C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 521-524, 1987

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires

Jesús Ildefonso DÍAZ et José Evaristo SAA

Résumé — On montre l'unicité et on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions positives de l'équation $-\Delta_p u = f(x, u)$ où Δ_p est le p-laplacien et $f(x, r)$ est telle que $f(., r)/r^{p-1}$ est décroissante.

Existence and uniqueness of solutions of some quasilinear elliptic equations

Abstract — We show the uniqueness and we give necessary and sufficient conditions for the existence of positive solutions of the equation $-\Delta_p u = f(x, u)$ *where* Δ_p *denotes the p-Laplacian and* $f(., r)/r^{p-1}$ *is assumed to be decreasing.*

INTRODUCTION. — On s'intéresse au problème

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u), & u \geqq 0 \text{ et } u \not\equiv 0, \text{ dans } \Omega, \\ & u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné régulier,

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \qquad 1 < p < \infty,$$

et $f(x, r) : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfait les hypothèses suivantes :

(H_1) p. p. $x \in \Omega$ la fonction $r \to f(x, r)$ est continue sur $[0, \infty)$ et pour tout $r \geqq 0$ la fonction $x \to f(x, r)$ appartient à $L^\infty(\Omega)$;

(H_2) p. p. $x \in \Omega$ la fonction $r \to f(x, r)/r^{p-1}$ est strictement décroissante sur $(0, \infty)$;

(H_3) $\exists\, C > 0$ telle que $f(x, r) \leqq C(r^{p-1} + 1)$ p. p. $x \in \Omega$ et $\forall r \geqq 0$.

On est intéressé par les solutions faibles de (P) telles que $u \in W_0^{1, p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ [on note que d'après les hypothèses sur f, $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$ et donc, en fait, grâce à des résultats bien connus $u \in W_{\mathrm{loc}}^{2, 2}(\Omega)$]. Dans cette Note on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions ainsi qu'une preuve de l'unicité, sous les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3).

THÉORÈME 1. — *Le problème* (P) *admet au plus une solution.*

THÉORÈME 2. — *Le problème* (P) *admet une solution si et seulement si on a les deux conditions suivantes*

$$(1) \qquad \lambda_1(-\Delta_p v - a_0 |v|^{p-2} v) < 0 \qquad \textit{avec} \quad a_0(x) = \lim_{r \downarrow 0} f(x, r)/r^{p-1}$$

$$(2) \qquad \lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty |v|^{p-2} v) > 0 \qquad \textit{avec} \quad a_\infty(x) = \lim_{r \uparrow \infty} f(x, r)/r^{p-1}.$$

Dans (1) et (2) $\lambda_1(-\Delta_p v - a|v|^{p-2} v)$ représente la première « valeur propre » de l'opérateur $-\Delta_p v - a|v|^{p-2} v$ avec conditions nulles sur le bord. Étant donné que sous les seules hypothèses faites sur f les termes $a_0(x)$ et $a_\infty(x)$ peuvent prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ respectivement, on a besoin d'étendre la définition de λ_1 au cas où a est non borné comme en [1]

$$(3) \qquad \lambda_1(-\Delta_p v - a|v|^{p-2} v) = \operatorname{Inf}\left\{ \int_\Omega |\nabla v|^p - \int_{[v \neq 0]} a|v|^p,\ v \in W_0^{1, p}(\Omega) \text{ et } \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

0249-6291/87/03050521 $ 2.00 © Académie des Sciences

Dans le cas particulier où $f(x, r)=f(r)$, les conditions (1) et (2) sont équivalentes à $a_\infty < \lambda_1(-\Delta_p) < a_0$.

Les théorèmes 1 et 2 prolongent des résultats similaires dus à Brezis et Oswald [1] pour le cas semilinéaire $p=2$ (voir d'autres références pour ce cas dans [1]). Néanmoins, l'argument de transposition de l'opérateur $\int \Delta u v = \int u \Delta v$ pour u et v nulles au bord n'est pas valable pour le p-laplacien si $p \neq 2$ et alors on a besoin de suivre d'autres arguments. Notre outil de base est le fait que la fonctionnelle d'énergie

$$(4)\quad E(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega F(x, u) \qquad \text{avec} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad F(x, u)=\int_0^u f(x, t)\,dt$$

est convexe par rapport à la variable $w=u^p$. Ce fait (qui avait été remarqué initialement pour $p=2$ par Benguria [2] et Benguria-Brezis-Lieb [3]) implique la monotonie de l'opérateur $w \to (-\Delta_p w^{1/p})/w^{(p-1)/p}$.

Lemme 1. — *Soit* $J : L^1(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ *définie par*

$$(5)\qquad J(w)=\begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla w^{1/p}|^p\,dx & \text{si } w \geqq 0 \text{ et } w^{1/p} \in W_0^{1,p}(\Omega),\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors, J *est convexe, s. c. i. et* $J \not\equiv +\infty$.

Démonstration. — Pour montrer la convexité de J soient $w_i \in L^1(\Omega)$ telles que $w_i \geqq 0$ p. p. $w_i \neq 0$, $w_i^{1/p} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et soient $z_i = w_i^{1/p}$ pour $i=1, 2$ et $z_3=(tw_1+(1-t)w_2)^{1/p}$ avec $t \in (0, 1)$. Alors d'après l'inégalité de Hölder

$$z_3^{p-1}|\nabla z_3| \leqq (tz_1^p+(1-t)z_2^p)^{(p-1)/p}(t|\nabla z_1|^p+(1-t)|\nabla z_2|^p)^{1/p},$$

ce qui donne la convexité. Le reste est standard.

Lemme 2. — *Pour* $i=1, 2$ *soient* $w_i \in L^\infty(\Omega)$ *telles que* $w_i \geqq 0$ p. p. *sur* Ω, $w_i^{1/p} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Delta_p w_i^{1/p} \in L^\infty(\Omega)$ *et* $w_1=w_2$ *sur* $\partial\Omega$. *Alors on a*

$$(6)\qquad \int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p w_1^{1/p}}{w_1^{(p-1)/p}} + \frac{\Delta_p w_2^{1/p}}{w_2^{(p-1)/p}}\right)(w_1-w_2) \geqq 0$$

si l'on suppose que $(w_i/w_j) \in L^\infty(\Omega)$ *pour* $i \neq j$, $i, j=1, 2$.

Démonstration. — Il suffit de calculer la dérivée Gateaux de J selon la direction $\zeta = w_1 - w_2$. En intégrant par parties (ce qu'on justifie par les hypothèses faites sur w_i) on trouve que

$$J'(w_i; \zeta)=\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{-\Delta_p w_i^{1/p}}{w_i^{(p-1)/p}}\zeta\,dx,$$

et alors (6) est conséquence de la convexité de J.

Démonstration du théorème 1. — Soient u_1 et u_2 deux solutions de (P). D'après (H_2) on a $f(x, u_i)/u_i^{p-1} \geqq f(x, \|u_i\|_{L^\infty})/\|u_i\|_{L^\infty}^{p-1}$ et alors $-\Delta_p u_i + M_i u_i^{p-1} \geqq 0$ pour une certaine constante $M_i \geqq 0$. Le terme d'absorption n'est pas fort et alors u_i satisfait le principe fort du maximum [4], ce qui implique que $u_i > 0$ sur Ω. De plus comme $u_i \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ (*voir* Barles [5]) on a aussi que $\partial u_i/\partial n < 0$ sur $\partial\Omega$. Il est facile de voir (appliquer par exemple la règle de l'Hôpital) qu'en conséquence $(u_i/u_j) \in L^\infty(\Omega)$. D'autre part $\Delta_p u_i \in L^\infty(\Omega)$ [du fait que $u_i \in L^\infty(\Omega)$, (H_2) et (H_3)]. Alors par le lemme 2 et (H_2), si $u_1 \neq u_2$ on a

$$0 \leqq \int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p u_1}{u_1^{p-1}} + \frac{\Delta_p u_2}{u_2^{p-1}}\right)(u_1^p - u_2^p) = \int_\Omega \left(\frac{f(x, u_1)}{u_1^{p-1}} - \frac{f(x, u_2)}{u_2^{p-1}}\right)(u_1^p - u_2^p) < 0$$

et on arrive à une contradiction.

Remarque 1. — Une première version du théorème 1 était donnée dans Díaz-Saa [6]. Une première démonstration de l'unicité par méthode de monotonie a été donnée dans Brezis-Oswald [1] pour le cas $p=2$ (dans ce travail la monotonie est montrée à partir d'une inégalité algébrique qui ne semble pas pouvoir s'étendre au cas $p \neq 2$). Plus récemment, d'autres résultats voisins nous ont été communiqués par différents auteurs : l'unicité (à une constante près) de la première fonction propre de l'opérateur p-laplacien a été montrée par Otani [7] pour $N=1$ et de Thelin [8] pour Ω une boule de $\mathbb{R}^N$ et pour des domaines généraux dans Barles [5] (ce dernier travail emploie des arguments du type Laetsch qui montrent aussi l'unicité pour $f(x, u) = f(u)$ convenable). Il est aussi intéressant de signaler les résultats d'unicité de Franchi, Lanconelli et Serrin [9] pour le cas de solutions radiales dans $\Omega = \mathbb{R}^N$. Finalement on remarque que l'unicité de solutions pour des problèmes plus généraux que (P) peut être démontrée par d'autres méthodes différentes : par exemple on peut introduire un changement d'inconnue pour arriver à des problèmes avec termes de perturbation monotones (*voir* Friedman-Phillips [10] pour $p=2$), on peut étendre la méthode de Laetsch à des opérateurs quasi linéaires plus généraux, etc. Ces points de vue seront développés dans Díaz-Saa [11] [*voir* aussi Díaz-Nochetto [12] pour un résultat de comparaison sous l'hypothèse (H_2)].

Démonstration du théorème 2. — *Condition nécessaire.* — Par définition, comme $u > 0$ sur Ω, on a [d'après (H_2)]

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a_0 |v|^{p-2} v) \leqq \frac{\displaystyle\int |\nabla u|^p - \int a_0 |u|^p}{\displaystyle\int |u|^p} < 0.$$

Pour montrer que $\lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty |v|^{p-2} v) > 0$ on prend $a \in L^\infty(\Omega)$ tel que $a(x) u(x)^{p-1} < f(x, u(x))$ et $a(x) \geqq a_\infty(x)$ p.p. $x \in \Omega$ [par exemple $a(x) = f(x, \|u\|_{L^\infty} + 1)/(\|u\|_{L^\infty} + 1)^{(p-1)}$]. Soit $\mu = \lambda_1(-\Delta_p v - a(x) |v|^{p-2} v)$. Par les multiplicateurs de Lagrange on obtient l'existence d'une fonction propre ψ (qui en plus est positive) telle que

$$(P_\mu) \qquad -\Delta_p \psi - a \psi^{p-1} = \mu \psi^{p-1} \quad \text{et} \quad \psi > 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \psi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Mais, $k\psi$ est aussi solution de (P_μ), si $k > 0$, et en appliquant le lemme 2 sur $\Omega_k = \{x \in \Omega : k\psi(x) > u(x)\}$ on déduit que

$$0 \leqq \int_{\Omega_k} \left(\frac{-\Delta_p u}{u^{(p-1)}} + \frac{\Delta_p (k\psi)}{(k\psi)^{p-1}}\right)(u^p - (k\psi)^p) = \int_{\Omega_k} \left(\frac{f(x, u)}{u^{p-1}} - (a(x) + \mu)\right)(u^p - (k\psi)^p).$$

Par définition de a on conclut que $\mu > 0$ en prenant k suffisamment grand. Finalement comme $\lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty |v|^{p-2} v) \geqq \mu$ on obtient (2).

Condition suffisante. — En fait, comme dans [1] on peut affaiblir (H_2) par

$$(H_2^*) \qquad \forall \delta > 0, \quad \exists C_\delta \geqq 0 \qquad \text{tel que } f(x, r) \geqq -C_\delta r^{p-1}, \qquad r \in [0, \delta], \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Dans ce cas on doit définir $a_0(x) = \liminf_{r \downarrow 0} f(x, r)/r^{p-1}$ et $a_\infty(x) = \limsup_{r \uparrow \infty} f(x, r)/r^{p-1}$.

Notons que l'on a encore $a_0(x) \geqq -C$ et $a_\infty(x) \leqq C$ p. p. $x \in \Omega$ pour une certaine constante $C>0$. D'une manière semblable à [1] on montre que la fonctionnelle d'énergie $E(u)$ dans (4) est coercive, s. c. i. pour la topologie faible de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et qu'il existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $E(v)<0$. Alors il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \geqq 0$ et $u \not\equiv 0$ tel que $E(u) = \min_{w \in W_0^{1,p}(\Omega)} E(w)$. Par troncature de f et en utilisant (par exemple) un résultat de Serrin [13] on trouve l'existence d'un minimum borné u de E qui satisfait (P).

Remarque 2. — On peut affaiblir les hypothèses du théorème 2: il suffit de supposer (H_2^*) et de supposer $a_0(x) > f(x, r)/r^{(p-1)}$ et $a_\infty(x) < f(x, r)/r^{(p-1)}$, $\forall r \in (0, \|u\|_{L^\infty}]$.

Remarque 3. — Une version détaillée du contenu de cette Note sera présentée dans Díaz-Saa [11]. Dans un travail en préparation nous appliquons les résultats de cette Note à l'étude du comportement asymptotique de l'équation parabolique $u_t = \Delta_p u^m$, avec $(p-1)m > 1$, dans un domaine borné.

Note reçue le 6 juillet 1987, acceptée le 17 juillet 1987.

Références bibliographiques

[1] H. Brezis et L. Oswald, *Nonlinear Analysis, T.M.A.*, 10, 1986, p. 55-64.

[2] R. Benguria, *Thèse*, Princeton University, 1979.

[3] R. Benguria, H. Brezis et E. Lieb, *Comm. Math. Phys.*, 79, 1981, p. 167-180.

[4] J. L. Vazquez, *Appl. Math. and Optimization*, 12, 1984, p. 191-202.

[5] G. Barles, *Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the p-laplacian*, preprint, décembre 1986.

[6] J. I. Díaz et J. E. Saa, Uniqueness of nonnegative solutions for elliptic nonlinear diffusion equations with a general perturbation term, communication faite en septembre 1985, *VIII C.E.D.Y.A.*, Santander (*Actes du colloque*, à paraître).

[7] M. Otani, *Nonlinear Analysis, T.M.A.*, 8, 1984, p. 1255-1270.

[8] F. de Thelin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 303, série I, 1986, p. 355-358.

[9] B. Franchi, E. Lanconelli et J. Serrin, *Existenza et unicitá degli stati fondamentali per equazioni ellittiche quasilineari*, preprint, octobre 1985, et travail en préparation.

[10] A. Friedman et D. Phillips, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 16, 1984, p. 153-163.

[11] J. I. Díaz et J. E. Saa, *Existence and uniqueness of nonnegative solution for second order quasilinear equations with a possible source term* (à paraître).

[12] J. I. Díaz et R. Nochetto, *Stability of the free boundary for quasilinear equations* (à paraître).

[13] J. Serrin, *Acta Math.*, 111, 1964, p. 247-302.

J. I. D. : *Departamento de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid*, 28040 *Madrid, Espagne;*

J. E. S. : *Escuela Universitaria de Estadística, Univ. Complutense de Madrid*, 28015 *Madrid, Espagne.*