x)^{-1})+\psi_3(t^{-1})) \tag{10}$$

avec ψ_1 croissantes, $i=1, 2, 3$, valable pour toutes les solutions non négatives de l'équation (SL) quand $p>1$. Ces types d'estimations sont classiques dans la théorie des équations semilinéaires depuis quelques années (*voir*, par exemple [7] et [8]).

Remarque 3. — Les estimations universelles du type (10) sont aussi satisfaites pour certaines équations quasilinéaires. Ainsi on trouvera dans [4] des résultats négatifs sur la contrôlabilité approchée de plusieurs autres équations paraboliques non linéaires. C'est le cas de l'équation de Burger; quelques modèles de turbulence, etc. ([4]).

Remarque 4. — Des résultats similaires à ceux du théorème 3 pour des contrôles du flux sur une partie du bord $\partial y/\partial n=v$ sur Σ_1, $\partial y/\partial n=0$ sur Σ_2, $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ sont dus à J. Henry (cas $p<1$, [9]) et A. Bamberger (contre-exemple par une méthode d'énergie pour le cas $p>1$, *voir* [9]).

L'auteur remercie J.-L. Lions de lui avoir signalé ce type de problème pendant son séjour à Madrid en janvier 1990. L'auteur remercie aussi E. Zuazua pour lui avoir indiqué la référence [6].

Note remise le 21 janvier 1991, acceptée le 5 février 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.-L. LIONS, *El Planeta Tierra*, Instituto de España Ed., Espasa Calpe, Madrid, 1990.

[2] J.-L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, 1968.

[3] V. BARBU, *Optimal control of variational inequalities*, Pitman Res. Notes in Math., n° 100, 1984.

[4] J. I. DIAZ, Article détaillé en préparation.

[5] H. BREZIS, Problèmes Unilatéraux, *J. Math. Pures et Appl.*, 51, 1972, p. 1-168.

[6] T. I. SEIDMAN, Invariance of the reachable set under nonlinear perturbations, *S.I.A.M. J. Control and Optimization*, 25, 1987, p. 1173-1191.

[7] L. VERON, Effets régularisants de semigroupes non linéaires dans les espaces de Banach, *Annales Fac. des Sciences de Toulouse*, 1, 1979, p. 171-200.

[8] H. BREZIS et A. FRIEDMAN, Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions, *J. Math. Pures et Appl.*, 62, 1983, p. 73-97.

[9] J. HENRY, Étude de la contrôlabilité de certaines équations paraboliques non linéaires, *Thèse d'État*, Université Paris-VI.

Departamento de Matemática Aplicada,
Universidad Complutense de Madrid, 28040 *Madrid, Espagne.*