$$(p^2)_\eta = g^2, \tag{29}$$

a integrar con las condiciones:

$$p = 1 \text{ en } \eta \to +\infty, \; p = p_a \text{ en } \eta = 0.$$

La solución determina en particular el gasto de salida $(\rho u)_s = \sigma^{-1/3} g_s(p_a)$, siendo $g_s(p_a)$ el valor de g en $\xi = 0$. En particular, $g_s(0) = 0.728$. La solución de (23)-(26) pierde su carácter autosemejante para σ de orden unidad y la solución ha de ser obtenida numéricamente. El movimiento, y por tanto la descarga, están limitados (si $p_a > 0$) a un tiempo finito $\sigma \leq \sigma_0$ como se verá en lo que sigue.

2. TRATAMIENTO MATEMATICO DE LA ECUACION DE LA PRESION EN LA SEGUNDA ETAPA

En esta sección abordaremos el tratamiento matemático del problema parabólico dado por (23)-(26). Nuestro análisis será válido también para el caso en el que la variable x se mueve, más en general, en un abierto regular Ω de $\mathbb{R}^n$ con lo que el caso unidimensional resultará por obvia restricción a $\Omega = (0,1)$ pero a la vez mostraremos cómo el valor de la dimensión n juega un papel importante en el desarrollo asintótico del problema.

A lo largo de esta sección centraremos nuestra atención en el siguiente problema: hallar $w:[0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ solución de:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta_q w^m = 0 \qquad \text{en } (0,\infty)\times\Omega \tag{30}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{en } (0,\infty)\times\Gamma_1 \tag{31}$$

$$w^m = h \qquad \text{en } (0,\infty)\times\Gamma_2 \tag{32}$$

$$w(0,x) = w_0(x) \qquad \text{en } \Omega \tag{33}$$

siendo Δ_q el q-laplaciano en la notación usual

$$\Delta_q g = \operatorname{div}(|\nabla g|^{q-2}\nabla g), \qquad q > 1, \tag{34}$$

y m un parámetro no negativo. Se supone $\partial\Omega$ particionada en dos partes disjuntas Γ_1 y Γ_2 e.d.: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con Γ_2 no vacía y de vector unitario normal exterior ν. También supondremos en lo que sigue que:

$$h(t,x) = h,\ h \in \mathbb{R}^+ \text{ y } w_o(x) \geq 0 \text{ en } \Omega \tag{35}$$

Se puede probar que las condiciones (35)' no representan ninguna limitación importante desde el punto de vista matemático pero su interés está resaltado por la formulación concreta antes vista.

Antes de seguir hagamos un breve comentario sobre la generalidad de la formulación anterior. En primer lugar la ecuación (30) se reduce al caso particular de la ecuación (23)' haciendo $q = 3/2$ y $m = 2$.

Por otra parte ya se indicó en la sección anterior que otros exponentes m tienen también interés. Así, por ejemplo, en el movimiento turbulento en tubos lisos el coeficiente de Darcy-Weissbach es de la forma $\lambda = \lambda_1(u/u_1)^{-1/4}$ donde λ_2 es el valor de λ para la valocidad de referencia u_1. En dicho caso las fuerzas de rozamiento llevan a reemplazar los términos de la derecha de las ecuaciones (2) (resp. (2*)) por $(\lambda_1 L/Du_1)\ \rho|u|^{3/4}u$ (resp. $-\rho|v|^{3/4}v$) con lo que en la ecuación de la presión (23) habría que reemplazar el término p^2 por $p^{7/4}$. En la formulación (30) equivaldría a hacer $m = 7/4$ y $q = 11/7$. También puede mostrarse (véase [12]) que en el caso de fluidos incompresibles el fenómeno de descarga (o carga) en conductos largos conduce a una ecuación para la presión renormalizada similar a (23) pero reemplazando el término p^2 por p. Señalemos también que en flujo laminar la aproximación hidráulica conduce a $\lambda = \lambda_1 u_1/u$ lo que correspondería a $m = 1$.

En la formulación de la sección anterior $\Omega = (0,1)$, $\Gamma_1 = \{0\}$ y $\Gamma_2 = \{1\}$ con lo que $\vec{v} = -\vec{x}$ así (31) coincide con (24). La constante h representa, en ese caso, al valor $\sqrt{p_a}$, con p_a dado en (25). Finalmente indiquemos que la condición inicial (33) incluye obviamente el caso particular $w_o(x) = 1$ pero el caso en el que w_o no es constante tiene también un importante valor físico.

Señalemos también que el caso de $n = 2$ aparece en el estudio de la descarga de un gas limitado entre dos placas de grandes dimensiones comparadas con la distancia que las separa. En ese caso un análisis similar mostraría la existencia de dos etapas bien diferenciadas, y que en la segunda de ellas la presión vendría regida por la ecuación (30) con $q = 3/2$ y $m = 2$ en el caso de paredes rugosas y $m = 7/8$ en el caso de paredes lisas.

Por último es de resaltar que la ecuación parabólica (30) aparece en varios contextos diferentes al de descarga de gases en conductos largos. Este es el caso, por ejemplo, de filtración de fluidos en régimen turbulento en un medio poroso (véase p.e. la monografía [6] donde se encontrarán múltiples referencias).

La cuestión de la existencia, unicidad y regularidad de soluciones de problemas del tipo (30)-(33) ha atraído la atención de numerosos autores en los últimos años. Nuestro objetivo principal irá por otro camino pues nos centraremos en el estudio del comportamiento asintótico, para $t \to \infty$. Respecto a la existencia nos limitaremos a recordar el trabajo [1] en el que el problema es «resuelto» bajo hipótesis muy generales sobre w_o y que, en cualquier caso se aplican a cuando w_o es acotada (lo que haremos en lo que sigue), e.d. supondremos

$$w_o \in L^\infty(\Omega) \tag{36}$$

de lo que deducimos que:

$$0 \leq w(t,x) \leq M \tag{37}$$

para una cierta constante $M > 0$ (por ejemplo $M = \|w_o\|_{L^\infty} + h$).

El primer resultado de esta sección afirma, en términos de la presión, que la descarga del conducto se termina en un tiempo finito si $p_a > 0$ (o bien para cualquier $p_a \geq 0$ en el caso de conductos lisos o fluidos incompresibles).

Teorema 1. Sean $m > 0$ y $q > 1$. Supongamos que una de las siguientes hipótesis es verificada:

$$h > 0 \quad y \quad q < 2 \ (m > o \text{ arbitrario}), \tag{38}$$

ó:

$$h = 0 \quad y \quad m(q-1) < 1. \tag{39}$$

Entonces existe un tiempo finito $T_o > 0$ tal que $w(t,x) = h\ \forall t \geq T_o$ y $\forall x \in \Omega$.

Demostración. Comencemos homogeneizando la condición de contorno (32). Consideremos $z(t,x) = w^m(t,x) - h$. Se tiene que:

$$\frac{\partial \psi(z)}{\partial t} - \Delta_q z = 0 \qquad \text{en } (0,\infty) \times \Omega$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 && \text{en } (0,\infty) \times \Gamma_1 \\ &z = 0 && \text{en } (0,\infty) \times \Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$z(0,x) = w_o^m(x) - h \qquad \text{en } \Omega,$$

siendo:

$$\psi(z) = (z+h)^{1/m} \operatorname{sign}(z+h) \tag{41}$$

Para obtener la conclusión seguiremos el método integral de la energía de manera similar a [2]. Supongamos, por el momento que $z \geq 0$, lo que equivale a suponer $w^m \geq h$. Multiplicando la ecuación por z^k con $k > 0$ a elegir más tarde e integrando por partes resulta:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega B_k(z(t))dx + k\int_\Omega |\nabla z|^q z^{k-1} = 0 \tag{42}$$

siendo:

$$B_k(r) = \psi(r)r^k - k\int_0^r \psi(s)s^{k-1}ds. \tag{43}$$

Obsérvese que si ψ es derivable (e.d. si $h > 0$ ó $h = 0$ y $m \leq 1$) se tiene que $B_k(r) = \int_0^r \psi'(s)s^k ds$. Nótese que para ψ dada por (41) se tiene que:

$$B_k(r) \leq Cr^{K+1}, \text{ con } C = C(h,m,k) > 0 \tag{44}$$

cuando (38) tiene lugar, pues en ese caso $\psi'(z) \geq C$. En el caso de la hipótesis (39), en (44) se tiene que:

$$B_k(r) = \frac{1}{m(k+1/m)} r^{k+1/m} \tag{45}$$

Utilizando la desigualdad de Poincaré-Sobolev (recuérdese que $\Gamma_2 \neq 0$) es fácil demostrar que existe una constante $C = C(|\Omega|, q, n)$ tal que si $u \in C^1(\Omega)$ y $u = 0$ en Γ_1 entonces:

$$\|u\|^{q+(k-1)}_{L^s(\Omega)} \leq C\, k\int_\Omega |\nabla u|^q u^{k-1}dx$$

siendo:

$$1 \leq s \leq \frac{n(q+k-1)}{n-q} \quad \text{si} \quad q < n$$

$$1 \leq s < \infty \quad \text{si} \quad q = n$$

$$s = \infty \quad \text{si} \quad q > n.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y haciendo $k \geq \frac{n}{q}(a - q + 1) - a$

con $a = 1$ si se supone (38) o $a = 1/m$ si se supone (39) se concluye que para una cierta constante positiva M se tiene que:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega B_k(z(t))dx + M\,\|z(t)\|^{q+k-1}_{L^{a+k}(\Omega)} \leq 0$$

Introduciendo:

$$y(t) = \int_\Omega B_k(z(t))dt$$

y utilizando (44) o (45), según la hipótesis supuesta, se llega a la desigualdad:

$$y'(t) + M\,y(t)^{\frac{q+k-1}{a+k}} \leq 0 \tag{46}$$

Dado que en las dos elecciones de a se tiene que $(q + k - 1)/(a + k) < 1$, por un argumento estándar se concluye que existe un tiempo finito $T_0 > 0$ para el que $y(t) = 0\ \forall t \in T_0$. De la definición de B_k se deriva que esto implica nuestra conclusión. El caso de $z(t,x)$ no negativo se trata multiplicando por $z^k(t,x) \cdot \text{sign}\,(z(t,x))$ y argumentando en forma similar.∎

Observación 1. En el trabajo [2] se mostró la anulación en tiempo finito para soluciones z de (40) (con condiciones homogéneas de Dirichlet) bajo la hipótesis:

$$C_1\, r^\beta \leq \psi(r) \leq C_2 r^\beta$$

con $(1/\beta)(q - 1) < 1$ y C_1 y C_2 constantes positivas. Nótese que la ψ dada por (41) no cumple la segunda desigualdad. Obsérvese también que en la hipótesis (38) el valor de m es arbitrario y así la conclusión se tiene si por ejemplo $q = 3/2$, $m = 2$ y $h > 0$ (en ese caso es $m(q - 1) = 1$).

No es difícil mostrar que las hipótesis sobre los exponentes m y q en el Teorema 1 son óptimas. Así, por ejemplo, si suponemos $h = 0$ y $m(q - 1) > 1$ el estudio del comportamiento cualitativo (en el caso de $\Gamma_1 = 0$) ha sido llevado a cabo en [13] mostrándose que aunque puede formarse una zona de anulación local para tiempos cortos (justificada por el carácter de difusión lenta) sin embargo la solución w es tal que $w(t,x) > 0$ en todo $x \in \Omega$ cuando t es suficientemente grande (la restricción $\Gamma_1 = 0$ no es importante en ese proceso). El decaimiento hacia cero cuando $t \to \infty$ puede verse también en [13]. Cuando $h > 0$ basta hacer el cambio de variable dado en la demostración del Teorema 1 y de nuevo se comprueba (por ejemplo comparando con subsoluciones adecuadas) que z no puede anularse. El caso $m(q - 1) = 1$ merece la pena ser tratado explícitamente.

La primera observación relativa al caso $m(q-1)=1$ y $h=0$ o bien $q=2$ y $h>0$, radica en la estimación:

$$\int_\Omega B_k(w^m(t,x)-h)dx \leq C_0 e^{-Mt} \quad \text{si } t>0 \tag{47}$$

que se deriva de la ecuación (46) en la que ahora $(q-1)=a$.

Con el fin de presentar un resultado más preciso que (47) comenzaremos tratando el caso de $h=0$ para lo que estudiaremos previamente las soluciones de variables separadas de la ecuación (40) (ahora $m>0$ y $q>1$ son arbitrarios) e.d. de la forma:

$$w(t,x)=g(t)v(x), \qquad g,\ v \geq 0 \tag{48}$$

Se ha de tener que:

$$g'(t)/g^{m(q-1)}(t)=\Delta_q v^m(x)/v(x)=\mu \neq 0 \tag{49}$$

Estamos interesados en soluciones que se amortiguan con el tiempo por lo que tomaremos $\mu=-\lambda$ con $\lambda>0$. De la igualdad (49) se deduce que si $m(q-1)=1$ entonces:

$$g(t)=e^{-\lambda(t-\tau)}, \qquad \forall\tau\in\mathbb{R} \tag{50}$$

Análogamente, de (49) y las condiciones de contorno (31) (32) se concluye que la función $z=v^m$ debe satisfacer:

$$\begin{aligned} &-\Delta_q z-\lambda z^{1/m}=0 && \text{en } \Omega \\ &\frac{\partial z}{\partial \nu}=0 && \text{en } \Gamma_1 \\ &z=0 && \text{en } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{51}$$

Si $m(q-1)=1$ (51) es un problema de valores propios no lineal y por la teoría de puntos críticos para operadores no lineales (véase, por ejemplo [3] se tiene que (51) tiene solución distinta de la trivial si λ es un autovalor. Por otra parte del principio fuerte del máximo se deduce que si $\lambda=\lambda_1$ (λ_1 primer autovalor del operador Δ_q con las condiciones de contorno indicadas) entonces la correspondiente autofunción es tal que $z>0$ en Ω).

Después de estas consideraciones ya podemos enunciar nuestro resultado de decaimiento cuando $t\to\infty$ para el caso $m(q-1)=q$.

Teorema 2. Sea $w_o \geq 0$ tal que $w_o^m \in C^1(\Omega)$ tal que satisface las condiciones de contorno (31) (32). Sea w solución de (30)-(33) con $m(p-1) = 1$. Entonces existen dos constantes τ_1, $\tau_2 > 0$ tales que si t es suficientemente grande:

$$e^{-\lambda_1(t+\tau_2)}v(x) \leq w(t,x) \leq e^{-\lambda_1(t+\tau_1)}v(x) \qquad (52)$$

siendo λ_1 el primer valor propio de (51) y $z = v^m$ solución positiva de (51).

Demostración. La desigualdad segunda se deduce del principio de comparación una vez comprobado que:

$$\exists \tau_1 > 0 \text{ tal que } e^{-\lambda_1\tau_1}v(x) \geq w_o(x) \quad \text{en } \Omega \qquad (53)$$

Para mostrar (53) basta razonar por absurdo. En otro caso se tendría que $0 \leq z(x_n) < (1/n)^m w_o^m(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ y para alguna sucesión de puntos $x_n \in \Omega$, y por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z(x_n)}{w_o^m(x_n)} = 0 \qquad (54)$$

Como $\bar{\Omega}$ es compacto, existirá un punto $x_o \in \bar{\Omega}$ tal que $x_n \to x_o$ donde ahora x_n es una subsucesión de la sucesión primitiva. Como $z > 0$ y w_o es acotada se tiene que $x_o \in \partial\Omega$. Por tanto, si n es suficientemente grande se verifica que $d(x_n,\partial\Omega) < L < \infty$ y por un resultado bien conocido se sabe que de la regularidad de $\partial\Omega$ se deduce la existencia de un único punto $y_n \in \partial\Omega$ (para cada $n \in \mathbb{N}$) tal que $d(x_n,\partial\Omega) = |x_n - y_n|$. Definiendo las funciones:

$$l_n:[o,d(x_n,\partial\Omega)] \to \mathbb{R}^n, \quad l_n(s) = x_n - s\vec{v}_n, \ \vec{v}_n = \vec{v}(y_n),$$

del teorema del valor medio se deduce que existen θ_n y $\mu_n \in [0,d(x_n,\partial\Omega)]$ tales que

$$\frac{z(x_n)}{w_o^m(x_n)} = \frac{z(y_n) + \nabla z(l_n(\theta_n)) \cdot \vec{v}_n(x_n,\partial\Omega)}{w^m(y_n) + \nabla w_o^m(l_n(\mu_n)) \cdot \vec{v}_n d(x_n, \partial\Omega)}$$

En la región Γ_1 se sabe que $\nabla w_o^m \cdot \vec{v} = 0$ y como $z > 0$ se llega a una contradicción con (54). En la región Γ_2 se sabe que $\nabla z \cdot \vec{v} < 0$ y de nuevo se alcanza una contradicción con (54).

La primera desigualdad de (52) sería consecuencia del principio de comparación de soluciones si $w_o(x) \geq e^{-\lambda_1\tau_2}v(x)$ en Ω para algún $\tau_2 > 0$, lo que es bastante restrictivo, dado que el caso en el que w_o puede anularse es de importancia y v es estrictamente positiva. Para evitar esta restricción mostraremos previamente que:

«existe $T \geq 0$ y $\tau_2 > 0$ tales que $w(T,x) \geq e^{-\lambda_1\tau_2}v(x)$ en Ω» (55)

con lo que la primera desigualdad se obtiene de nuevo por comparación sobre el dominio $(T,\infty) \times \Omega$. Por el principio fuerte del máximo se tiene que $z = v^m$ satisface $z(x) \leq Md(x,\partial\Omega)$ $\forall x \in \Omega$. Por tanto (55) se reduce a mostrar que:

«existe $T \geq 0$, y $C > 0$ tales que $w^m(T,x) \geq Cd(x,\partial\Omega)$ en Ω» (56)

Con el fin de obtener (56) se introduce la familia biparamétrica de funciones de tipo autosimilaridad:

$$w\,(x,t\,;\,\tau,A) = (t+\tau)^{-\alpha}g_A(\eta), \qquad \eta = |x|\,(t+\tau)^{-(m+1)/m}$$

donde τ y A son parámetros positivos y g_A viene definida por:

$$g_A(\eta) = \left\{\left(\left[A - \eta^{m+1}\right]_+\right)^{\mu} + \left[A - \eta^{m+1}\right]_+\right\}^{1/m}$$

donde μ es un exponente arbitrario tal que $\mu \in (1,(m+1)/m)$ si $m \leq 1$, $\mu \in (1,2\,(2-1))$ si $m \geq 1$. No es difícil comprobar (véase [13] que w es una subsolución en el sentido de que $v_t - \Delta_q(v)^m \leq 0$ en el interior de su soporte (nótese que $g_A(\eta) > 0$ en (o,a), $a = A^{1/(m+1)}$, $g_A(a) = 0$ y $(g_A^m)'(a) < 0$). Comparando w con funciones del tipo $v(x-y;\tau,A)$ como en [13] (Teorema 4.3) se obtiene la conclusión (nótese que sobre la frontera Γ_1 se tiene que $\partial w/\partial \nu = 0$ así como $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} < 0$, lo que permite la comparación $v \leq w$).■

Con respecto al caso de $h > 0$ señalemos que el decaimiento exponencial ocurre cuando $q = 2$, independientemente del valor de m (véase [8]). Se puede mostrar que en el resto de los casos en los que no hay extinción en tiempo finito, e.d. si $q > 2$ el decaimiento hacia h, cuando $t \to \infty$, es más lento que exponencial, siendo modelado por una cierta potencia negativa de t que depende de $q - 2$.

Para terminar el estudio del comportamiento para t grande de las soluciones de (30)-(33), analizaremos con más detalle la extinción en tiempo finito bajo los dos tipos de hipótesis (38) y (39). Comenzaremos por el caso más sencillo en que $h = 0$ y $m(q-1) < 1$. Nuestro objetivo es «ilustrar el perfil» de $w(x,t)$ cuando $t \to T^*$, donde T^* es el tiempo de extinción de w, e.d. el primer instante t del tiempo en el que $w(t,x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, así como obtener estimaciones sobre cómo se produce ese decaimiento cerca de $t = T^*$. Comencemos calculando las soluciones separables $w(t,x) = g(t)v(x)$ que se anulan en $t = T^*$. De las identidades dadas en (49) deducimos que:

$$g(t) = \left\{\lambda(1 - m(q - 1))(T^* - t)\right\}^{\frac{1}{1 - m(q-1)}} \tag{59}$$

y $z = v^m$ ha de satisfacer el problema (51), donde $\lambda > 0$ es arbitrario. El siguiente resultado muestra que el comportamiento de estas soluciones separables es genérico.

Teorema 3. Sea w solución de (30)-(33) con $h = 0$ y supongamos que $m(q - 1) < 1$. Sea la función:

$$U(t,x) = w(t,x)/g(t) \tag{60}$$

con $g(t)$ dada por (59). Entonces existe una sucesión creciente $t_n \to T^*$ y una solución positiva z de (51) tal que $U^m(\cdot,t_n) \to z(\cdot)$ al menos en el espacio de Sobolev $W^{1,s^*}(\Omega)$, para un cierto $s^* \geq 1$, cuando $t_n \to T^*$.

La demostración del Teorema 3 está inspirada en el importante trabajo de Berryman y Holland [4] relativo al caso $q = 2$. La idea esencial de la demostración es introducir una nueva incógnita u y una nueva escala en el tiempo, de manera que $\tau(T^*) = +\infty$ y la función

$$u(\tau,x) = U^m(t,x) \tag{61}$$

verifique la ecuación:

$$\begin{cases} (u^{1/m})_\tau = \Delta_q u + \lambda u^{1/m} & \text{en } 0 < \tau < \infty,\ x \in \Omega. \quad (62) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } 0 < \tau < \infty,\ x \in \Gamma_1. \quad (63) \\ u = 0 & \text{en } 0 < \tau < \infty,\ x \in \Gamma_2. \quad (64) \end{cases}$$

Con el fin de explicitar el cambio de escala observemos que:

$$\Delta_q u = \frac{\Delta_q w^m}{g^{m(q-1)}} = \frac{w_t}{g^{m(q-1)}}$$

$$(u^{1/m})_\tau = \frac{\partial}{\partial t} U(t,x) \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{w_t}{g} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \lambda \frac{w}{g^{2-m(q-1)}} \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

(recuérdese que g satisface (49)). Entonces, si $\partial/\partial\tau = g^{1-m(q-1)}$ se concluye (62). Utilizando la expresión (59) y obligando a que $t(+\infty) = T^*$ y $t(o) = 0$ se obtiene:

$$t = T^*(1 - e^{-\lambda(1-m(q-1))\tau}) \tag{65}$$

La conclusión del Teorema 3 se reduce pues al estudio del comportamiento asintótico, cuando $\tau \to +\infty$, de las soluciones de (62)-(64), más concretamente, a demostrar que $u(\tau,\cdot) \to z(\cdot)$ en $W^{1,q}(\Omega)$. Nótese que la ecuación (62) contiene un término de «calentamiento» dado que $\lambda > 0$, sin embargo, tal término es moderado como se aprecia introduciendo $\hat{w}(\tau,x) = u^{1/m}(\tau,x)$ pues se tiene que $\hat{w}_\tau - \Delta_q(\hat{w})^m - \lambda\hat{w} = 0$. La posibilidad de explosión en tiempo finito de $\hat{w}$ quedaría así excluida mostrando la monotonía (o acretividad) del operador $\hat{w} \to -\Delta_q(\hat{w})^m - \lambda\hat{w}$ en adecuados espacios funcionales ($L^1(\Omega)$, ó $H^{-1}(\Omega)$ si $q = 2$) lo que a su vez conduciría a la convergencia en esos espacios mediante la aplicación de resultados de la teoría abstracta de operadores. Aquí seguiremos otro camino que conduce a convergencia en espacios «mejores». Antes de entrar en materia indiquemos los resultados parciales de (11) (si $q = 2$) y (7) (si $m = 1$ y $q \leq 2$).

La demostración del Teorema 3 es bastante larga y, como ya se ha indicado, sigue de cerca el trabajo [4] (donde se suponen soluciones regulares) y [17] (que generaliza [4] a soluciones débiles). Por razones de extensión nos limitaremos a indicar los pasos fundamentales de la demostración.

Lema 1. Existe $\{\tau\}$, $\tau_n \to \infty$ *tal que:*

$$\left\| \left(u^{\frac{1+m}{2m}}\right)_\tau \right\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \text{ cuando } \tau_n \to \infty \tag{66}$$

Demostración. En primer lugar señalemos que supondremos que u es una solución «fuerte) de (62)-(64), en otro caso se procede por aproximación (véase [17] para $q = 2$). Consideremos el funcional:

$$J(h) = \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla h|^q - \frac{\lambda m}{(m+1)}\int_\Omega h^{(m+1)/m}$$

y para $\tau \in (0,\infty^*)$ sea:

$$\Phi(\tau) = J(u(\tau,\cdot)).$$

Se tiene que si ∂J representa la derivada Gateaux de J:

$$\frac{d}{d\tau}\Phi(\tau) = <\partial J(u), u_\tau> = -\int \frac{1}{m} u^{\frac{1-m}{m}} u_\tau^2 \leq 0$$

dado que $u \geq 0$. Además, por el lema que sigue (Lema 2) se tiene que $\int_\Omega u^{(m+1)/m}(x,\tau)dx$ está acotado en τ, luego $\exists C > 0$ tal que $\Phi(\tau) \leq -C$ $\forall \tau \in (0,\infty)$. En consecuencia lim $\Phi(\tau)$ existe y existe una sucesión $\tau_n \to \infty$ tal que $\Phi'(\tau_n) \to 0$. La conclusión resulta ahora de una simple manipulación algebraica.

Lema 2. Sea $m(q-1) < 1$, $w_o \in L^{m+1}(\Omega)$ y sea T^* el tiempo de extinción de w solución de (30) (33) con $h = 0$. Entonces se tiene que $\exists\ C_1, C_2 > 0$ (dependiente de u_o) tal que si $t \leq T^*$.

$$C_1(T^* - t)^{\frac{1+m}{(1-m(q-1))}} \leq \int_\Omega w^{m+1}(t;) \leq C_2(T^* - t)^{\frac{1+m}{(1-m(q-1))}} \qquad (67)$$

En particular si $u(\tau,x)$ es definida por (61) se tiene que $\exists\ \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$ tal que $\forall \tau \in [0,\infty]$.

$$\tilde{C}_1 \leq \int_\Omega u^{\frac{m+1}{m}}(\tau,x)dx \leq \tilde{C}_2 \qquad (68)$$

Demostración. La primera desigualdad se deduce integrando la desigualdad diferencial (46) correspondiente a $k = 1$ sobre el intervalo (t,T^*). Para mostrar la segunda desigualdad obtendremos previamente que la función

$$Y(t) = \left(\int_\Omega w^{m+1}(t,x)dx\right)^b$$

es una función convexa para un cierto valor de $b > 0$ adecuado, en cuyo caso se tendrá que $\exists \sigma \in (t,T)$ tal que $y(t) = y(T) + (t-T)y'(\sigma) \leq (T-t)(-y'(o))$, lo que lleva a la conclusión. Para mostrar la convexidad de $Y(t)$ basta ver que $Y'(s) \leq Y'(t)$ para todo $s \leq t$. Ahora bien, de la ecuación y condiciones de contorno se deduce que:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^{m+1}(t,x)dx = -(m+1)\int_\Omega |\nabla w^m(t,x)|^q,$$

por lo que basta mostrar que si $s \leq t$ entonces:

$$\frac{\left(\int w^{m+1}(t,x)\right)^{b-1}}{\left(\int w^{m+1}(s,x)\right)^{b-1}} \geq \frac{\int |\nabla w^m(s,x)|^q}{\int |\nabla w^m(s,x)|^q} \tag{69}$$

A su vez (69) resulta de la integración de la siguiente desigualdad diferencial:

$$(b-1)\frac{\frac{d}{dt}\int w^{m+1}(t,x)}{\int w^{m+1}(t,x)} \geq \frac{\frac{d}{dt}\int |\nabla w^m(t,x)|^q}{\int |\nabla x^m(t,x)|^q} \tag{70}$$

Para obtener (70) observamos que:

$$\frac{d}{dt}\int |\nabla w^m|^q = -q\int (\Delta_q w^m)m \cdot w^{m-1}w_t = -qm\int (\Delta_q w^m)^2 w^{m-1}dx \tag{71}$$

Por otra parte:

$$\int_\Omega |\nabla w^m(t,x)|^q dx = -\int_\Omega (\Delta_q w^m)w^m dx$$

luego aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que:

$$\left(\int |\nabla w^m(t,x)|^q\right)^2 \leq \int w^{m+1}dx \cdot \int \left(\Delta_q w^m\right)^2 w^{m-1},$$

o equivalentemente:

$$\frac{\int |\nabla w^m|^q}{\int w^{m+1}} \leq \frac{\int (\Delta_q w^m)^2 w^{m-1}}{\int |\nabla w^m|^q} \tag{72}$$

La desigualdad (70) resulta ahora de (71) y (72) con $b = (1 - m(q-1))/(m+1)$.

Demostración del Teorema 3. De la ecuación (62) de u se tiene que:

$$\int |\Delta_q u(\tau_n, \cdot)|^{(m+1)} \leq A \int_\Omega (u^{1/m})^{m+1} + B \int_\Omega [(u^{1/m})_\tau]^{m+1} \qquad (73)$$

El primer término de (73) está acotado por (68). Respecto al segundo término observemos que por la desigualdad de Hölder:

$$\int_\Omega u^{\frac{1-m}{m}} u_\tau \leq \left(\int_\Omega u^{m+1} \right)^{\frac{(1-m)m+1}{m+1}} \left(\int u^{\frac{1-m}{m}} u_\tau^2 \right)^{(m+1)/2}$$

De esta manera aplicando (66) y (68) se deduce que $\{\Delta_q u(\tau_n, \cdot)\}$ está acotada en $L^{m+1}(X)$. Por los resultados de regularidad de [15] se sabe que existen s y s* con $s > 1$ y $s^* > 1$ dependiendo de $q > m$ tales que la sucesión $\{u(\tau_n, \cdot)\}$ está uniformemente acotada en el espacio de Sobolev $W^{s,s^*}(\Omega)$ y por tanto existe una función $z(\cdot)$ y una subsucesión de τ_n (que aun la denominaremos de igual manera) de forma que $u(\tau_n, \cdot) \to R(\cdot)$ fuertemente en $W^{\S,s^*}(\Omega)$ para todo $\S \in (0,s)$.

La convergencia puede mejorarse dado que como $\Phi(\tau)$ y $\int u^{(m+1)/m}$ están acotadas se tiene que $\int |\nabla u|^q$ está uniformemente acotada, lo que implica que $z \in W^{1,q}(X)$ y que $u(\tau_n, \cdot)$ converge débilmente a $z(\cdot)$ en $W^{1,q}(X)$. El demostrar que $z(\cdot)$ es una solución de (50) es estándar y se basa en la multiplicación de (62) por una función test y paso al límite cuando $\upsilon_n \to +\infty$. Por último, utilizando la primera desigualdad de (68) se deduce que $z \geq 0$ no es la solución trivial.

Observación. La conclusión del Teorema 3 puede ser mejorada bajo ciertas hipótesis adicionales. Así, si la dimensión del espacio es $n = 1$ entonces la convergencia dada en el Teorema 3 implica la convergencia en $L^\infty(\Omega)$. Por otra parte, puede mostrarse que en ese caso Z está unívocamente determinada y un simple argumento adicional permite ver que de hecho $U^m(\tau, \cdot) \to z$ cuando $\tau \to \infty$ (y no sólo cuando $\tau = \tau_n$). Nótese también que todo resultado de unicidad para z solución de (50) conduce a que el comportamiento límite, cuando $\tau \to \infty$ (o equivalentemente cuando $t \to T^*$) es independiente de la condición inicial. Señalemos, por último que se tiene $z > 0$ en Ω y así se concluye que $w(t, \cdot) > 0$ en Ω si t es suficientemente cercano a T^* cuando la convergencia tiene lugar en $L^\infty(\Omega)$.

Con respecto al caso en el que $h > 0$ y $q < 2$ (hipótesis (38)) la situación es más compleja dado que el problema pierde su homogeneidad. Por el Teorema 1, las soluciones w se hacen idénticamente h a partir de un tiempo finito. Sea T^* el primer instante en que eso ocurre. Ahora la única singularidad de la ecuación ocurre sobre ∇w debido a que $q < 2$. El resultado que sigue muestra que el «perfil» en $t = T^*$ es muy semejante al del caso $m = 1$ y $h = 0$. Comencemos definiendo la función g que modula el decaimiento cuando $t \to T^*$; definamos

$$g(t) = \{\lambda(2 - q)(T^* - t)\}^{1/(2-q)} \tag{74}$$

donde $\lambda > 0$ es arbitrario. Para enunciar nuestro resultado será cómodo trabajar con la formulación equivalente ya utilizada en la demostración del Teorema 1. Sea $v = w^m - h$. Entonces v verifica

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(v) - \Delta_q v = 0 & \text{en} & (0, \infty)\times\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{en} & (0, \infty)\times\Gamma_1 \\ v = 0 & \text{en} & (0, \infty)\times\Gamma_2 \\ v(0,x) = w_0^m(x) - h & \text{en} & \Omega \end{array}\right\} \tag{75}$$

siendo $\psi(v) = (v + h)^{1/m}$ sign $(v + h)$.

Teorema 4. Supongamos $h > 0$, $q < 2$ y $m \geq 1$. Sea $w_0 \in L^\infty(\Omega)$ con $w_0^m(x) \geq h$ en Ω y sea $v(t,x)$ la solución de (75). Definamos la función

$$V(t,x) = v(t,x)/g(t) \tag{76}$$

con $g(t)$ dada por (74). Entonces existe una sucesión creciente $t_n \to T^*$ y una función $z(x) > 0$ verificando

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta_q z - C\lambda z = 0 & \text{en} & \Omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{en} & \Gamma_1 \\ z = 0 & \text{en} & \Gamma_2 \end{array}\right\} \tag{77}$$

con $C = 1/m\, h^{(1-m)/m}$ de manera que $V(\cdot,t_n) \to z(\cdot)$ al menos en el espacio de Sobolev $W^{1,s^*}(\Omega)$, para un cierto $s^* \geq 1$, cuando $t_n \to T^*$.

Idea de la demostración. Definamos la nueva incógnita

$$u(\tau,x) = V(t,x)$$

donde $\tau = \tau(t)$ es un cambio de variable cumpliendo $\tau(0) = 0$ y $\tau(T^*) = +\infty$. Eligiendo $\tau(t)$ de manera que $\partial t/\partial\tau = g^{2-q}$, e.d.

$$t = T^*(1 - e^{-\lambda(2-q)\tau}),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} &a(\tau,x)u_\tau = \Delta_q u + \lambda a(\tau,x)u && \text{en} \quad 0 < \tau < \infty,\ x \in \Omega \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 && \text{en} \quad 0 < \tau < \infty,\ x \in \Gamma_1 \qquad (78) \\ &u = 0 && \text{en} \quad 0 < \tau < \infty,\ x \in \Gamma_2, \end{aligned}$$

siendo $a(\tau,x) = \psi'(v(\tau,x))$. Obsérvese que $a \in L^\infty$ y $a > 0$. Más concretamente

$$(1/m)h^{(1-m)/m} \leq a(\tau,x) \leq 1/m\ M^{(1-m)/m}, \text{ si } 0 < m \leq 1,$$

$$(1/m)\ M^{(1-m)/m} \leq a(\tau,x) \leq 1/m\ h^{(1-m)/m}, \text{ si } m \geq 1,$$

con $M = \|v + h\|_{L^\infty}$ (véase p.e. (37)). Nótese también que $a(\tau,\cdot) \to \psi'(h)$ cuando $\tau \to +\infty$, en Ω. El esquema del resto de la demostración sigue de cerca la del Teorema 3 pero con adecuadas modificaciones en la obtención de cada una de esas etapas. Así la estimación sobre u_τ dada por (66) debe reemplazarse por

$$\|u_\tau(\tau_n,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } \tau_n \to \infty. \qquad (79)$$

La demostración de (79) se obtiene multiplicando la ecuación (78) por u_τ, integrando por partes y utilizando las acotaciones sobre $a(\tau,x)$ así como las estimaciones «a priori».

$$C_1(T^* - t)^{2/(2-q)} \leq \int_\Omega B_1(v(t,x))dx \leq C_2(T^* - t)^{2/(2-q)}, \qquad (80)$$

siendo B_1 la función dada por (43) y C_1 y C_2 adecuadas constantes positivas. Las desigualdades (80) son una de las piezas claves e implican que $\int_\Omega u^2(\tau,x)dx$ está acotada uniformemente en τ. La desigualdad de la izquierda se deduce de la inecuación (46). Para obtener la de la derecha se ha de modificar convenientemente la demostración del Lema 2 utilizando el hecho de que $\psi'(r)$ es decreciente toda vez que se ha supuesto $m \geq 1$. El resto de la demostración del Teorema 3 se adapta fácilmente gracias a las acotaciones señaladas sobre $a(\tau,x)$.

Observación. Nótese que la conclusión del Teorema 4 conduce, suponiendo $h \to 0$, a la dada en el Teorema 3 para $m = 1$ y $q < 2$. Obsérvese que la hipótesis $m(q - 1) < 1$ ahora no garantiza la aplicabilidad del Teorema 4.

REFERENCIAS

[1] H. W. ALT y S. LUCKHAUS; «Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations», Math. Z., *183*, 311-341 (1983).

[2] S. N. ANTONTSEV y J. I. DÍAZ; «New results on space and time localization of solutions of nonliunear elliptic or parabolic equations via energy methods». Soviet Math. Dokl. *303*, 524-528 (1988).

[3] M. BERGER; *Nonlinearity and Functional Analysis*. Academic Press, New York (1977).

[4] J. G. BERRYMAN y C. J. HOLLAND; «Stability of the Separable Solution for Fast Diffusion», Arch. for Rat. Mech. and Analy. *74* 379-388 (1980).

[5] R. COURANT y D. HILBERT; *Methods of Mathematical Physics. Vol. II.* J. Wiley (1962).

[6] J. I. DÍAZ; «*Nonlinear partial differential equations and free boundary problems. Vol. I. Elliptic equations*. Pitman, London (1985), *Vol. II. Parabolic and Hyperbolic equations* (en preparación).

[7] A. EL HACHIMI y DE THÉLIN; «Supersolutions and stabilization of the solutions of the equation $u_t - \mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)$». Nonlinear Analysis 1988.

[8] C. J. HOLLAND y J. G. BERRYMAN; «Exponential convergence for nonlinear diffusion problems with positive lateral boundary conditions». J. Math. Phys. *26*, 660-663 (1985).

[9] J. M. KAY; *Introducción a la Mecánica de Fluidos y Transferencia de calor*, Marcombo, Barcelona (1964).

[10] L. D. LANDAU y E. M. LIFCHITZ; *Mecánica de fluidos*, Reverté, Barcelona (1986).

[11] M. LANGLAIS y D. PHILLIPS; «Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equations», Nonlinear Analysis T.M.A. *9*, 321-333 (1985).

[12] A. LIÑÁN: «Line packing and surge attenuation in long pipelines» (trabajo no publicado).

[13] J. E. SAA; *Tesis Doctoral*. Univ. Complutense de Madrid (1988).

[14] A. S. SHAPIRO; *Comprensible Fluid Flow, Vol. II.* Ronald Press, New York (1954).

[15] F. DE THELIN; «Local regularity properties for the solutions of a nonlinear partial differential equation». Nonlinear Analysis, T.M.A., *6*, 839-844 (1982).

[16] G. B. WITHMAN; *Linear and nonlinear waves*, J. Wiley (1974).

[17] Y. C. KWONG; «Asymptotic Behavior of the Plasma Equation with Homogeneous Dirichlet Boundary Condition and Non-Negative Initial Data», Applicable Analysis, *28*, 95-113 (1988).

[18] T. K. FANNELOP y I. L. RYHMING: «Masside release of gas from long pipe lines». AIAA, Journal Energy, *6*, 132-140 (1982).