Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero[1]

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2007.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.

Problemas

Problema 65

Probar la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} = \frac{\pi \ln^2 2}{2} - \frac{\pi^3}{48} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln^2 \cos x \, dx.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Kalamazoo, Michigan

Problema 66

Determinar para qué valores enteros del parámetro a existen soluciones enteras de la ecuación

$$108x^2 + 18x + 1 = a^3.$$

Propuesto por M. Benito Muñoz, I. E. S. Sagasta, y
Juan Luis Varona Malumbres, Universidad de La Rioja, Logroño

PROBLEMA 67

Siendo $a > 1$ un parámetro real, encontrar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a^{x^2+x} + \log_a x &= a^{y+1}, \\ a^{y^2+y} + \log_a y &= a^{z+1}, \\ a^{z^2+z} + \log_a z &= a^{x+1}. \end{aligned}$$

Propuesto por Mihàly Bencze
Brasov, Rumanía

PROBLEMA 68

Sean a, b y c los lados de un triángulo $\triangle ABC$. Si r denota el radio de la circunferencia inscrita y R el de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo, probar que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{ab - 2rR}{ab + 2rR} + \frac{bc - 2rR}{bc + 2rR} + \frac{ca - 2rR}{ca + 2rR} < 2.$$

Propuesto por I. V. Maftei y P. G. Popescu
Bucarest, Rumanía

PROBLEMA 69

Para cada pareja de enteros no negativos m y n, evaluar la integral

$$\int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m} e^{-\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\pi x^2}\, dx.$$

Propuesto por Ó. Ciaurri Ramírez
Universidad de La Rioja, Logroño

Problema 70

Dado un triángulo ABC, se pide:

a) Probar que el lugar geométrico de los focos de todas las parábolas tangentes a las rectas AB, AC y BC es la circunferencia circunscrita al triángulo.

b) Sean P, Q, R los puntos de tangencia de una de esas parábolas con las rectas AB, BC y AC respectivamente. Probar que el área del triángulo PQR es independiente de la parábola en cuestión.

Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón

Problema 71

Denominamos matriz binaria a aquella cuyos elementos son todos 0 ó 1. Sean m, n, s, t números naturales tales que $2 \leq s \leq m$, $2 \leq t \leq n$ y $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$. Hallar el máximo número de unos que puede contener una matriz binaria de dimensión $m \times n$ tal que de ella no pueda extraerse ninguna submatriz $s \times t$ enteramente formada por unos.

Propuesto por C. Balbuena y X. Marcote, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, M. Cera y P. García-Vázquez, Universidad de Sevilla, Sevilla, y J.C. Valenzuela, Universidad de Cádiz, Cádiz

Problema 72

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq i<k\leq n} \log\left(\sqrt[n]{\frac{3n-2i}{3n+2i}}\right) \log\left(\sqrt[n]{\frac{3n-2k}{3n+2k}}\right).$$

Propuesto por José Luis Díaz Barrero
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

Soluciones

PROBLEMA 41

En un polígono regular de 24 lados, con sus vértices numerados, cada vértice se pinta de rojo o de verde. ¿De cuántas maneras es posible hacerlo de modo que no se pueda construir, uniendo vértices del polígono, ningún polígono regular que tenga todos los vértices del mismo color? ¿Y si el polígono regular de partida tiene 30 lados?

Propuesto por E. Fernández Moral, I. E. S. Sagasta, Logroño, y M. Sánchez Benito, Universidad Complutense, Madrid

SOLUCIÓN

Comencemos con el polígono de 24 lados. El número de vértices de un polígono regular que se puede formar uniendo vértices del 24-gono será un divisor de 24. En particular, se pueden construir triángulos equiláteros y cuadrados. Ahora bien, si una bicoloración de los vértices del polígono no contiene triángulos equiláteros *monocromáticos* (entendiendo por tales aquellos que tienen todos los vértices del mismo color), entonces tampoco contendrá hexágonos ni dodecágonos monocromáticos, y tampoco podrá ser monocromático el propio 24-gono. Y si la bicoloración no contiene cuadrados monocromáticos, tampoco contendrá octógonos regulares monocromáticos. De modo que una bicoloración del 24-gono no contiene ningún m-gono regular monocromático si y sólo si no contiene ni triángulos equiláteros ni cuadrados monocromáticos.

Cuando los vértices del polígono están etiquetados con los números $1, 2, \ldots, 23, 24$, los dos dodecágonos regulares que se pueden construir están etiquetados, respectivamente, con los números impares y con los pares. Todo triángulo equilátero $\{j, j+8, j+16\}$ (módulo 24) y todo cuadrado $\{j, j+6, j+12, j+18\}$ (módulo 24) tienen sus tres o sus cuatro vértices, respectivamente, de la misma paridad, así que es obvio que el número de configuraciones que buscamos es el cuadrado del número de tales configuraciones para el caso de un dodecágono.

Ahora, en un dodecágono regular de vértices etiquetados $1, 2, \ldots, 12$, los triángulos equilateros son $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 6, 10\}$, $\{3, 7, 11\}$ y $\{4, 8, 12\}$ y los cuadrados son $\{1, 4, 7, 10\}$, $\{2, 5, 8, 11\}$ y $\{3, 6, 9, 12\}$. Podemos considerar la disposición matricial 3×4 siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 & 2 \\ 9 & 12 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y pensar que una bicoloración de los vértices del dodecágono que no contenga triángulos equiláteros ni cuadrados monocromáticos se corresponde biunívocamente con una matriz 3×4 de ceros o unos en la que no haya ni filas ni columnas *monocromáticas* (es decir, con todo ceros o todo unos). Llamemos $M(3,4)$ al número de tales matrices.

Veamos una forma de contar el número $M(3,4)$. Existen seis posibilidades de tener una columna no monocromática; por tanto,

$$M(3,4) = 6^4 - |S_1 \cup S_2 \cup S_3|,$$

siendo S_i $(i = 1, 2, 3)$ el conjunto de matrices 3×4 formadas por ceros y unos, sin columnas monocromáticas y tales que la fila i-ésima es monocromática. Ahora bien,

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_2 \cap S_3| - |S_1 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

donde

- $|S_i| = 2 \cdot 3^4$, para cada i, ya que hay dos posibilidades de *monocoloración* y tres posibilidades para que cada columna no sea monocromática.
- $|S_i \cap S_j| = 34$, para cada pareja $\{i, j\}$ tal que $i \neq j$, ya que si $\text{color(fila } i) = \text{color(fila } j)$, hay una posibilidad para completar columnas no monocromáticas; sin embargo, cuando $\text{color(fila } i) \neq \text{color(fila } j)$, hay 2^4 posibilidades para completar la fila restante sin que haya columnas monocromáticas.
- $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 2^3 - 2 = 6$, evidentemente.

De este modo $M(3,4) = 906$, y el número de posibilidades que requería el problema es 906^2.

En el caso del polígono de 30 lados, por consideraciones análogas a las del caso anterior, el número de configuraciones posibles será $M(3,5)^2$. Y se tiene que

$$\begin{aligned} M(3,5) &= 6^5 - 3|S_1| + 3|S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_2 \cap S_3| \\ &= 6^5 - 3 \cdot 2 \cdot 3^5 + 3(2 + 2 \cdot 2^5) - 6 = 6510. \end{aligned}$$

NOTA. a) Para un polígono regular de $n = 12h$ lados, con $h = 2^\alpha 3^\beta$ y $\alpha, \beta \geq 0$, el número de configuraciones sería 906^h.

b) Para un polígono de $n = 3pk$ lados, con $p > 3$ primo y $k = 3^\gamma p^\delta$ ó $k = 2 \cdot 3^\gamma p^\delta$ siendo $\gamma, \delta \geq 0$, el número de configuraciones sería $M(3,p)^h$, siendo una sencilla generalización de lo anterior obtener que, para n cualquiera,

$$M(3,n) = 6^n - 3 \cdot 2 \cdot 3^n + 3(2 + 2 \cdot 2^n) - 6 = 6^n - 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 2^{n+1}.$$

Solución enviada por los proponentes

PROBLEMA 42

Encontrar una expresión, simétrica en m y n, para el número de matrices $m \times n$ de ceros y unos que no contienen ninguna fila ni ninguna columna formada exclusivamente por ceros o por unos.

Propuesto por M. Benito Múñoz y E. Fernández Moral, I. E. S. Sagasta, Logroño, y M. Sánchez Benito, Universidad Complutense, Madrid

SOLUCIÓN

Llamemos S_i $(i = 1, \ldots, m)$ al conjunto de las matrices $m \times n$ formadas por ceros y unos, en las que la fila i-ésima es *monocromática*, entendiendo por tal aquella que está formada por todo ceros o todo unos, y no hay ninguna columna monocromática. Entonces el número de matrices solicitado está dado por (puede deducirse mediante un argumento de inclusión–exclusión)

$$M(m,n) = (2^m - 2)^n - m|S_1| + \binom{m}{2}|S_1 \cap S_2| - \cdots + (-1)^m |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_m|,$$

donde, usando razonamientos análogos a los del problema anterior, para $k = 1, \ldots, m$,

$$|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k| = 2(2^{m-k} - 1)^n + (2^{k-1} - 1)2^{(m-k)n+1}.$$

Tras sencillas manipulaciones podemos escribir

$$M(m,n) = (2^m - 2)^n - 2(2^m - 1)^n + 2(M_1(m,n) + M_2(m,n)),$$

con

$$M_1(m,n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (2^{m-k} - 1)^n$$

y

$$M_2(m,n) = 2^{mn-1} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} 2^{(m-k)n} (2^{k-1} - 1).$$

Ahora es claro que

$$\begin{aligned} M_2(m,n) &= 2^{mn-1} + 2^{mn} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} 2^{-kn+k-1} - 2^{mn} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} 2^{-kn} \\ &= 2^{mn-1} + \frac{1}{2}(2^n - 2)^m - (2^n - 1)^m \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$M(m,n) = 2^{mn} + (2^n - 2)^m + (2^m - 2)^n - 2[(2^n - 1)^m + (2^m - 1)^n] + 2M_1(m,n).$$

Comprobando que $M_1(m,n) = M_1(n,m)$ habremos obtenido la expresión simétrica solicitada. En efecto,

$$\begin{aligned} M_1(m,n) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} 2^{(m-k)\ell} (-1)^{n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} 2^{m\ell} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{-k\ell} (-1)^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} (2^\ell - 1)^m = M_1(n,m). \end{aligned}$$

Solución enviada por los proponentes

Problema 43

Sean $F_n(x,y)$ los polinomios de Fibonacci bivariados definidos por la relación de recurrencia $F_n(x,y) = xF_{n-1}(x,y) + yF_{n-2}(x,y)$, con $F_0(x,y) = 0$ y $F_1(x,y) = 1$ y donde $x^2 + 4y \neq 0$, $y > 0$ y $x \neq 0$. Probar:

a)

$$\arctan\left(\frac{y^{\frac{2n-1}{2}} x}{F_{2n+1}(x,y)}\right) = \arctan\left(\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}}{F_{2n}(x,y)}\right) - \arctan\left(\frac{y^{\frac{2n+1}{2}}}{F_{2n+2}(x,y)}\right),$$

b)

$$\arctan\left(\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}}{F_{2n}(x,y)}\right)+\arctan\left(\frac{F_{2n+1}(x,y)}{y^{\frac{2n-1}{2}}x}\right)+\arctan\left(\frac{F_{2n+2}(x,y)}{y^{\frac{2n+1}{2}}}\right)=\pi.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan

SOLUCIÓN

En [1] se prueba la siguiente fórmula (denominada por el autor como fórmula de Simpson):

$$F_n(x,y)F_{n+2}(x,y)-F_{n+1}^2(x,y)=(-1)^{n+1}y^n. \tag{1}$$

Tomando el caso $n=2m$ tenemos

$$F_{2m}(x,y)F_{2m+2}(x,y)-F_{2m+1}^2(x,y)=-y^{2m}. \tag{2}$$

Comencemos con el apartado a). Denotando

$$\theta_n(x,y)=\arctan\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}}{F_{2n}(x,y)}-\arctan\frac{y^{\frac{2n+1}{2}}}{F_{2n+2}(x,y)}$$

llegamos a que

$$\tan\theta_n(x,y)=\frac{\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}}{F_{2n}(x,y)}-\frac{y^{\frac{2n+1}{2}}}{F_{2n+2}(x,y)}}{1+\frac{y^{2n}}{F_{2n}(x,y)F_{2n+2}(x,y)}}=\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}\left(F_{2n+2}(x,y)-yF_{2n}(x,y)\right)}{F_{2n}(x,y)F_{2n+2}(x,y)+y^{2n}}.$$

Ahora, utilizando la condición (2) y la relación de recurrencia, obtenemos la identidad

$$\tan\theta_n(x,y)=\frac{F_{2n+1}(x,y)y^{\frac{2n-1}{2}}x}{F_{2n}(x,y)F_{2n+2}(x,y)+y^{2n}}=\frac{y^{\frac{2n-1}{2}}x}{F_{2n+1}(x,y)}$$

que es equivalente a la fórmula propuesta en el apartado a).

El apartado b) es una consecuencia de a) y de la identidad $\arctan t+\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}$.

Referencias: [1] M. Catalani, *Generalized bivariate Fibonacci polynomials*, `arXiv:math.CO/0211366 v2`, 4 Jun 2004.

Solución enviada por el proponente

Nota. La fórmula de Simpson (1) que utiliza el proponente en la resolución puede obtenerse mediante un sencillo argumento de inducción. Veamos que si (1) se cumple para n también se satisface para $n+1$. En efecto, usando la relación de recurrencia que define los polinomios $F_n(x,y)$, tenemos que

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x,y)F_{n+3}(x,y) - F_{n+2}^2(x,y) & \\ &= F_{n+1}(x,y)(xF_{n+2}(x,y)+yF_{n+1}(x,y)) \\ &\qquad - F_{n+2}(x,y)(xF_{n+1}(x,y)+yF_n(x,y)) \\ &= y(F_{n+1}^2(x,y) - F_n(x,y)F_{n+2}(x,y)) = (-1)^{n+2}y^{n+1}. \end{aligned}$$

Problema 44

Sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio R se fija una cuerda AB, que determina en el círculo los segmentos circulares $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$. Sea T un punto interior al segmento AB y $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ las circunferencias, contenidas respectivamente en $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, que son tangentes a la cuerda AB en el punto T y a la circunferencia $\mathcal{C}$ en puntos denotados respectivamente por C y D. Probar:

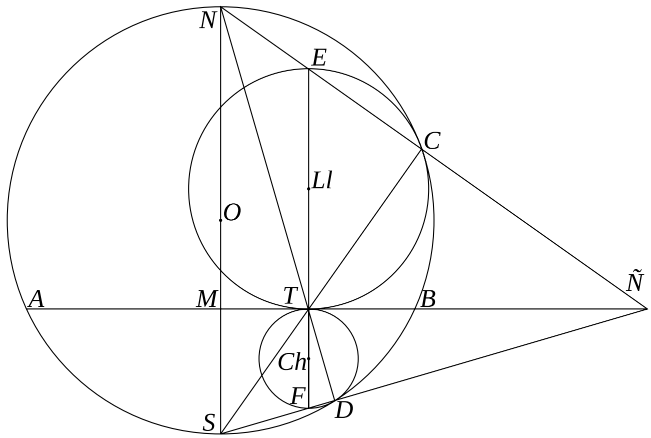
a) Si r_1, r_2 son los radios de las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, entonces la razón $\frac{r_1}{r_2}$ es constante cuando T varía en la cuerda AB.

b) Al variar T sobre la cuerda AB, todas las cuerdas CT pasan por un cierto punto fijo y todas las rectas DT pasan por otro punto fijo.

Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón

Solución

Sean O, Ll y Ch los centros de las circunferencias $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ respectivamente, y sea NS el diámetro de $\mathcal{C}$ perpendicular a AB (en la figura, N y S son los "polos" norte y sur de $\mathcal{C}$).



Si denotamos por h_1 la homotecia de centro C y razón $\frac{r_1}{R}$, por la condición de tangencia en C tenemos que h_1 transforma $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_1$. Observemos que $h_1(O) = Ll$ y que los segmentos paralelos TLl y SO verifican $\frac{TLl}{SO} = \frac{r_1}{R}$, por lo tanto son correspondientes por h_1 y se tiene que $h_1(S) = T$. En particular la recta CT pasa siempre por el punto fijo S. De igual forma, si h_2 es la homotecia de centro D y razón $\frac{r_2}{R}$ que lleva $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_2$, se verifica que $h_2(N) = T$, luego la recta DT pasa siempre por N, lo cual demuestra (b).

Para resolver el apartado (a), consideramos el punto $\tilde{N} = NC \cap SD$ situado en la recta AB: en efecto, por ser los ángulos $\angle NCS$ y $\angle SDN$ rectos, T resulta ser el ortocentro del triángulo $NS\tilde{N}$ y la altura desde $\tilde{N}$ debe estar contenida en la recta AB, que es la perpendicular a NS por T. Sea $M = NS \cap AB$. Dado que O es el punto medio de NS y $h_1(SO) = TLl$, tenemos que $h_1(N) = E$, el simétrico de T respecto a Ll. Análogamente, $h_2(S) = F$, el simétrico de T respecto a Ch. Por lo tanto los puntos N, E, C están alineados, al igual que los puntos S, F, D. Además, las rectas NMS y ETF son paralelas por ser ambas perpendiculares a la cuerda AB. Finalmente, la razón de radios $\frac{r_1}{r_2}$ es igual al cociente de diámetros $\frac{ET}{TF}$, que en virtud del Teorema de Thales tiene el valor constante $\frac{NM}{MS}$.

Solución enviada por Andrés Sáez Schwedt
Universidad de León, León

También resuelto por Miguel Amengual, Manuel Pérez Molina y el proponente

Problema 45

Dado p un divisor de un número de la forma $K \cdot 10^m + k$, con $K \geq 0$, $m \geq 0$, $k \neq 0$ y $\operatorname{mcd}(p,k) = 1$ (y todos ellos números enteros), probar el siguiente criterio de divisibilidad por p: Si, para cada $N = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^{m \cdot i}$ denotamos $N' = \sum_{i=0}^{n} a_i (-k)^i K^{n-i}$ se cumple que $p \mid N$ si y sólo si $p \mid N'$.

Propuesto por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

Solución

Comprobemos primero que $\operatorname{mcd}(p, 10^m) = 1$. En efecto, supongamos que, para algún $\alpha > 1$, $\alpha \mid p$ y $\alpha \mid 10^m$. Como $\operatorname{mcd}(p,k) = 1$ será $\alpha \nmid k$, luego $\alpha \nmid (K \cdot 10^m + k)$; y esto es absurdo ya que $\alpha \mid p$ y $p \mid (K \cdot 10^m + k)$.

Dado N como en el enunciado, escribámoslo como $N = B_0 \cdot 10^m + b_0$ (con $B_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{m(i-1)}$ y $b_0 = a_0$) y tomemos $N_1 = kB_0 - Kb_0$. Entonces $kN - 10^m N_1 = b_0(K \cdot 10^m + k)$ y así $p \mid (kN - 10^m N_1)$ (puesto que, por hipótesis, $p \mid (K \cdot 10^m + k)$). Por tanto $p \mid kN \Leftrightarrow p \mid 10^m N_1$. Además, $\operatorname{mcd}(p,k) = 1$, luego $p \mid N \Leftrightarrow p \mid kN$; y $\operatorname{mcd}(p, 10^m) = 1$, luego $p \mid N_1 \Leftrightarrow p \mid 10^m N_1$. En consecuencia, $p \mid N \Leftrightarrow p \mid N_1$.

Reiterando el proceso, $p \mid N_1 \Leftrightarrow p \mid N_2$ con $N_2 = kB_1 - Kb_1$ siendo $B_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i k 10^{m(i-2)}$ y $b_1 = ka_1 - Ka_0$ (ya que $N_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i k 10^{m(i-1)} - Ka_0$).

De nuevo $p \mid N_2 \Leftrightarrow p \mid N_3$ con $N_3 = kB_2 - Kb_2$ siendo $B_2 = \sum_{i=3}^{n} a_i k^2 10^{m(i-3)}$ y $b_2 = k^2 a_2 + (-k)Ka_1 + K^2 a_0$ (puesto que, por el caso anterior, $N_2 = \sum_{i=2}^{n} a_i k^2 10^{m(i-2)} + (-k)Ka_1 + K^2 a_0$).

Continuando de esta forma tendremos que

$$p \mid N \iff p \mid N_1 \iff p \mid N_2 \iff \cdots \iff p \mid N_n,$$

donde $N_n = N'$, si n es par, o $N_n = -N'$, en otro caso.

Nota. De este resultado, tomando $K = m = 1$ y $k = -1$ se obtienen los criterios de divisibilidad por 3 y 9; con $K = k = 1$ y $m = 3$ aparecen los correspondientes a 7, 11 y 13, ya que en este caso $K \cdot 10^m + k = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Solución enviada por el proponente

PROBLEMA 46

Sean $\{p_1, p_2, \dots\}$ y $\{q_1, q_2, \dots\}$ dos sucesiones de números reales positivos tales que $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1+\cdots+p_n}{np_n} = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{q_1+\cdots+q_n}{nq_n} = \beta$, con $\alpha+\beta > 0$. Calcular el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1q_1+2p_2q_2+\cdots+np_nq_n}{n^2p_nq_n}$.

Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander

SOLUCIÓN

Multiplicando y dividiendo por el producto $(p_1+\cdots+p_n)(q_1+\cdots+q_n)$ tenemos, aplicando las hipótesis,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1q_1 + 2p_2q_2 + \cdots + np_nq_n}{n^2p_nq_n} = \alpha\beta \lim_{n\to\infty} \frac{p_1q_1 + 2p_2q_2 + \cdots + np_nq_n}{(p_1 + \cdots + p_n)(q_1 + \cdots + q_n)}.$$

Ahora, aplicando el criterio de Stolz, llegamos a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1q_1 + 2p_2q_2 + \cdots + np_nq_n}{(p_1 + \cdots + p_n)(q_1 + \cdots + q_n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{np_nq_n}{p_n(q_1 + \cdots + q_n) + q_n(p_1 + \cdots + p_n) - p_nq_n} = \frac{1}{\alpha+\beta},$$

de donde concluimos que el límite pedido vale $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Solución enviada por Víctor Lanchares Barrasa
Universidad de La Rioja, Logroño
También resuelto por E. Fernández y el proponente

NOTA. En realidad faltaría comprobar que se satisfacen las hipótesis para aplicar el criterio de Stolz; pero esto es un sencillo ejercicio.

Problema 47

Sean $x_1, \ldots, x_p$ números reales positivos y α y λ números reales tales que $2 \leq p \leq \alpha$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Probar que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_p}{p} \leq \sqrt[\alpha]{\frac{\lambda(x_1 + \cdots + x_p)^\alpha + (1-\lambda)(x_1^\alpha + \cdots + x_p^\alpha)}{p + \lambda(p^\alpha - p)}}$$
$$\leq \sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha + \ldots x_p^\alpha}{p}}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid

Solución

Veamos que la desigualdad propuesta se cumple para $\alpha \geq 1$. El caso $\alpha = 1$ es trivial. Si $\alpha > 1$, la función $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida mediante $\varphi(x) = x^\alpha$ es convexa. Por tanto, aplicando la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_p}{p}\Big)^\alpha = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{p} x_i\Big) \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \varphi(x_i) = \frac{x_1^\alpha + \cdots + x_p^\alpha}{p}. \qquad (3)$$

Vamos a denotar $s_1 = x_1 + \cdots + x_p$ y $s_\alpha = x_1^\alpha + \cdots + x_p^\alpha$.

Si multiplicamos la desigualdad (3) por $(1-\lambda)\,p$, y a la desigualdad resultante le sumamos $\lambda\, s_1^\alpha$, obtenemos

$$\lambda\, s_1^\alpha + (1-\lambda)\, \frac{s_1^\alpha}{p^{\alpha-1}} \leq \lambda\, s_1^\alpha + (1-\lambda)\, s_\alpha,$$

o bien

$$(\lambda\, p^\alpha + (1-\lambda)\, p) \frac{s_1^\alpha}{p^\alpha} \leq \lambda\, s_1^\alpha + (1-\lambda)\, s_\alpha.$$

Dividiendo por $(\lambda\, p^\alpha + (1-\lambda)\, p)$ y tomando la raíz de índice α, obtenemos la primera desigualdad.

Si ahora multiplicamos la desigualdad (3) por $\lambda\, p^\alpha$, y a la desigualdad resultante le sumamos $(1-\lambda)\, s_\alpha$, queda

$$\lambda\, s_1^\alpha + (1-\lambda)\, s_\alpha \leq (1-\lambda)\, s_\alpha + \lambda\, p^{\alpha-1}\, s_\alpha,$$

o bien

$$\lambda\, s_1^{\alpha} + (1-\lambda)\, s_\alpha \leq \frac{s_\alpha}{p}(\lambda\, p^{\alpha} + (1-\lambda)\, p).$$

Si, como antes, dividimos por $(\lambda\, p^{\alpha} + (1-\lambda)\, p)$ y tomamos la raíz de índice α, obtenemos la segunda desigualdad.

Solución enviada por Samuel G. Moreno y Esther M. García Caballero
Universidad de Jaén, Jaén

También resuelto por J. López González, J. Vinuesa y el proponente

PROBLEMA 48

Sean $x \geq y > 0$ y $a_1, \ldots, a_n$ números reales positivos. Probar que

$$x - y \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(x + a_k)} - \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(y + a_k)}.$$

Propuesto por Mihàly Bencze
Brasov, Rumanía

SOLUCIÓN

Observando que el caso $x = y$ es trivial, para obtener los casos restantes basta probar la desigualdad en el caso $x = 1$ e $y = 0$; es decir,

$$1 \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)} - \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k},$$

y cambiar a_k por $\frac{y+a_k}{x-y}$. La desigualdad anterior puede escribirse como

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)},$$

y esta es una consecuencia inmediata del hecho bien conocido de ser la media geométrica menor o igual que la media aritmética. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+a_k)}} &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k}} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{1+a_k}} \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1+a_k} = 1. \end{aligned}$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander

También resuelto por O. Furdui, S. G. Moreno y E. M. García Caballero y el proponente

Nota. La solución de O. Furdui también hace uso de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, pero en su caso para probar que la función $f(z) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (z+a_k)}$ satisface que $f'(z) \ge 1$. Con esto y el teorema del valor medio concluye el resultado. En el caso de S. G. Moreno y E. M. García Caballero, la solución pasa por reescribir la desigualdad propuesta como $G(\{c+y_i\}_{i=1,\ldots,n}) \ge c + G(\{y_i\}_{i=1,\ldots,n})$, con $c = x - y$ e $y_i = y + a_i$ y denotando $G(\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,n})$ la media geométrica de los valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Esta última desigualdad es cierta para cualquier sucesión de valores positivos y_i y para $c > 0$ como puede verse, por ejemplo, en el trabajo de L. Hoehn e I. Niven titulado Averages on the move, *Math. Mag.* **3** (1985), 151–156.