Sonia Kovalevskaya

por

J.M. Méndez Pérez

A Pepa

1. Introducción

Cuando expliqué por primera vez, muy joven, el *Teorema de Cauchy-Kovalevskaya* –no me lo habían enseñado durante la carrera– no fui consciente de que el segundo coautor fuera una mujer, pues su apellido se solía transcribir Kowalewsky. Fue en un congreso, en una de las desaparecidas Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, cuando contemplé en un póster a una mujer joven, de rostro sereno y de una gran belleza: se trataba de Sonia Kovalevskaya. A partir de ahí comencé a conocer algo de su vida, a base de anécdotas, que quizás daban una idea desfigurada de uno de los personajes más interesantes de la historia reciente de la ciencia.

Al comenzar este trabajo pensé concentrarme exclusivamente en sus contribuciones matemáticas. Pronto caí en la cuenta de que es imposible dar una valoración objetiva de este personaje, incluso en la parte matemática, si no se analiza globalmente, en todos sus aspectos y facetas. Porque todo ello influyó en su carrera matemática que, a buen seguro, hubiera adquirido otras dimensiones si las circunstancias hubieran sido diferentes. Sus complejas relaciones familiares, sus ideales y compromisos políticos y sociales, su lucha agotadora por lograr la igualdad de derechos entre hombres y mujeres, sus inquietudes literarias, su azarosa vida personal... Huyendo de los aspectos más íntimos de esto último, más propio de la prensa rosa, en la segunda sección se hace un resumen de su biografía y en la tercera se analizan sus principales aportaciones en el campo de las matemáticas. En la cuarta se efectúa un sucinto repaso de sus actividades literarias, para concluir en la sección quinta con algunas consideraciones finales.

La bibliografía sobre Sonia Kovalevskaya es muy abundante. Para la parte biográfica hemos recurrido especialmente a A. H. Koblitz [8], considerada por todos los estudiosos de su vida como la mejor y la más completa de sus biografías, a su propia autobiografía [20], a [23] y a numerosas referencias que se pueden encontrar en Internet ([26],[27],[28]). Para analizar sus aportaciones matemáticas, aparte de acudir a las fuentes originales, el libro de R. Cooke [2] resulta excelente.

2. Compendio biográfico

Sofía Vasilevna Krukovskaya, más conocida como Sonia, nació el 15 de enero de 1850 en Moscú en el seno de una familia burguesa rusa. Su padre, Vasilii Vasilevich Krukovsky, fue general de artillería, y su madre, Elizaveta Fyodorovna Shubert, procedía de una familia alemana culta. Este matrimonio tuvo dos hijos más: la primogénita Anna, a la que llamaban familiarmente Aniuta, que nació en 1844, y su hermano menor, Fyodor, nacido en 1855. Los padres de Kovalevskaya tenían una buena formación y gozaban de una posición económica desahogada. Su padre se empeñó en ser reconocido como miembro de la nobleza, lo que consiguió finalmente al figurar en el árbol genealógico del monarca húngaro Matthew Corvus. Así pasó a apellidarse Korvin-Krukovsky.

Cuenta Kovalevskaya que cuando se trasladaron a vivir a su hacienda en Palibino (actualmente en Bielorrusia), les faltó material para empapelar las habitaciones y entonces utilizaron, para terminar de arreglar el cuarto de los niños, las notas de un curso de matemáticas recibido por su padre e impartido por el eminente matemático ruso M. V. Ostrogradski (1801-1862), célebre por compartir con Gauss el teorema de la divergencia. Dice Kovalevskaya que, con apenas siete u ocho años, se pasaba horas y horas mirando aquellos símbolos y fórmulas extrañas, tratando en averiguar qué página seguía a otra. También recuerda con cariño a su tío paterno Pyotr Vasilevich Krukovsky, que le hablaba con mucho entusiasmo de cuestiones matemáticas. Relata en [20]: *"...no podía a esa edad entender esos conceptos, pero actuaron sobre mi imaginación, inculcándome una veneración por las matemáticas como una ciencia elevada y misteriosa que abre a los iniciados en ella un mundo nuevo y maravilloso, inaccesible a la mayoría de los mortales"*.

Pero la inclinación de nuestro personaje por las ciencias proviene de su familia materna. Su tatarabuelo, Johann Ernst Schubert, fue un teólogo luterano alemán y su bisabuelo, Fyodor Ivanovich Shubert, emigró y trabajó como agrimensor en lo que hoy es Estonia. Fue un reconocido matemático y astrónomo, que mantuvo contacto con grandes matemáticos de la época, como Gauss, Laplace y Bessel. Su abuelo, Fyodor Fyodorovich, fue un reputado geodesta y cartógrafo. Finalmente, su único tío materno, Fyodor Shubert, la entusiasmaba explicándole temas relacionados con las ciencias, en particular, con la biología.

A pesar de que se trataba de una familia culta y con una buena situación económica, cuando el general Krukovsky se jubiló adquirió consciencia de que había desatendido la educación de sus hijos, por lo que contrató a un tutor polaco, Joseph Malevich. Éste describe a Kovalevskaya como una jovencita de apariencia agradable y atractiva, cuyos ojos marrones reflejaban una gran inteligencia y bondad, muy atenta y receptiva a sus clases, que asimilaba rápidamente. Malevich se ofendió porque Kovalevskaya aludió en sus *Recuerdos de la infancia* [20] a las enseñanzas matemáticas que recibía de su tío y no reconocía su labor. Sin lugar a dudas, Malevich tuvo una influencia decisiva en su formación, incluso matemática, aunque a ella le costaba reconocerlo, molesta por las declaraciones públicas de su tutor. Por el contrario, lo zahería más al alegar: *"Lo que mejor enseñaba Malevich era la aritmética... Pero confieso que la aritmética tenía poco interés para mí..."*.

Otro personaje importante en su vida fue un vecino de la familia, el físico N. P. Tyrtov. Su sorpresa fue mayúscula cuando vio que Kovalevskaya no sólo había leído un libro de física que le había dejado a su padre, sino que fue capaz de reconstruir por sí sola las fórmulas geométricas que precisaba para poder entender los capítulos de óptica. Por eso le pidió con insistencia a su padre, en principio renuente a que su hija estudiara matemáticas, que le permitiera proseguir sus estudios de esta ciencia, para lo cual daba sobradas muestras de estar capacitada. Y surtió efectos, porque Krukovsky le buscó un excelente profesor, A. N. Strannoliubsky, con quien Kovalevskaya progresó muchísimo en cálculo y quizás en otras áreas de las matemáticas.

Pero la persona que más influyó sobre ella fue su hermana Aniuta, a la que consideraba su madre espiritual. De gran belleza, al igual que Sonia, pero con un carácter más sociable y extrovertido, Aniuta se inclinó por la literatura –fue amiga del célebre literato ruso Dostoievsky– y se vio envuelta, con gran disgusto para sus padres, en las causas políticas más radicales.

Una vez finalizada su etapa en la enseñanza secundaria, Kovalevskaya pretendió ingresar en la universidad para continuar sus estudios en matemáticas. Y no sólo se encontró con la oposición de sus padres, sino con la más frontal del sistema. Para las mujeres resultaba imposible en aquella época ingresar en las universidades de casi todos los países y en la Rusia zarista a lo más que podían aspirar era a matricularse en una especie de *curso superior para mujeres*, en los que primaba la enseñanza literaria en detrimento de la científica.

Las dos hermanas pensaron en marcharse al extranjero, para lo cual una debería casarse. Entonces se puso de moda un tipo especial de matrimonio por conveniencia. Se buscaba a un hombre liberal, comprometido políticamente, que se prestara a fingir un matrimonio legal con el único objetivo de ayudar a su esposa a eludir las trabas y dificultades de una sociedad que discriminaba brutalmente a las mujeres. Después, cada uno haría la vida por su cuenta. Aniuta eligió a un publicista y editor que se movía en los ambientes políticos más radicales y con una gran afición por la biología, Vladimir Onufrievich Kovalevsky. Pero éste prefirió a Sonia, quizás por su formación científica. Tras algunas peripecias que no vienen a cuento, Sonia y Vladimir se casaron el 27 de septiembre de 1868, yendo a vivir a San Petersburgo, donde al menos podría asistir a algunas clases en la universidad, eso sí, siempre que fuera acompañada de su marido o tío. Allí conoció al matemático P. L. Chebyshev

(1821-1894), que se había enriquecido con negocios inmobiliarios. El destino hubiera sido totalmente distinto si las puertas de las universidades hubieran estado abiertas a las mujeres. En tal caso, lo más probable hubiese sido que Chebyshev se hubiese convertido en su maestro.


K. Weierstrass


P.L. Chebyshev

En 1869 Sonia y Aniuta, acompañadas por Vladimir, tras pasar por Viena se instalan en Heidelberg. Allí, aunque no era legal, si los profesores lo autorizaban podría asistir a clase. Así consiguió escuchar a magníficos profesores, como Hermann von Helmholtz (1821-1894), G. R. Kirchhoff (1824-1887), R. W. Bunsen (1811-1899), Leo Königsberger (1837-1921) y Paul DuBois-Reymond (1831-1889). Kovalevskaya supo en seguida que si quería progresar en su carrera académica, tenía que buscar el apoyo de un personaje poderoso. Por esta razón se trasladó a Berlín para trabajar con Karl Weierstrass (1815-1897), el fundador del moderno análisis matemático y una de las figuras cumbres de las matemáticas del siglo XIX. Por cierto, no sería el primer contacto de Weierstrass con un miembro de la familia de Sonia. Ciertamente, en un trabajo escrito en 1861 sobre geodésicas en una elipsoide general, Weierstrass cita a Fyodorovich, abuelo de Kovalevskaya, por los artículos que éste realizó sobre la forma de la Tierra. Kovalevskaya sabía que, aunque no pudiera entrar en la universidad, si lograba trabajar con Weierstrass, recogería suficiente crédito y le abriría muchas puertas, por ejemplo, a la hora de conseguir un puesto de trabajo.

Tres fueron las razones que obligaron a Weierstrass, un fervoroso católico y recalcitrante soltero que también se oponía a la presencia de la mujer en la universidad, a cambiar de opinión. Primero, que como consecuencia de la guerra franco-prusiana, el número de sus alumnos disminuía alarmantemente;

segundo, que venía recomendada por sus amigos y colegas de la universidad de Heidelberg; y tercero, que Kovalevskaya superó la prueba –resolver un conjunto de problemas– a la que le sometió, con rapidez y originalidad. Como no obtuvo permiso de las autoridades para que asistiera a clase, Weierstrass decidió darle clases particulares dos veces por semana, convencido ya del talento que atesoraba esta mujer.

Merece la pena recordar esta anécdota de Kovalevskaya. Bunsen había jurado que ninguna mujer pisaría su laboratorio de química y menos aún si era rusa. Así rechazó a Yuliya Lermontova, amiga de Kovalevskaya. Sonia visitó a Bunsen que, impresionado por su belleza y su encanto natural, modificó su postura. Poco después alertó a Weierstrass, haciéndole saber que Kovalevskaya era una mujer peligrosa.

Sonia y Vladimir hicieron algunos viajes por Europa. En uno de ellos visitaron Inglaterra, donde conocieron a Charles Darwin –el creador de la moderna teoría de la evolución–, al biólogo Thomas Huxley y a George Elliot, seudónimo de la famosa novelista inglesa Mary Ann Evans (1819-1880). Entre tanto, Aniuta y su compañero Víctor Jaclard se habían trasladado a París, que estaba sitiada por las tropas germanas, y vivieron en la Comuna. A Sonia no se le ocurrió otra cosa que visitar a su hermana. Allí se sintió útil, ayudando a los defensores como enfermera. Regresó a Berlín poco antes de que cayera la ciudad. Las peleas y desavenencias eran cada vez más frecuentes en la pareja, hasta que un día Sonia explicó a Weierstrass –que estaba confuso con la forma tan extraña de comportarse que tenían estos supuestos esposos– cuál era la situación real de su matrimonio. Para ayudarla, Weierstrass se ofreció a dirigirle la Tesis. Tras dos años de intenso trabajo Kovalevskaya escribió tres trabajos, dos de los cuales –según Weierstrass– eran más que suficientes cada uno por separado para acceder al grado de Doctor:

1. *Sobre la teoría de ecuaciones en derivadas parciales*

2. *Sobre la reducción de cierta clase de integrales abelianas de rango tres a integrales elípticas*

3. *Notas suplementarias y observaciones sobre la investigación de Laplace sobre la forma de los anillos de Saturno*

Con su influencia logró que la universidad de Gotinga autorizara en 1874 la lectura de la Tesis *in absentia*, es decir, sin la habitual defensa oral. Temía Weierstrass no sólo el poco dominio que todavía tenía Kovalevskaya del idioma alemán, sino que masacraran a su pupila a base de preguntas, por el mero hecho de ser una mujer. Así pues, 1874 se convirtió en un año de éxitos: Vladimir había alcanzado el grado de Doctor en Geología por la universidad de Jena dos años antes, Yuliya Lermontova en Química por la de Gotinga, y ella en Matemáticas –la primera mujer en la historia que lo hacía– por esta última universidad.

Regresa a Rusia en 1875 y los siguientes cuatro años allí son de casi total inactividad matemática. No encuentra trabajo y la herencia que recibe de su padre –fallecido en 1874– la invierte la pareja en negocios inmobiliarios imitando a Chebyshev, con el objetivo de lograr una posición económica suficientemente holgada que les permitiera sacar adelante sus proyectos académicos. Poco después deciden poner fin a su matrimonio ficticio, viviendo como una auténtica pareja. Kovalevskaya, al no conseguir una plaza de matemáticas en ninguna universidad, ocupa su tiempo frecuentando los círculos culturales y en la literatura, escribiendo numerosos artículos y reseñas teatrales en la prensa. En octubre de 1878 nace su hija Sofía Vladimirovna Kovalevskaya, a la que llamaban cariñosamente Fufa.

En 1879 fracasan estrepitosamente los negocios de su marido y las relaciones entre ellos se deterioran más cada día que pasa. Kovalevskaya, que ya había reanudado la correspondencia con Weierstrass, acude al Sexto Congreso de Matemática y Física celebrado en enero de 1880 en San Petersburgo, donde –a petición de Chebyshev– da una charla sobre uno de los tres trabajos que constituyeron su Memoria Doctoral, concretamente el relativo a la reducción de integrales abelianas. A este congreso asistió el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), alumno asimismo de Weierstrass y que junto con él, fueron las personas que desempeñaron un papel clave en su carrera universitaria. Mittag-Leffler, que ya había conocido a Kovalevskaya en San Petersburgo, quedó prendado no sólo por su belleza, dulzura y bondad, sino también por su gran talento matemático, por lo que se propuso buscarle a toda costa una plaza en la universidad. Afortunadamente Mittag-Leffler dejó la universidad de Helsinki, en Finlandia, y se integró en la recién inaugurada de Estocolmo, mucho más moderna y liberal que las otras universidades suecas de Upsala y Lund. A fin de incrementar su currículum, Kovalevskaya se puso a trabajar en un problema que le planteó Weierstrass.

G. Mittag-Leffler

Pero a los momentos dedicados a la investigación siguen otros de crisis e inestabilidad. Tiene que solicitar un préstamo para afrontar las deudas de su marido. En 1881 visita a Weierstrass en Berlín y al año siguiente viaja a París, donde frecuenta otra vez los círculos políticos más radicales. Por otra parte, tras el asesinato del Zar Alejandro II se produce una enérgica represión de los movimientos revolucionarios. Era bien conocida la simpatía que Kovalevskaya sentía por el nihilismo, movimiento que se desarrolló en Rusia a mediados del siglo XIX y totalmente opuesto al orden social y político imperante. Surgió como consecuencia de la desesperanza sobre todo de los jóvenes intelectuales procedentes de las clases pobres, desilusionados por la falta de unas profundas y necesarias reformas políticas. Los nihilistas creían que una sociedad reconstruida científicamente garantizaría la felicidad de la humanidad. Kovalevskaya había solicitado una plaza a las autoridades universitarias de su país. Si ya era difícil que le dieran una respuesta afirmativa, estas afinidades políticas suyas originaron una definitiva y rotunda negativa.

Precisamente estando en París recibía la noticia del suicidio, el 27 de abril de 1883, de su marido Vladimir quien, sumido en una profunda depresión, fue incapaz de soportar los fracasos de sus negocios y la acusación de fraude que pesaba sobre él. Este hecho sumió a Kovalevskaya –que sentía remordimientos por este trágico final– en un estado de absoluto abatimiento y abandono, llegando sus amigos más cercanos a temer por su vida. Afortunadamente logró superar esta situación debido fundamentalmente a la evasión que significaba para ella el reanudar sus investigaciones y estudios matemáticos.

Gracias a Mittag-Leffler consigue un nombramiento provisional para dar clases en la universidad de Estocolmo, donde sus disertaciones tienen muy buena acogida y destaca como una excelente profesora. El 30 de enero de 1884 da su primera clase. Entre los asistentes figuró Ivar Otto Bendixson (1861-1935), que posteriormente se convertiría en un reconocido matemático por sus estudios sobre teoría de conjuntos y fundamentos de las matemáticas, topología y comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden cerca de puntos singulares –recuérdese el famoso *Teorema de Poincaré-Bendixson*–. Por cierto, al principio eran los propios alumnos los que pagaban el salario a Kovalevskaya.

Pronto pasa a formar parte del equipo editorial de la revista *Acta Mathematica*, fundada por Mittag-Leffler, que continúa siendo una de las revistas matemáticas más prestigiosas que se publican. Sus buenos contactos con los matemáticos rusos le permiten surtir a esta publicación de excelentes trabajos y, a cambio, actuó de puente de comunicación entre los matemáticos rusos y los de los restantes países de Europa.

Pero las discriminaciones de género seguían. No le dieron permiso para cuidar a su hermana Aniuta, que falleció en 1887, y su sueldo era muy inferior al de sus colegas masculinos con iguales funciones. Se debe subrayar el enorme celo que puso Mittag-Leffler en la tarea de conseguirle cada vez mejores emolumentos, incluso en alguna ocasión a costa de su bolsillo. En todo caso, no se puede negar que su situación había mejorado muchísimo. Si no fuera por la tragedia que significó, la muerte de Vladimir resultó positiva para la futura carrera universitaria de Kovalevskaya: era una mujer viuda, respetada, con una hija legítima y libre. Sobre todo, libre. Además, estaba progresando bastante en la resolución del problema que le planteó su maestro.

Por caprichos del destino un paquete postal dirigido a un tal Sr. M. Kovalevsky terminó por error en manos de Kovalevskaya. Se trataba de un reconocido jurista e historiador social ruso, Maksim Kovalevsky (1851-1916), pariente lejano de Vladimir, que se convirtió en su segundo gran amor.

Cuando creyó que tenía resuelto el problema que le ocupaba ya tanto tiempo, se lo comunicó a varios matemáticos franceses, entre ellos, a Charles Hermite. Pensaron que el tema que investigaba Kovalevskaya era muy adecuado para el concurso del Premio Bordin correspondiente al año 1888, que otorgaba la Academia de Ciencias de París. Este tema ya había sido propuesto por la Academia Prusiana de Ciencias para ser fallado a principios del mes de julio de 1855, coincidiendo con el cumpleaños de G. W. Leibniz [2], con las siguientes condiciones:

> *Integrar las ecuaciones del movimiento de un cuerpo sólido que gira alrededor de un punto fijo, sobre el que no actúa ninguna fuerza externa salvo la gravitatoria, mediante series que representen explícitamente como funciones del tiempo todas las cantidades requeridas para determinar el movimiento.*

Este premio quedó desierto y también en la convocatoria de 1858. Por lo tanto, se trataba de la tercera vez que se planteaba la misma cuestión: *resolver las célebres ecuaciones de Euler* ([16],[17],[18]), asunto al que volveremos más adelante. En el Comité encargado de juzgar los trabajos presentados figuraban matemáticos de la categoría de Charles Hermite (1822-1902), J. L. F. Bertrand (1822-1900), Camille Jordan (1838-1922) y J. G. Darboux (1842-1917). Como era de esperar, el premio de ese año fue concedido a Kovalevskaya, siendo su valor incrementado de 3.000 francos a 5.000 francos, debido a las dificultades del problema propuesto y a la brillantez de la solución dada. Ello significó el espaldarazo definitivo a la carrera de Kovalevskaya y un merecido reconocimiento a su trabajo en matemáticas, donde siempre le exigían más –y tenía que demostrar más– que a sus compañeros masculinos. Por fin, consiguió una victoria en su lucha por lograr la igualdad de derechos entre hombres y mujeres en el mundo, al menos en el mundo universitario: la primera mujer que recibía un premio de esta categoría y del que tan pocos hombres podían presumir de ostentarlo.

Pero Kovalevskaya tenía también su carácter y a veces tomaba decisiones difíciles de entender. Si creía que tenía derecho a algo o decidía emprender un nuevo camino, no dudaba en romper amarras y seguir su rumbo. Tenía razón: ¿por qué le pagaban menos si realizaba el mismo trabajo que un hombre? Pero no valoraba que entonces el grave problema de la discriminación que sufrían las mujeres no tenía fácil solución y que, en este sentido, Weierstrass y Mittag-Leffler tuvieron que emplearse a fondo para que ella pudiera alcanzar las altas metas que se había propuesto. Incluso no se recataba de airear entre sus amigos suecos el aburrimiento que ya le producía vivir en Estocolmo. En esa época informó a Weierstrass de sus deseos de obtener el doctorado por una universidad gala, para poder nacionalizarse francesa y poder ingresar en una universidad de ese país. Weierstrass puso el grito en el cielo y le advirtió seriamente que ello constituiría una afrenta para la universidad de Gotinga, que tan generosamente se había portado con ella, lo que probablemente conllevaría la revocación de su grado de Doctor por dicha universidad. ¡Y a todas estas, Mittag-Leffler le había conseguido una plaza vitalicia en la universidad de Estocolmo! Finalmente desistió de sus planes y siguió en Suecia.

Ahora era famosa y le dispensaban honores y homenajes. Su amigo Chebyshev logró que fuera nombrada miembro honoraria de la Academia de Ciencias de San Petersburgo y, por una modificación de su trabajo sobre el problema de rotación de un cuerpo, recibió un premio del Rey Oscar II de Suecia.

Después de disfrutar de unos días de vacaciones con Maksim Kovalevsky en Génova (Italia) a finales del año 1890, regresó en solitario a Suecia. El viaje de retorno fue muy accidentado, contrajo un fuerte catarro que degeneró en una neumonía y falleció en Estocolmo el 10 de febrero de 1891, cuando apenas tenía 41 años de edad. Como suele ocurrir en estas circunstancias, después de su muerte la fama de Kovalevskaya se incrementó hasta el extremo de convertirse en un mito. Las muestras de condolencia, los homenajes y el reconocimiento se extendieron por todo el mundo. Sólo desentonó al respecto el Ministro ruso del Interior, I. N. Durnovo [25], que declaró que *"se estaba prestando demasiada atención a una mujer, que al fin y al cabo, era una nihilista"*. Su hija Fufa, que fue adoptada por su amiga Yuliya Lermontova, se licenció en física y murió en el año 1951 soltera y sin dejar descendencia.

3. Trabajos matemáticos

Kovalevskaya publicó una decena de artículos matemáticos, todos los cuales aparecen enumerados en las referencias. Dos de ellos ([14],[15]) son el mismo trabajo pero escritos en distintos idiomas, y tres ([16],[17],[18]) se refieren al tema que le llevó a ganar el Premio Bordin de la Academia de Ciencias de París. A continuación los comentamos brevemente.

3.1 Teoría de ecuaciones en derivadas parciales

Se debe a A. L. Cauchy (1789-1857) el estudio por primera vez de la convergencia de las soluciones de ciertas clases de ecuaciones diferenciales obtenidas mediante desarrollos en serie por la técnica de los coeficientes indeterminados. Cauchy veía un paralelismo entre el papel desempeñado por los números complejos en el estudio de las ecuaciones algebraicas y el que presentía que jugaría la teoría de las funciones de variable compleja en el campo de las ecuaciones diferenciales. Estaba convencido de que se podía establecer en este campo un teorema análogo al fundamental del álgebra, que cabría enunciar así: *toda ecuación diferencial con coeficientes analíticos posee una solución analítica* [2].

Para ello ideó el conocido hoy como método de las funciones mayorantes. Consiste, en pocas palabras, en lo siguiente: si $f(t,x)$ es una función analítica en un dominio que contiene el origen y pretendemos resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = \sum_{k,j=0}^{\infty} a_{j,k} t^j x^k \ , \tag{1}$$

se ensaya buscando soluciones en forma del desarrollo en serie potencial $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, cuyos coeficientes se determinarán resolviendo un sistema algebraico que resultará al sustituir esta última expresión formalmente en (1). Ahora la función $f(t,x)$ se reemplaza por otra $F(t,X) = \sum_{k,j=0}^{\infty} A_{j,k} t^j x^k$ de coeficientes no negativos tales que $|a_{j,k}| \leq A_{j,k}$, y elegimos asimismo $C_0 > 0$ de modo que $|c_0| \leq C_0$. Entonces el problema

$$\frac{dX}{dt} = F(t,X)$$

admite una solución formal $X = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$, donde $|c_n| \leq C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se pueden obtener formas muy sencillas de $F(t,X)$ [6, p. 49] que facilitan enormemente la demostración de la convergencia de la serie que representa dicha solución $X = X(t)$ y, por consiguiente, de la serie que da la solución del problema original (1). Con este procedimiento Cauchy estudió en 1842 la existencia de soluciones de una clase amplia de ecuaciones diferenciales ordinarias y también de ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales de primer orden, si bien es cierto que no trató cuestiones como la unicidad y la prolongación de soluciones [2], ni demostró –lo dio por hecho– que las condiciones iniciales determinan las soluciones. Aun así se denomina problema de Cauchy al planteado mediante una ecuación diferencial, ordinaria o en derivadas parciales, acompañada de ciertos datos iniciales.

Weierstrass también estuvo interesado en este tipo de problemas por aquellos mismos años, si bien por otras razones. El matemático alemán estaba entonces inmerso en la investigación de las integrales abelianas y la teoría de funciones analíticas. Lo que le atraía de las ecuaciones diferenciales era, precisamente, la posibilidad de definir funciones analíticas a partir de sus soluciones. Por métodos análogos, pero independientemente de Cauchy, estudió sistemas de ecuaciones diferenciales, destacando dos detalles novedosos: las condiciones iniciales determinan unívocamente las soluciones y la prolongación de éstas. Parece lógico, pues, que propusiera a Kovalevskaya que investigara más profundamente este campo.

En su trabajo *Sobre la teoría de ecuaciones en derivadas parciales* [10], Kovalevskaya estudió el sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales

$$\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, ..., \varphi_n) \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad \gamma = 1, 2, ..., n,$$

o más generales

$$G^{(\gamma)}(\varphi_1,...,\varphi_n)\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}G^{(\gamma)}_{\alpha\beta}(\varphi_1,...,\varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha}+G^{(\gamma)}_{00}(\varphi_1,...,\varphi_n),$$

$\gamma=1,2,...,n$, donde $G^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ y $G^{(\gamma)}$ son funciones analítica en un entorno del origen, demostrando –mediante el método de las mayorantes de Cauchy y Weierstrass– que las series obtenidas formalmente convergen en realidad en algún dominio y que satisfacen efectivamente las ecuaciones dadas. Para ello considera este otro sistema

$$\frac{\partial\psi_\gamma}{\partial x}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}\overline{G}^{(\gamma)}_{\alpha\beta}(\psi_1,...,\psi_n)\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_\alpha},$$

$\gamma=1,2,...,n$, donde $\overline{G}^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ es la mayorante de $G^{(\gamma)}_{\alpha\beta}$ dada por

$$\overline{G}^{(\gamma)}_{\alpha\beta}(\psi_1,...,\psi_n)=\frac{G}{1-\frac{\psi_1+\psi_2+...+\psi_n}{g}},$$

para ciertas constantes positivas G y g ([10, p. 8], [2, p. 31]). Uno de los logros brillantes de este trabajo es la introducción por parte de Kovalevskaya –quizás inspirada en Jacobi [2, p.30]– del concepto de forma normal de una ecuación en derivadas parciales. Si se tiene la ecuación

$$G\left(x,x_1,...,x_r,\varphi,...,\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\varphi}{\partial x^\alpha\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_r^{\alpha_r}},...\right)=0, \tag{2}$$

(Kovalevskaya se limitó a considerar un polinomio G, pero vale para funciones más generales) y la derivada mayor presente en (2) es de orden n, diremos que la ecuación está en *forma normal* si algunas de las derivadas puras (es decir, respecto de una única variable) de orden n figura en (2) y es posible despejarla. Ello le permite demostrar el que hoy se conoce como *Teorema de Cauchy-Kovalevskaya* en el caso general, esto es, para ecuaciones en derivadas parciales arbitrarias ([5],[7],[24]).

Conviene resaltar que en este trabajo [10, p.22], Kovalevskaya prueba que no siempre una ecuación en derivadas parciales con coeficientes analíticos y condiciones iniciales analíticas tiene solución analítica. Su contraejemplo asombró a Weierstrass por su sencillez y elegancia. El problema de valores iniciales para la ecuación parabólica

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$
$$\varphi(0,y)=\frac{1}{1-y},$$

origina como posible solución la serie

$$\varphi(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(2m+2n)!}{(2m)!n!} x^n y^{2m}$$

Pero si $x \neq 0$, esta serie diverge, ya que

$$\varphi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$$

tiene radio de convergencia igual a cero. Luego, este problema no admite ninguna solución $\varphi(x,y)$ analítica en un entorno de $x = 0$. Sin embargo, si la ecuación se considera en forma normal y las condiciones iniciales se fijan en la variable correcta, o sea, si planteamos el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \varphi(x, y_0) &= f(x) \\ \frac{\partial \varphi(x, y_0)}{\partial y} &= g(x), \end{aligned}$$

siempre tiene solución analítica en un entorno de (x_0, y_0), supuesto que f y g son analíticas en $x = x_0$.

Este trabajo formó parte de su Tesis Doctoral y fue muy bien acogido por la comunidad matemática, desempeñando todavía un papel fundamental en la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

3.2 Integrales abelianas

Se dice que $\int R(z,w)dz$ es una integral abeliana si $R(z,w)$ es cualquier función racional de las variables z y w, que a su vez están relacionas por la ecuación algebraica $F(z,w) = 0$. Cuando la ligadura entre las variables z y w es $w^2 = f(z) = a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$, la integral $\int R(z,w)dz$ se llama elíptica (que originan las funciones elípticas jacobianas). Si $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$ (donde g_2 y g_3 denotan las invariantes de Weierstrass, véase [4, vol. II, p. 305]), de la inversión de las correspondientes integrales surgen las funciones elípticas weierstrassianas. Si la ligazón algebraica es de la forma $w^2 = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n$, $n \geq 5$, se denominan integrales hiperelípticas.

Weierstrass propuso a Kovalevskaya que estudiara algunas situaciones degeneradas, es decir, cuando una cierta clase de integrales abelianas se reduce a integrales elementales o a integrales elípticas. En su trabajo *Sobre la reducción de una clase de integrales abelianas de rango tres a integrales elípticas* [11] aborda esta cuestión, que no era capital en esta teoría. Hay que tener presente que en el siglo XIX las investigaciones de las integrales abelianas y elípticas, así como de las funciones elípticas, las funciones ϑ y Θ, las funciones σ de Weierstrass y sus interconexiones [4] era un campo muy fecundo y con una febril actividad, donde trabajan los más prestigiosos matemáticos de la época, desde L. Euler (en el siglo anterior), pasando por A. M. Legendre (1752-1833), A. L. Cauchy (1789-1857), C. G. J. Jacobi (1604-1851), K. Weierstrass, Ch. Hermite (1822-1901), G. F. B. Riemann (1826-1866)... Podemos imaginarnos, ante esta pléyade de matemáticos galácticos, no sólo el volumen de trabajos y artículos sobre estos temas, sino también su excepcional calidad. Tan sólo Weierstrass en sus obras completas dedica más de quinientas páginas a estos tópicos. Kovalevskaya tuvo que familiarizarse, conocer y dominar gran parte de esta vasta producción para afrontar con éxito el encargo de su maestro. Y lo hizo con elegancia y competencia, aunque en realidad el tema no despertaba gran interés, eclipsado por los resultados alcanzados por tantas figuras. Pero todo el mundo le reconoció su trabajo porque, como destacó el propio Weierstrass, en él se reflejaba el extraordinario talento matemático de esta mujer. De hecho, como resalta R. Cooke [2], si hubiera que buscar un área de las matemáticas en que Kovalevskaya fuera considerada una especialista, ésta sería la de las integrales abelianas. Por cierto, ello le sería de gran utilidad cuando abordó posteriormente la investigación del movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo.

3.3 Sobre la forma de los anillos de Saturno

P. S. Laplace (1749-1827) había asumido que la sección transversal del anillo de Saturno (entonces se creía que este extraño planeta sólo poseía un anillo) tenía forma elíptica. En su artículo *Notas suplementarias y observaciones sobre la investigación de Laplace sobre la forma de los anillos de Saturno*[12], Kovalevskaya establece que es ovalado. Se trata del trabajo más aplicado de nuestro personaje, pero realmente tiene más importancia por su contenido matemático. En efecto, primeramente intenta calcular el potencial del anillo en un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de coordenadas cilíndricas $(\rho_1, \theta_1, z_1) = (1 - cos\ t, \theta_1, a\varphi(t_1))$. Si se supone que el cuerpo ocupa una región B del espacio, el potencial gravitatorio viene dado por la integral $V = -\frac{1}{2}\int\int cos\ \theta\ d\sigma$, extendida a la frontera de B. En la evaluación de esta integral comparecen funciones elípticas completas ([2, p. 77], [4, vol. II, p. 317]). Entonces parametriza la superficie según

$$x = (1 - a\ cos\ t) cos\ \psi$$

$$y = (1 - a\ cos\ t) sen\ \psi$$

$$z = a\ \varphi(t)$$

y supone sin más que $\varphi(t) = \beta\ sen\ t + \beta_1\ sen\ 2t + \beta_2\ sen\ 3t + ...$ El potencial no depende de θ y, por simetría, es una función par de t_1, de modo que puede escribir el desarrollo en serie de Fourier $V = V_0 + V_1\ cos\ t_1 + V_2\ cos\ 2t_1 + ...$, y, análogamente $M(\rho_1^2 + z_1^2)^{-\frac{1}{2}} = m_0 + m_1\ cos\ t_1 + m_2\ cos\ 2t_1 + ...$ Finalmente impone el principio de conservación de la energía

$$V(\rho_1, z_1) + M(\rho_1^2 + z_1^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}n^2\rho_1^2 = C,$$

donde las constantes C y n pueden ser determinadas. Así llega al sistema de infinitas ecuaciones

$$\begin{aligned}
&V_0 + m_0 + \tfrac{1}{2}n^2(1 + \tfrac{a^2}{2}) - C = 0\\
&V_1 + m_1 - n^2 a = 0\\
&V_2 + m_2 + \tfrac{n^2}{2}a^2 = 0\\
&V_j + m_j = 0,
\end{aligned}$$

para $j = 3, 4, ...$, donde se supone que las cantidades V_j y m_j vienen expresadas en términos de los coeficientes de Fourier β_j [2]. Resolver este sistema ahora en n, C y los β_j es una empresa complicadísima. Si a estas dificultades se añade el descubrimiento de J. C. Maxwell de que habían varios anillos y que éstos no eran continuos sino que estaban constituidos por partículas (hoy se distinguen en esta extraña estructura tres zonas separadas –tres anillos– y se sabe que las partículas son de hielo amónico, siendo su masa muy pequeña comparada con la del planeta), no es de extrañar que Kovalevskaya se desanimara y no pusiera mucho empeño en perfeccionar su trabajo.

3.4 Sobre la refración de la luz y las ecuaciones de Lamé

Un curioso personaje –introdujo la quinina para el tratamiento de la malaria–, el astrónomo real danés Erasmus Bartholin (1625-1698), descubrió la doble refracción de la luz cuando atraviesa un cristal de espato de Islandia (una clase de calcita). Christian Huyghens (1629-1695) trató de buscar explicaciones al hecho de que si la luz sigue una dirección distinta a la del eje óptico se originan dos haces con velocidades diferentes. A. J. Fresnel (1788-1827) descubrió cristales que poseen dos ejes de simetría en lugar del único que tiene la calcita y demostró que, cuando el desplazamiento forma ángulos X, Y, Z con los ejes respectivos, las componentes de la fuerza son

$$\begin{aligned}
p &= a\ cosX + h\ cosY + g\ cosZ\\
q &= b\ cosY + h\ cosX + f\ cosZ\\
r &= c\ cosZ + g\ cosX + f\ cosY
\end{aligned}$$

donde (a, h, g), (h, b, f) y (g, f, c) son las componentes de un desplazamiento unitario a lo largo de los ejes X, Y, Z. Fresnel llegó a deducir la ecuación diferencial de la superficie de ondas

$$\Big(z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\Big(y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}\Big) + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}(a^2 - b^2)\Big(z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\Big) + \Big(a^2x\frac{\partial z}{\partial y} - b^2y\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big(1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2\Big) = 0 \quad (3)$$

Posteriormente, M. G. Lamé (1795-1870), partiendo de las leyes de la mecánica newtoniana, dedujo las condiciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \rho X_0 = 0 \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \rho Y_0 = 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \rho Z_0 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

donde las tres componentes de la fuerza en un plano paralelo al plano coordenado YOZ son N_1 normal y T_2, T_3 tangentes al plano, y el mismo significados para las demás incógnitas; (X_0, Y_0, Z_0) son las componentes de la aceleración de la partícula en el punto (x, y, z) y ρ es la densidad del medio. Como en el caso de Fresnel, con sólo seis cantidades se puede determinar las nueve componentes de tres vectores tridimensionales. El desplazamiento (u, v, w) de una partícula en un medio incompresible satisface, con notación actual, la ecuación $div(u, v, w) = 0$. Como la amplificación es proporcional a la tensión, Lamé demostró que cada una de las seis componentes presentes en (4) debe tener la forma

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} + C\frac{\partial w}{\partial z} + D\Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) + E\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big) + F\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)$$

Ante las dificultades de cálculo, Lamé consideró formas particulares para el desplazamiento

$$\begin{aligned} u &= \xi\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx + ny + pz}{l}\right) \\ v &= \eta\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx + ny + pz}{l}\right) \\ w &= \zeta\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx + ny + pz}{l}\right) \end{aligned}$$

siendo ξ, η, ζ los cosenos directores del desplazamiento, ω la amplitud de la onda, τ el periodo, l la longitud de onda y m, n, p los cosenos directores del rayo de luz. Tras un tedioso proceso, llegó a obtener las conocidas como *ecuaciones de Lamé*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\Big)-b^2\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\Big)-c^2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\Big)-a^2\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\Big)
\end{aligned}\tag{5}$$

Finalmente, tras un arduo proceso, llega a la misma expresión para la superficie de onda que la obtenida por Fresnel como solución de la ecuación (3) y, al tratar de describir la radiación de la luz de una fuente puntual –que supone que se extiende homotéticamente– halla para la amplitud de la vibración la fórmula

$$\frac{2\epsilon}{b\sqrt{a^2-c^2}\ sen\ i\ sen\ i'}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

donde i e i' denotan los ángulos que forma el rayo de luz con los dos ejes ópticos. Pero encontró problemas, como que la amplitud se hace infinita en el origen debido a la presencia del factor $(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, en cuya justificación recurre al éter, sustancia que supuestamente llena el espacio.

Aunque a Weierstrass se le puede considerar como el prototipo de matemático puro, solía en sus clases plantear cuestiones físicas para ilustrar sus exposiciones teóricas y en 1856 presentó una ponencia en el Congreso de Científicos de Alemania sobre el camino descrito por un rayo de luz al atravesar varios medios contiguos con superficies de refracción esféricas. Weierstrass pidió a Kovalevskaya que trabajara en este tema y le dio a conocer una técnica inédita suya con la que él pensaba que se podía resolver el problema [2]. Esta técnica se basa en el hecho de que un rayo de luz OP que pasa por el origen corta a una superficie S en un único punto P_1. Entonces, el lugar geométrico de los puntos $t = const.$, donde t denota el cociente entre las distancias OP y OP_1, es otra superficie σ_t análoga a S. Weierstrass, por el teorema de la divergencia, encontró la fórmula básica

$$D_t\int_{(t_0\ldots t)} D_u F(u,v,w)d\omega = D_t^2\int_{(t_0,\ldots,t)} u'F(u,v,w)d\omega, \tag{6}$$

donde $(t_0...t)$ indica que la integral se extiende a la región comprendida entre las superficies σ_{t_0} y σ_t. Con esta fórmula Weierstrass consigue resolver ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y problemas más complejos, como sistemas de ecuaciones de la clase

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+a^2\Big(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x})\Big)-b^2(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z})=X$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+a^2\Big(\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z})-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y})\Big)-b^2(\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z})=Y$$
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+a^2\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z})\Big)-b^2(\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2})=Z,$$

conocidos los valores iniciales de las incógnitas ξ, η, ζ y sus derivadas parciales primeras respecto de t. Como se puede observar, este sistema es bastante parecido al (5) de Lamé.

Kovalevskaya creyó que los problemas que se le presentaban a Lamé procedían de que éste eligió una expresión incorrecta para las soluciones de (5). Por ello buscó soluciones de la forma

$$\begin{aligned}\xi&=D_t\Big(\int_{t_0\ldots t}\varphi_1(u,v,w)f(x+u,y+v,z+w)d\omega\Big)\\ \eta&=D_t\Big(\int_{t_0\ldots t}\varphi_2(u,v,w)f(x+u,y+v,z+w)d\omega\Big)\\ \zeta&=D_t\Big(\int_{t_0\ldots t}\varphi_3(u,v,w)f(x+u,y+v,z+w)d\omega\Big)\end{aligned}\tag{7}$$

Tras un complicado proceso a lo largo del cual utiliza la fórmula (6), prueba la existencia de una función φ tal que *grad* $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, denota $(\psi_1,\psi_2,\psi_3)=$ *grad* $\varphi\times$ *grad* θ y asume que *grad* $\psi=a^2(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$, Kovalevskaya reduce las ecuaciones de Lamé al sistema

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial w}-\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial u}, &&\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial w}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial v}\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial w}, &&\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial w}-\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}=-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ &\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial w}=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}, &&\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}=-\frac{\partial\varphi}{\partial w}\end{aligned}$$

Supone entonces que $\theta(u,v,w)=t$ define la superficie σ_t, estableciendo ingeniosamente que debe coincidir con la superficie de onda, en cuya parametrización intervienen las funciones elípticas de Jacobi *sn*, *cn*, *dn* [4]. Finalmente concluye que la solución del sistema (5) es [13, p. 297]

$$
\begin{aligned}
\xi &= t\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}\frac{1-k^2}{b} sn\, u_1\, \overline{sn}\, u_2\, \overline{cn}\, u_2\, f(x+u, y+v, z+w) du_1 du_2 \\
\eta &= t\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L} -\frac{1}{a} cn\, u_1\, \overline{sn}\, u_2\, \overline{dn}\, u_2\, f(x+u, y+v, z+w) du_1 du_2 \qquad (8) \\
\zeta &= t\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}\frac{1}{a} dn\, u_1\, \overline{cn}\, u_2\, \overline{dn}\, u_2\, f(x+u, y+v, z+w) du_1 du_2
\end{aligned}
$$

Sin embargo, Vito Volterra (1860-1940) demostró que estos resultados son incorrectos. En las anteriores fórmulas –le escribió a Mittag-Leffler [2]– se ve que tanto las funciones ξ, η, χ como sus derivadas parciales $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ se anulan en $t = 0$ y, por tanto, la solución se reduce a la trivial, ya que el sistema de Lamé es homogéneo, lo cual es imposible. También le señalaba que si se toma $f(x, y, z) = y$ se obtiene a partir de (8) unas expresiones sencillas que no satisfacen el sistema (5). Se cuenta que Kovalevskaya se enfadó mucho con Weierstrass porque éste no detectó ningún error y tampoco Runge, que actuó de referee, pero ello no se ajusta a la verdad. En efecto, cuando Volterra comunicó a Mittag-Leffler que el artículo contenía errores, Kovalevskaya ya había fallecido.

Es muy difícil enteder cómo Kovalevskaya y Weierstrass no se dieron cuenta de estos fallos. Pero no iba muy descaminada Kovalevskaya, si uno observa la similitud que guarda la solución correcta aportada por Volterra con la suya [2, p. 174].

3.5 Las ecuaciones de Euler y el problema de la rotación de un cuerpo

Uno de los problemas más importantes de la mecánica clásica es el estudio del movimiento de rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo, cuya modelización matemática conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales de dificilísima, si no imposible, resolución. Leonhard Euler (1707-1783) abordó este problema varias veces a lo largo de su vida y a su genialidad se debe la siguiente formulación mediante el sistema de ecuaciones que lleva su nombre, en la versión dada posteriormente por el matemático británico R. B. Hayward en 1858

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \tfrac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'' \\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), & \tfrac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma \qquad (9) \\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \tfrac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'
\end{aligned}
$$

donde A, B, C son los ejes principales del elipsoide de inercia del cuerpo considerado en relación con el punto fijo; M es la masa del cuerpo; g, la aceleración de la gravedad; y (x_0, y_0, z_0), las coordenadas del centro de gravedad respecto de un sistema de referencia cuyo origen está en el punto fijo y cuyas direcciones coinciden con las de los ejes principales del elipsoide de inercia. Las incógnitas p, q, r son las componentes de la velocidad angular a lo largo de los ejes principales y γ, γ', γ'' son los cosenos directores de los ángulos que los tres ejes forman en cada momento. Muy pocos de los grandes matemáticos de la época se mostraron indiferentes ante el problema. Por el contrario, intentaron hacer contribuciones en la búsqueda de su resolución, porque eran conscientes de que quienes lo consiguieran pasarían a la posteridad.

Euler logró integrar este sistema de ecuaciones en el caso en que $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Para él las dificultades inherentes a este particular planteamiento no podían ser superadas desde la física, sino con todas las herramientas del análisis matemático. Y profetizó que existía una infinidad de situaciones que son completamente irresolubles debido a las limitaciones del análisis.

J. L. Lagrange (1736-1813) marcó un hito con su obra *Mécanique Analytique*(1788), donde concibe esta parte de la física más bien como una rama de las matemática, una geometría tetradimensional en la que la cuarta dimensión es el tiempo. Consigue expresar las incógnitas p, q, r en función de los conocidos como ángulos de Euler [2, p. 146] y resuelve el sistema (9) en el caso en que $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

Otros matemáticos de la talla de S. D. Poisson (1781-1840), A. Cayley (1821-1899), J. C. Maxwell (1831-18779), J. J. Sylvester (1814-1897)... también trabajaron en este problema. Weierstrass impartió un curso en Berlín en el cual, siguiendo técnicas de C. G. J. Jacobi (1804-1851), explicó cómo se podían obtener las soluciones dadas por Euler y Lagrange mediante cociente de funciones σ [4], que no son otra cosa que generalizaciones de las funciones elípticas ϑ de Jacobi. Animado por estos éxitos parciales, Weierstrass atacó el problema general, llegando a la conclusión de que, en tal caso, la solución no viene dada por funciones univaluadas del tiempo. Con toda seguridad Kovalevskaya, que por aquella fecha estaba en Berlín, tuvo conocimiento de todos estos resultados. Por eso Weierstrass le propuso abordar el problema general y le animó a describir el movimiento mediante funciones elípticas del tiempo.

El conocimiento de las funciones p, q, r, γ, γ', γ'' permitiría determinar el eje de rotación en cualquier instante, la velocidad angular y la dirección vertical a partir de las coordenadas del cuerpo. Como no todas las incógnitas son independientes, para determinar la solución general se necesitaría hallar cinco integrales independientes del sistema. Una de ellas sigue inmediatamente de consideraciones geométricas

$$(\gamma)^2 + (\gamma')^2 + (\gamma'')^2 = 1$$

La segunda se infiere del principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}\Big(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\Big) + Mg\Big(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma''\Big) = constante \tag{10}$$

Y una tercera expresa el hecho de que la componente vertical del momento angular es constante

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = constante \tag{11}$$

Kovalevskaya se dio cuenta de que, en los casos estudiados por Euler y Lagrange, las seis incógnitas son funciones univaluadas del tiempo que únicamente poseen singularidades que son polos, y se pregunta si ésta será la situación en el caso general [18]. Por ello busca soluciones en el t-plano complejo mediante series de Laurent en un entorno de t_0, como sigue (basta tomar $t_0 = 0$ ya que el sistema (9) es un sistema autónomo)

$$\begin{aligned} p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + ...), \quad & \gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + ...) \\ q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + ...), \quad & \gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + ...) \\ r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + ...), \quad & \gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + ...) \end{aligned} \tag{12}$$

debiendo asegurar no sólo la existencia de radios de convergencia y que las series verifican formalmente las ecuaciones del sistema de Euler, sino que en todo caso hay cinco constantes arbitrarias. Deduce rápidamente que $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ y $m_1 = m_2 = m_3 = 2$. Poniendo $A_1 = B - C$, $B_1 = C - A$, $C_1 = A - B$ y eligiendo la escala de modo que $Mg = 1$, prueba que los primeros coeficientes deben satisfacer el sistema algebraico

$$\begin{aligned} -Ap_0 &= A_1 q_0 r_0 + y_0 h_0 - z_0 g_0, \quad & -2f_0 &= r_0 g_0 - q_0 h_0 \\ -Bq_0 &= B_1 r_0 p_0 + z_0 f_0 - x_0 h_0, \quad & -2g_0 &= p_0 h_0 - r_0 f_0 \\ -Cr_0 &= C_1 P_0 q_0 + x_0 g_0 - y_0 f_0, \quad & -2h_0 &= q_0 f_0 - p_0 g_0 \end{aligned} \tag{13}$$

Para garantizar que f_0, g_0, h_0 sean diferentes de cero, tiene que ocurrir que el determinante de la segunda parte del sistema (13) se anula, esto es, que

$$p_0^2 + q_0^2 + r_0^2 + 4 = 0$$

Combinando este resultado con las ecuaciones (10) y (11), se obtienen estos dos conjuntos de soluciones para los primeros coeficientes

$$\begin{aligned} p_0 &= \epsilon i \frac{2C}{A - 2C}\frac{z_0}{x_0}, \quad & f_0 &= -\frac{2C}{x_0} \\ q_0 &= \epsilon i p_0, & g_0 &= -i\epsilon\frac{2C}{x_0} \\ r_0 &= 2\epsilon i, & h_0 &= 0 \end{aligned}$$

O bien

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 0, & f_0 &= -\frac{2A}{x_0 - i\epsilon z_0} \\
q_0 &= 2\epsilon i, & g_0 &= 0 \\
r_0 &= 0, & h_0 &= i\frac{2A}{x_0 - i\epsilon z_0}
\end{aligned}
$$

donde $\epsilon = \pm 1$. Una vez determinados los coeficientes p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0 las ecuaciones de Euler permiten obtener los restantes coeficientes p_m, q_m, r_m, f_m, g_m, h_m recurrentemente a partir de relaciones que forman un sistema de seis ecuaciones algebraicas, todas ellas del tipo

$$(m-1)Ap_m - A_1(q_0 r_m + r_0 q_m) - z_0 g_m + y_0 h_m = P_m,$$

cuyos segundos miembros son funciones enteras de los citados coeficientes con índices inferiores a m.

Kovalevskaya obtiene como casos particulares los ya conocidos de Euler y Lagrange y afirma que hay un nuevo caso, no estudiado anteriormente, que se puede resolver. Este nuevo caso se presenta cuando

$$A = B = 2C, \quad z_0 = 0$$

Eligiendo convenientemente los ejes, es posible tomar $y_0 = 0$. Si, además, se escoge una escala adecuada de modo que $A = B = 2$ y $C = 1$, el sistema (9) se reduce al

$$
\begin{aligned}
2\frac{dp}{dt} &= qr, & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'' \\
2\frac{dq}{dt} &= -pr - c_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma \\
\frac{dr}{dt} &= c_0\gamma', & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma',
\end{aligned}
\tag{14}
$$

donde $c_0 = Mgx_0$. Las tres integrales conocidas adoptan ahora la forma

$$
\begin{aligned}
2(p^2+q^2) + r^2 &= 2c_0\gamma + 6l_1 \\
2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' &= 2l \\
(\gamma)^2 + (\gamma')^2 + (\gamma'')^2 &= 1,
\end{aligned}
$$

siendo l y l_1 constantes de integración. Kovalevskaya encuentra hábilmente una cuarta integral

$$\Big\{\big(p+qi\big)^2+c_0\big(\gamma+i\gamma'\big)\Big\}\Big\{\big(p-qi\big)^2+c_0\big(\gamma-i\gamma'\big)\Big\}=k^2$$

En este momento Kovalevskaya efectúa numerosos y complicados cambios de variables [2, p. 156], cuyo objetivo es adecuar tanto las ecuaciones como las integrales a fin de que se puedan usar las funciones ϑ en la integración de la primera de las ecuaciones (14)

$$\int \frac{2}{qr}dp=\int dt$$

Tras ímprobos esfuerzos y una enorme paciencia, Kovalevskaya llega a que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}+\frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}\\ dt &= \frac{s_1ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}+\frac{s_2ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} \end{aligned} \tag{15}$$

donde $R_1(s)$ es un polinomio de grado cinco. Las variables seleccionadas se han amoldado de manera que se pueda aplicar las técnicas de inversión de Jacobi. De (15) deduce que s_1 y s_2 son cocientes de productos de funciones ϑ, cuyos argumentos son funciones lineales del tiempo [18].

Al final de este trabajo Kovalevskaya presentó un modelo físico que, a petición de Weierstrass, le dejó H. A. Schwarz (1845-1921) y que se adaptaba al caso teórico que ella había descubierto. Posteriormente se puso en tela de juicio que este modelo se correspondiera exactamente con el caso investigado por Kovalevskaya, lo que pone de manifiesto lo intrincado y la complejidad del problema analizado.

El matemático ruso A. A. Markov (1856-1922) dudaba de que los tres únicos casos en los cuales el sistema (9) poseyera soluciones meromorfas se limitaran a los investigados por Euler, Lagrange y la propia Kovalevskaya, argumentando que algunos polinomios que aparecían en el trabajo de esta última podrían tener raíces múltiples. Pero Lyapunov (1857-1918) profundizando en el estudio de estos casos, estableció paladinamente que estos tres eran los únicos cuyas soluciones se expresaban como funciones univaluadas del tiempo. También, R. Liouville verificó que se trataba de los casos exclusivos en que el sistema de Euler poseía cuatro integrales algebraicas independientes. Así pues, a Kovalevskaya le cupo el honor y la gloria de completar el programa iniciado por Euler y continuado por Lagrange, en el sentido de que no se puede avanzar más en esa dirección. De hecho, el caso general sigue siendo un problema abierto.

Los contemporáneos no escatimaron elogios al gran trabajo realizado por Kovalevskaya quien, en un momento en que el análisis se alejaba peligrosamente de las aplicaciones, fue capaz de resolver un problema de mecánica utilizando los más recientes avances analíticos. Por este trabajo, como ya fue dicho, recibió el Premio Bordin de la Academia de Ciencias de París correspondiente al año 1888. ¡Y tan sólo por él hubiera pasado a la posteridad como una gran matemática!

3.6 Sobre un teorema de Bruns

E.H. Bruns (1848-1919) fue otro alumno de Weierstrass conocido, sobre todo, por sus investigaciones sobre el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el problema de los tres cuerpos. Pues bien, en esta nota , *Sobre un teorema de Bruns* [19], Kovalevskaya simplifica la prueba de un teorema de este matemático: Existe una función $U(x, y, z)$ que es analítica en cualquier punto regular de la frontera de una superficie S y que satisface la ecuación de Poisson

$$\triangle U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4k\pi,$$

con las condiciones de frontera $U = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ sobre S.

La prueba de Kovalevskaya es ingeniosa y sencilla. Realiza un cambio de las variables (x, y, z) a las (u, v, s) de modo que la superficie tenga ecuación $s = 0$, reduciendo el problema anterior al

$$\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + B_1 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + a_1 \frac{\partial U}{\partial u} + b_1 \frac{\partial U}{\partial v} + c_1 \frac{\partial U}{\partial s} = -4k\pi\Omega^2,$$

donde $\Omega = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,s)} \right| \neq 0$ denota el determinante del jacobiano del cambio, con las condiciones $U(u, v, 0) = \frac{\partial U(u,v,0)}{\partial s} = 0$. Precisamente, el hecho de que $\Omega \neq 0$ le permitió aplicar el actualmente conocido como *teorema de Cauchy-Kovalevskaya*.

Según R. Cooke [2], por los años de las referencias que cita en él, se trata quizás de uno de los primeros trabajos de Kovalevskaya. Un resultado similar aparece en su Tesis Doctoral. Acaso por esta razón lo guardó y más tarde decidió presentarlo en un congreso en Estocolmo. Fue publicado póstumamente por Mittag-Leffler.

4. Trabajos literarios

Kovalevskaya fue una persona dotada de una extraordinaria sensibilidad, con grandes inquietudes literarias, sociales y políticas. Sus dos mejores obras no matemáticas son *Recuerdos de la infancia* y *Una joven nihilista*. En la primera [20], editada en 1889, de carácter autobiográfico y escrita con una prosa sencilla y elegante, relata cómo transcurre su infancia hasta que alcanza los 15 años de edad –sus relaciones familiares, especialmente con su hermana Aniuta– todo ello inmerso en la problemática social de aquella época y de su país. En la segunda [21], publicada después de su muerte primero en Ginebra en 1892 y más tarde en 1906 en su Rusia natal (donde fue reiteradamente prohibida), narra los avatares y las utopías de una joven revolucionaria, encarnada en Vera Goncharova, relacionada familiarmente con A. S. Pushkin (1799-1837), escritor contrario al sistema aristocrático reinante en su época.

El nihilista es otra novela corta basada en la figura de N. Chernyshevsky (1828-89), deportado a Siberia por su obra *¿Qué hacer?*, que ejerció una gran influencia sobre la juventud rusa de la segunda mitad del siglo XIX y la revolución de 1917.

Fruto de su colaboración con Anna Charlotte –hermana de Mittag-Leffler– es la obra teatral *La lucha por la felicidad*. En realidad fue escrita por Anna, si bien el guión, el tema, es de Kovalevskaya. Se ve claramente que describe su relación tormentosa con Vladimir y evidencia que nunca pudo borrar de su mente el sentimiento de un cierto grado de culpabilidad ante el trágico final de su esposo. No tuvo gran acogida en Suecia, pero sí en Rusia cuando se estrenó años después.

Recordemos que cuando regresó a Rusia, con posterioridad a haber accedido al grado de Doctor, en 1875, en unos cuatro años yermos matemáticamente, realizó una ajetreada vida social, frecuentando los círculos culturales de San Petersburgo. Escribió entonces y en el resto de su vida un buen número de reseñas teatrales, poesías, ensayos sobre George Elliot, comentarios sobre la situación política, incluso escribió dos notas sobre sus visitas a sendos hospitales para mujeres.

Sobra decir que estas actividades extras desesperaban tanto a Weierstrass como a Mittag-Leffler, que no alcanzaban a comprender cómo malgastaba el tiempo en estas cuestiones, en lugar de emplear su talento en matemáticas. En algún momento la propia Kovalevskaya reconoció que hubiera llegado más lejos si se hubiera dedicado a una sola actividad y no a repartir su esfuerzo en tantas direcciones diferentes. Bueno, sí que compartía con Weierstrass la opinión de que *"para ser matemático hay que tener el alma de un poeta"*.

5. Consideraciones finales

Sonia Kovalevskaya fue la primera mujer en obtener el grado de Doctor en Matemáticas, la primera en formar parte del comité editorial de una revista matemática (nos referimos a *Acta Mathematica*) y la primera en ganar un premio de la categoría del Prix Bordin, el más alto galardón que se podía recibir en Ciencias en aquellos tiempos. Fue de las primeras mujeres en ocupar una cátedra en una universidad europea. Y, además, realizó algunas notables contribuciones a las matemáticas. ¿Qué más se puede pedir? Como dijo su maestro y mentor, con ocasión de su muerte, quizás la persona que más sufrió por este hecho:

> *Las personas pasan, las ideas perduran. La figura eminente de Sonia debería pasar a la posteridad en base a la única virtud de su trabajo matemático y literario.*

Pero la personalidad de Kovalevskaya es muy rica. Hay que valorar su compromiso político con los movimientos que querían mejorar las condiciones de vida de sus compatriotas y de toda la humanidad. Aunque fueran utopías y le hicieran perder tiempo. No vaciló en prestar su pasaporte para que algunos jóvenes pudieran abandonar Rusia y estudiar en el extranjero, con el riesgo que ello significaba entonces. Ayudaba a sus paisanos exiliados, particularmente a las mujeres.

Hoy en día sigue siendo un referente de los movimientos que luchan por conseguir una efectiva igualdad de derechos entre hombres y mujeres. Cuando llegó a Suecia para dar clases en la universidad de Estocolmo, August Strindberg (1849-1912), un famoso escritor de piezas teatrales y misógino, escribió en la prensa calificando de auténtica monstruosidad que una mujer diera clases en la universidad. Ella le escribió a Mittag-Leffler:

> *Como un regalo de Navidad he recibido de su hermana un artículo de Strindberg en el que prueba tan claramente como que dos y dos son cuatro qué monstruoso fenómeno es una mujer matemática, qué pernicioso, inútil y desagradable. Pienso que esencialmente tiene razón; la única cosa con la que no estoy de acuerdo es con que hay muchos hombres matemáticos en Suecia que son mejores que yo y que he sido invitada a venir aquí sólo por caballerosidad.*

Queda claro que lo que no admite Kovalevskaya de ningún modo es que un hombre sea considerado mejor en matemáticas que una mujer por el simple hecho de ser hombre. Quizás el título de su biografía realizada por A.H. Koblitz [8] sintetiza magistralmente su compleja existencia y personalidad: *Una convergencia de vidas. Sofía Kovalevskaya: científica, escritora, revolucionaria.*

Impresionante resulta también el juicio que sobre ella hace su amigo Mittag-Leffler [2, p. 177], en su obituario:

> *Sonia Kovalevskaya conservará un lugar eminente en la historia de las matemáticas y por su obra póstuma* [21], *que está a punto de aparecer, será recordada en la historia de la literatura. Pero acaso no es ni como matemática ni como escritora el modo en que se debe apreciar o juzgar a esta mujer de tanto espíritu y*

originalidad. Como persona fue aún más extraordinaria que lo que uno sería capaz de creer por sus trabajos. Todos los que la conocimos y estuvimos cerca de ella...la recordaremos por la impresión vivaz y poderosa que producía su personalidad.

REFERENCIAS

[1] R. BÖLLING. ...Deine Sonia: a reading from a burned letter, *The Mathematical Intelligencer*, 14(3)(1992), 24–30.

[2] R. COOKE. *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[3] M. R. CHOWDHURY. Koblitz, Klein and Kovalevskaia, *The Mathematical Intelligencer*, 8(4)(1986), 68–72.

[4] A. ERDÉLYI. *Higher Transcendental Fuctions*, McGraw-Hill, New York, 1953 (reeditado por R. E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1981).

[5] P. R. GARABEDIAN. *Partial differential equations*, Wiley, New York, 1964.

[6] M. DE GUZMÁN. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Alhambra, Madrid, 1980.

[7] F. JOHN. *Partial differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[8] A. H. KOBLITZ. *A Convergence of Lives: Sophia Kovalevskaya: Scientist, Writer, Revolutionary*, Birkhauser, Boston, 1983.

[9] A. H. KOBLITZ. Sofia Kovalevskaia and the mathematical community, *The Mathematical Intelligencer*, 6(1)(1984), 20–29.

[10] S. Kovalevskaya. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 80(1875), 1–32.

[11] S. Kovalevskaya. Über die Reduction einer bestimmten Klasse von Abel'scher Integrale 3-ten Ranges auf elliptische Integrale, *Acta Mathematica*, 4(1884), 393–414.

[12] S. Kovalevskaya. Zusätze und Bermerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt des Saturnringes, *Astronomische Nachrichten*, 111(1885), 37–48.

[13] S. Kovalevskaya. Über die Brechung des Lichtes in christallinischen Mitteln, *Acta Mathematica*, 6(1886), 249–304.

[14] S. Kovalevskaya. Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 98(1884), 356–357.

[15] S. Kovalevskaya. Om ljusets fortplantning uti ett kristalliniskt medium, *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlinger*, 41(1884), 119–121.

[16] S. Kovalevskaya. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Mathematica*, 12(1889), 177–232.

[17] S. Kovalevskaya. Sur une propieté du système d'équations différentielles qui definit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Mathematica*, 14(1890), 81–93.

[18] S. Kovalevskaya. Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps , *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, Paris*, 31(1890), 1–62.

[19] S. Kovalevskaya. Sur un théorème de M. Bruns, *Acta Mathematica*, 15(1891), 45–52.

[20] S. Kovalevskaya. *A Russian Childhood. Sofya Kovalevskaya*, B. Stillman (ed.), Springer-Verlag, New York, 1978.

[21] S. Kovalevskaya. *The Nihilist Woman*, Volnaya Russkava, Geneva, 1892.

[22] A. Martinón, (editor). *Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos*, Nivola, Madrid, 2000.

[23] M. Molero y A. Salvador. *Sonia Kovalevskaya* , Ediciones del Orto, Madrid, 2002.

[24] I. G. Petrovski. *Partial differential equations*, Iliffe, London, 1967.

[25] K. D. Rappaport. S. Kovalevsky: a mathematical lesson, *Amer. Math. Monthly*, 88(10)(1981), 564–574.

En la web se puede encontrar una abundante literatura sobre S. Kovalevskaya

[26] T. Burslem. *Sofia Vasilevna Kovalevskaya*

http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Miscellaneous/Kovalevskaya/biog.html

[27] R. Cooke. *The life of S. V. Kovalevskaya*
http://www.emba.uvm.edu/∼cooke/svklife.pdf

[28] L. Ellison. *Sofia Kovalevskaya*
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Projects/Ellison/Chapters/Ch1.html

[29] J. Spicci. *The life of S. V. Kovalevskaya*
http://www.joanspicci.com/kovalevskaia/index.htm

J.M. Méndez Pérez
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna
Tenerife, Islas Canarias
Correo electrónico: jmendez@ull.es