Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato* TEX. *Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2008.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) *junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.*

Problemas

Problema 89

Se considera un triángulo equilátero ABC y los puntos D y E situados sobre los lados AC y AB, respectivamente, tales que los segmentos AE y CD tienen la misma longitud. Sea M el punto medio del lado BC y P la intersección de BD con CE. Demostrar que los ángulos APE y BPM son iguales.

Propuesto por Miguel Amengual Covas
Cala Figuera, Mallorca

Problema 90

Determinar los triángulos rectángulos de lados naturales (triángulos pitagóricos) para los que se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a cuatro veces el área del triángulo más uno.

Propuesto por Manuel Benito Muñoz
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

Problema 91

Sean $\ln a$, $\ln b$ y $\ln c$ las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Probar que

$$\frac{3}{5} \leq \frac{\ln a}{\ln(ab^2c^2)} + \frac{\ln b}{\ln(a^2bc^2)} + \frac{\ln c}{\ln(a^2b^2c)} < 1.$$

Propuesto por José Luis Díaz Barrero
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

Problema 92

Probar que si $x_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$, y siendo $S = \sum_{i=1}^n x_i$, entonces

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{S - x_i}{x_i}} \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{x_i}{S - x_i}}.$$

Propuesto por Ovidiu Bagdasar
Babes Bolyai University, Cluj Napoca, Rumanía

Problema 93

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - (n+1)^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + 1 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

Propuesto por Pablo Fernández Refolio (estudiante)
Universidad Autónoma de Madrid, Madrid

Problema 94

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) = \frac{7}{4}\zeta(4),$$

donde $\zeta(a)$ denota la función Zeta de Riemann evaluada en a.

Propuesto por Ovidiu Furdui
The University of Toledo, Toledo, Ohio

Problema 95

Sea A un entero positivo. Determinar todos los números reales α para los que se cumple la identidad

$$\left[\sqrt{A^{2n}+\alpha}\cdot A^{n}\right] = A^{2n} - \left[1-\frac{\alpha}{2}\right],$$

para cualquier entero positivo n. (Como es habitual, $[x]$ denota la parte entera de x; es decir, el mayor entero menor o igual que x.)

Propuesto por Yakub N. Aliyev
Qafqaz University y Baku State University, Baku, Azerbaijan

Problema 96

Sea ABC un triángulo rectángulo en A y de lados $a > b \geq c$, con c fijo. Sean m_a, θ_a y h_a la mediana, la bisectriz y la altura correspondiente al lado a, respectivamente. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{b\to c}\frac{m_a-h_a}{\theta_a-h_a}, \qquad \lim_{b\to c}\frac{m_a-\theta_a}{m_a-h_a} \qquad \text{y} \qquad \lim_{b\to c}\frac{m_a-\theta_a}{\theta_a-h_a}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense de Madrid, Madrid

Soluciones

PROBLEMA 65

Probar la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}=\frac{\pi\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^3}{48}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln^2\cos x\,dx.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Kalamazoo, Michigan

SOLUCIÓN

Observamos en primer lugar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m(2m+2n-1)^2}.$$

Encontraremos una representación integral para la serie doble anterior. Recordando que la *función gamma de Euler* se define, para $x>0$, por $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$ y que $\Gamma(2)=1$, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m(2m+2n-1)^2}&=\frac{1}{\Gamma(2)}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m}\int_0^{+\infty}ue^{-(2m+2n-1)u}\,du\\&=\int_0^{+\infty}ue^{u}\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-2u})^n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-e^{-2u})^m}{m}\,du\\&=\int_0^{+\infty}ue^{u}\frac{-e^{-2u}}{1+e^{-2u}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-e^{-2u})^m}{m}\,du.\end{aligned}$$

Usando el desarrollo $\ln(1-\xi)=-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\xi^m}{m}$, $-1\le\xi<1$, y tomando $x=e^{-u}$ obtenemos la representación integral

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m(2m+2n-1)^2}=-\int_0^1\frac{\ln x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx. \qquad (1)$$

A partir de aquí, el cambio de variable $x = \tan\theta$ conduce a

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/4} \ln\tan\theta \ln(1+\tan^2\theta)\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\cos\,\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\right) \ln\cos\,\theta\ d\theta \qquad (2)\\
&= 2\int_0^{\pi/4} \ln^2\cos\,\theta\ d\theta - 2\int_0^{\pi/4} \ln\mathrm{sen}\,\theta\ \ln\cos\,\theta\ d\theta.
\end{aligned}
$$

Sean

$$
I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln^2\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int_0^{\pi/4} \ln\mathrm{sen}\,\theta \ln\cos\theta\,d\theta.
$$

Con el cambio de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ es posible probar la identidad $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln^2\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln^2\cos t\,dt$. Teniendo esto en cuenta, resulta

$$
\begin{aligned}
I_1 + 2I_2 &= \int_0^{\pi/4} (\ln\mathrm{sen}\,\theta + \ln\cos\theta)^2\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln^2\left(\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} (\ln\mathrm{sen}\,2\theta - \ln 2)^2\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln^2\mathrm{sen}\,2\theta\,d\theta - 2\ln 2\int_0^{\pi/4} \ln\mathrm{sen}\,2\theta\,d\theta + \frac{\pi\ln^2 2}{4}.
\end{aligned}
$$

Es fácil obtener que $\int_0^{\pi/2} \ln\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = -\frac{\pi\ln 2}{2}$ (véase la nota 1). Por consiguiente, se deduce $I_1 + 2I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \ln 2\cdot\frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{\pi\ln^2 2}{4}$; es decir,

$$
I_1 + 4I_2 = \frac{3\pi\ln^2 2}{2}\,. \qquad (3)
$$

Por otra parte

$$
I_1 - 2I_2 = \int_0^{\pi/4} (\ln\mathrm{sen}\,\theta - \ln\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln^2\tan\theta\,d\theta,
$$

y como $\int_0^{\pi/4} \ln^2\tan\theta\,d\theta = \frac{\pi^3}{16}$ (véase la nota 2), tenemos

$$
I_1 - 2I_2 = \frac{\pi^3}{16}. \qquad (4)
$$

De las ecuaciones (3) y (4) resulta $I_2 = \frac{\pi \ln^2 2}{4} - \frac{\pi^3}{96}$ y, de paso, obtenemos también $I_1 = \frac{\pi \ln^2 2}{2} + \frac{\pi^3}{24}$. Finalmente, sustituyendo el valor de I_2 en (2), se obtine la igualdad

$$\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = -\frac{\pi \ln^2 2}{2} + \frac{\pi^3}{48} + 2\int_0^{\pi/4} \ln^2 \cos x\,dx.$$

En vista de (1) y de la observación inicial, queda demostrada la identidad.

NOTA 1. La simetría de la función seno con respecto a $\pi/2$ nos permite probar $\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \operatorname{sen}\theta\,d\theta$ y el cambio de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ proporciona $\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln \cos t\,dt$. Sumando estas dos integrales tenemos

$$2\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta - \frac{\pi \ln 2}{2},$$

y poniendo $2\theta = t$ en la última integral deducimos $\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

NOTA 2. Efectuando en la integral $\int_0^{\pi/4} \ln^2 \tan\theta\,d\theta$ el cambio de variable $u = \tan\theta$ y desarrollando en serie de potencias la función $1/(1+u^2)$, resulta

$$\int_0^{\pi/4} \ln^2 \tan\theta\,d\theta = \int_0^1 \frac{\ln^2 u}{1+u^2}\,du = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_0^1 u^{2(k-1)} \ln^2 u\,du.$$

Con el cambio de variable $\ln u = -t$ obtenemos

$$\int_0^{\pi/4} \ln^2 \tan\theta\,d\theta = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k-1)t}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}\Gamma(3) = \beta(3)\Gamma(3),$$

donde $\beta(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^x}$ es la función *Beta de Dirichlet*. Teniendo en cuenta que $\beta(3) = \frac{\pi^3}{32}$ se deduce la identidad $\int_0^{\pi/4} \ln^2 \tan\theta\,d\theta = \frac{\pi^3}{16}$.

Solución enviada por Juan Carlos González Vara
Universidad Europea Miguel de Cervantes, Valladolid
También resuelto por el proponente

Problema 66

Determinar para qué valores enteros del parámetro a existen soluciones enteras de la ecuación

$$108x^2 + 18x + 1 = a^3.$$

Propuesto por M. Benito Muñoz, I. E. S. Sagasta, y
Juan Luis Varona Malumbres, Universidad de La Rioja, Logroño

Solución

La ecuación se puede escribir como $(6x+1)^3 = a^3 + (6x)^3$, luego por el último teorema de Fermat sólo admite soluciones enteras triviales. El caso $a = 0$ y $6x = 6x + 1$ no es posible, y el caso $x = 0$ y $a = 6x + 1$ da lugar al valor $a = 1$ como único entero para el que existe solución entera.

Solución redactada por los editores.
Resuelto, con soluciones esencialmente idénticas a la publicada, por R. Barroso, M. Fernández, E. M. García y S. G. Moreno, V. Lanchares, D. Lasaosa, J. Rodrigo, J. Vinuesa y los proponentes.

Problema 67

Siendo $a > 1$ un parámetro real, encontrar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a^{x^2+x} + \log_a x &= a^{y+1}, \\ a^{y^2+y} + \log_a y &= a^{z+1}, \\ a^{z^2+z} + \log_a z &= a^{x+1}. \end{aligned}$$

Propuesto por Mihàly Bencze
Brasov, Rumanía

Solución

Denotemos por (x_0, y_0, z_0) una solución del sistema y supongamos que una de las coordenadas es distinta de 1. Puesto que si (r, s, t) es una solución del sistema entonces las permutaciones cíclicas (s, t, r) y (t, r, s)

también son soluciones del sistema, podemos suponer que $x_0 \neq 1$. Si $x_0 > 1$ entonces, como $a > 1$, de la primera ecuación se obtiene

$$a^{y_0+1} = a^{x_0^2+x_0} + \log_a x_0 > a^{x_0^2+x_0} > a^{x_0+1},$$

de donde deducimos que $y_0 > x_0 > 1$. Repitiendo el mismo argumento con la segunda ecuación llegamos a que $z_0 > y_0 > x_0 > 1$. De la tercera ecuación se obtiene la cadena de desigualdades $x_0 > z_0 > y_0 > x_0 > 1$, lo cual es imposible. El caso $x_0 < 1$ también nos conduce a una contradicción, pues obtenemos la cadena de desigualdades $x_0 < z_0 < y_0 < x_0 < 1$.

Hemos probado que la única solución posible del sistema es $(1, 1, 1)$. Como es evidente que es solución, concluimos que el sistema admite una única solución: $(1, 1, 1)$.

Solución enviada por Manuel Fernández López
I. E. S. María Sarmiento, Lugo.
También resuelto por E. M. García y S. G. Moreno, J. C. González, V. Lanchares, D. Lasaosa, J. Vinuesa y el proponente

Problema 68

Sean a, b y c los lados de un triángulo $\triangle ABC$. Si r denota el radio de la circunferencia inscrita y R el de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo, probar que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{ab - 2rR}{ab + 2rR} + \frac{bc - 2rR}{bc + 2rR} + \frac{ca - 2rR}{ca + 2rR} < 2.$$

Propuesto por I. V. Maftei y P. G. Popescu
Bucarest, Rumanía

Solución

Mediante fórmulas bien conocidas para el triángulo obtenemos que $2rR = \frac{abc}{a+b+c}$, luego la función que deseamos acotar resulta ser

$$f(a, b, c) = \frac{b + c}{b + c + 2a} + \frac{a + c}{a + c + 2b} + \frac{a + b}{a + b + 2c}.$$

Tomando $\alpha = a^3 + b^3 + c^3$, $\beta = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$ y $\gamma = abc$, llegamos a que

$$f(a, b, c) = \frac{4\alpha + 11\beta + 18\gamma}{2\alpha + 7\beta + 16\gamma}.$$

Cota inferior: dado que el numerador y el denominador de $f(a,b,c)$ son positivos, se tendrá que $f(a,b,c) \geq \frac{3}{2}$ si y sólo si $2\alpha + \beta \geq 12\gamma$. Esta última desigualdad se cumple, ya que, en virtud de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se comprueba fácilmente que $\alpha \geq 3\gamma$ y $\beta \geq 6\gamma$.
Cota superior: veremos que, de hecho, $f(a,b,c) < \frac{5}{3}$; para ello basta comprobar que $2\alpha < 2\beta + 26\gamma$. Esta condición es verdadera, puesto que $\alpha < \beta$. En efecto, por la desigualdad triangular se verifica que

$$\beta - \alpha = a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) > 0.$$

Finalmente podemos ver que la cota superior $\frac{5}{3}$ es óptima. Para ello podemos considerar $b = c = ka$, eligiendo k de manera que se verifique la desigualdad triangular, y en ese caso se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} f(a,ka,ka) = \lim_{k\to\infty} \frac{5k^2+5k+2}{3k^2+4k+1} = \frac{5}{3}.$$

La cota inferior $\frac{3}{2}$ tampoco se puede mejorar porque para un triángulo equilátero se obtiene $f(a,a,a) = \frac{3}{2}$.

Solución enviada por Andrés Sáez Schwedt
Universidad de León, León

También resuelto por M. Amengual, M. Fernández, E. M. García y S. G. Moreno, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, X. Ros (estudiante), V. Vicario y los proponentes

Problema 69

Para cada pareja de enteros no negativos m y n, evaluar la integral

$$\int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m} e^{-\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\pi x^2}\, dx.$$

Propuesto por Ó. Ciaurri Ramírez
Universidad de La Rioja, Logroño

Solución

Si denotamos $I(m,n)$ a la integral del enunciado y hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{\pi}x$ (de modo que $d^k/dx^k = (\sqrt{\pi})^k d^k/du^k$), nos queda

$$I(m,n) = (\sqrt{\pi})^{m+n-1} \int_0^\infty \frac{d^m}{du^m} e^{-u^2} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2}\, du.$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \dfrac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$ ([1], pág. 785), y definiendo las funciones $\widetilde{H}_k$ mediante $\widetilde{H}_k(x) = e^{-x^2} H_k(x)$, obtenemos,

$$\begin{aligned} I(m,n) &= (\sqrt{\pi})^{m+n-1}(-1)^{m+n} \int_0^\infty e^{-x^2} H_m(x) e^{-x^2} H_n(x)\, dx \\ &= -(-\sqrt{\pi})^{m+n-1} \int_0^\infty \widetilde{H}_m(x) \widetilde{H}_n(x)\, dx =: (-1)^{m+n} \pi^{(m+n-1)/2} J(m,n). \end{aligned} \tag{1}$$

Podemos deducir el valor de $J(m,n)$ tras una integración por partes iterada en la que tendremos en cuenta que $\widetilde{H}_k' = -\widetilde{H}_{k+1}$ ([1], pág. 786, 22.13.15), y que $\widetilde{H}_{2k+1}(0) = 0$ ([1], pág. 777). La paridad de $m+n$ "desdobla" el procedimiento de obtención de las integrales $J(m,n)$. En cada uno de los apartados que consideraremos, convendremos (sin pérdida de generalidad) que $m \le n$.

i) En primer lugar, si $m+n$ es par y $n \ge 1$,

$$J(m,n) = -\widetilde{H}_m(x)\widetilde{H}_{n-1}(x)\Big|_0^\infty - J(m+1, n-1) = -J(m+1, n-1),$$

ya que, al tener m y n la misma paridad, entonces hay un número impar entre los enteros m y $n-1$, de modo que $\widetilde{H}_m(0)\widetilde{H}_{n-1}(0) = 0$. Reiterando el procedimiento obtenemos

$$J(m,n) = (-1)^n J(m+n, 0) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-2x^2} H_{m+n}(x)\, dx, \tag{2}$$

donde hemos tenido en cuenta que $H_0(x) = 1$ ([1], pág. 777). Usando una tabla de transformadas de Laplace podemos verificar que

$$\frac{(1-s)^k}{s^{k+\frac{1}{2}}} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{k!}{(2k)!\sqrt{\pi t}} H_{2k}(\sqrt{t})\, dt = 2\int_0^\infty e^{-sx^2} \frac{k!}{(2k)!\sqrt{\pi}} H_{2k}(x)\, dx,$$

donde obtenemos la última integral tras el cambio de variable $x = \sqrt{t}$. Por tanto, para $s = 2$ resulta

$$\int_0^\infty e^{-2x^2} H_{2k}(x)\, dx = (-1)^k \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{k! 2^{k+\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

Si definimos $p = (m+n)/2$, y si tenemos en cuenta (2) y (3),

$$J(m,n) = (-1)^{n+p} \frac{(2p)!\sqrt{\pi}}{p! 2^{p+\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Concluimos este apartado observando que el resultado (4) también es válido para el caso (no contemplado inicialmente) $m = n = 0$.

ii) Si $m + n$ es impar (de modo que $m < n$), integrando por partes $n - m$ veces llegamos a

$$J(m,n) = \sum_{i=0}^{n-m-1} (-1)^{i+1} H_{m+i}(0) H_{n-i-1}(0) + (-1)^{n-m} J(n,m),$$

de modo que, como $n - m$ es impar,

$$\begin{aligned} J(m,n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-m-1} (-1)^{i+1} H_{m+i}(0) H_{n-i-1}(0) \\ &= \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{i=[(m+1)/2]}^{[(n-1)/2]} H_{2i}(0) H_{m+n-1-2i}(0) \\ &= \frac{1}{2}(-1)^{\frac{m+3n-1}{2}} \sum_{i=[(m+1)/2]}^{[(n-1)/2]} \frac{(2i)!(m+n-1-2i)!}{i!\left(\frac{m+n-1-2i}{2}\right)!}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $H_{2k}(0) = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{k!}$ ([1], pág. 777). Si definimos $p = (m + n - 1)/2$, resulta

$$J(m,n) = \frac{1}{2}(-1)^{n+p} \sum_{i=[(m+1)/2]}^{[(n-1)/2]} \frac{(2i)!(2p-2i)!}{i!(p-i)!}. \tag{5}$$

Recapitulando, de (1), (4) y (5) obtenemos

$$I(m,n) = \begin{cases} (-1)^{a+p} \pi^p \dfrac{(2p)!}{p! 2^{p+\frac{3}{2}}}, & \text{si } m+n \text{ es par}, \\ (-1)^{b+p} \pi^p \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=[(a+1)/2]}^{[(b-1)/2]} \frac{(2i)!(2p-2i)!}{i!(p-i)!}, & \text{si } m+n \text{ es impar}, \end{cases}$$

donde $p = [(m+n)/2]$, $a = \text{mín}(m,n)$ y $b = \text{máx}(m,n)$.

Referencias:

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, 9ª ed., Dover, 1970.

Solución enviada por E. M. García y S. G. Moreno
Universidad de Jaén, Jaén
También resuelto por V. Lanchares, D. Lasaosa y el proponente

PROBLEMA 70

Dado un triángulo ABC, se pide:

a) Probar que el lugar geométrico de los focos de todas las parábolas tangentes a las rectas *AB, AC* y *BC* es la circunferencia circunscrita al triángulo.

b) Sean P, Q, R los puntos de tangencia de una de esas parábolas con las rectas *AB, BC* y *AC* respectivamente. Probar que el área del triángulo PQR es independiente de la parábola en cuestión.

Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón

SOLUCIÓN

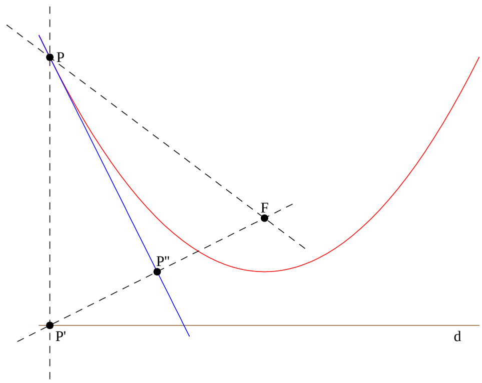

Figura 1: Construcción de una tangente a la parábola pasando por el punto P.

a) Recordemos en primer lugar que *la tangente en el punto* P *a una parábola de foco* F *y directriz* d *es bisectriz del ángulo formado por la recta* FP *y la perpendicular a* d *por el punto* P (véase, por ejemplo, P. Puig Adam, *Geometría Métrica II*, 12ª ed., Gómez Puig Ediciones, 1981, pág. 219). Si P' es el pie de la perpendicular por P a la recta d, la tangente es también mediatriz del segmento $P'F$. La proyección ortogonal del foco F sobre la recta tangente t es, entonces, el punto medio P'' del segmento $P'F$ (figura 1).

Y en segundo lugar recordemos el resultado clásico que define la *recta de Simson-Wallace* de un punto respecto de un triángulo: *Un punto*

F está en la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ si y sólo si las proyecciones ortogonales de F sobre las rectas AB, BC y AC son puntos alineados (véase, por ejemplo, Coxeter y Greitzer, *Retorno a la Geometría*, La Tortuga de Aquiles, 1993, págs. 40–41).

Pasemos al problema: el lugar geométrico de los focos F de las parábolas tangentes a los tres lados del $\triangle ABC$ es la circunferencia circunscrita al triángulo, quitándole los puntos A, B y C. En efecto; por un lado, si F y d son, respectivamente, el foco y la directriz de una tal parábola, sean P, Q y R los tres puntos de tangencia de la parábola con los lados del triángulo y P', Q' y R' las proyecciones ortogonales de los puntos P, Q y R sobre la recta d; como estos puntos están alineados, también estarán alineados los puntos medios P'', Q'' y R'' de los segmentos FP', FQ' y FR'; pero P'', Q'' y R'' son las proyecciones ortogonales del punto F sobre los lados del $\triangle ABC$. Por consiguiente, F pertenece a la circunferencia circunscrita (figura 2).

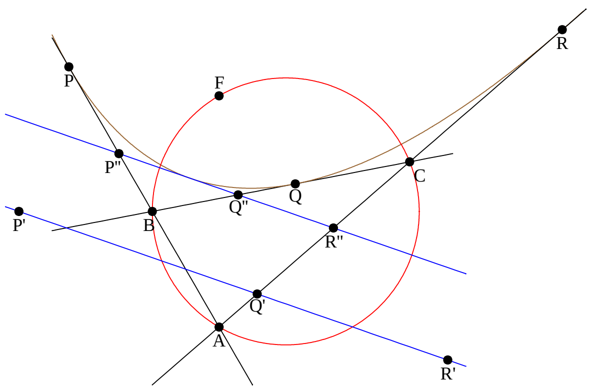

Figura 2: La recta de Simson-Wallace del punto F respecto del $\triangle ABC$ es la línea pasando por P'', Q'' y R''.

Recíprocamente, sea F un punto de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, distinto de uno de los vértices. Las proyecciones ortogonales de F sobre los tres lados determinan puntos alineados P'', Q'' y R''; los simétricos del punto F respecto de P'', Q'' y R'' son los puntos, también alineados, P', Q' y R'; la recta d que pasa por estos tres puntos es la directriz de una parábola de foco F que es tangente a los tres lados del $\triangle ABC$ en puntos P, Q y R (que se pueden determinar de la siguiente forma: por ejemplo, P es el punto de intersección de la recta AB con la recta perpendicular a d que pasa por P'').

Nota. Supongamos, en el último párrafo, que F sea uno de los vértices del $\triangle ABC$; pongamos que $F = B$ para fijar ideas. Entonces, con las notaciones anteriores, $P'' = Q'' = B$, luego $P' = Q' = B$ y también $P = Q = B$. La directriz sería la recta d que pasa por B y por el pie R'' de la altura del $\triangle ABC$ correspondiente al vértice B. En tal caso, $F \in d$. Si, en la definición de parábola como *lugar de los puntos que equidistan de un punto F y una recta d* permitimos el caso $F \in d$, la parábola es la recta (doble) que pasa por F y es perpendicular a d, y las tangentes por un punto (finito) serían la misma recta. La recta AC, que es "paralela a la parábola", es también tangente a ella, pero en su punto del infinito. Esto rescataría también los casos degenerados.

b) Para esta segunda parte usaremos un resultado debido a Arquímedes sobre *la cuadratura de la parábola*: Dados dos puntos de una parábola, la recta que los une divide la región interior a la parábola en dos zonas; llamemos *segmento parabólico* a la zona acotada. Las tangentes a la parábola por los dos puntos se cortan, formando un triángulo con el segmento que los une. Arquímedes demostró que *el área del segmento parabólico es igual a los $2/3$ del área de ese triángulo.*

Volviendo al problema, supongamos que los puntos F y A están separados, en la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, por los puntos B y C (es decir, que están sobre distintos arcos de los dos determinados por B y C, como en la figura 3). Otra configuraciones se podrían considerar análogamente.

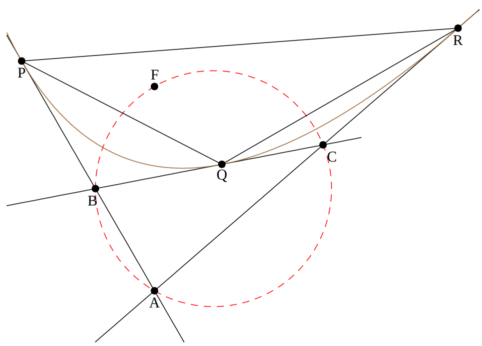

Figura 3: Medición del área del $\triangle PQR$.

Designando [tomamos las siguientes notaciones de la solución enviada por el proponente (*nota de los editores*)] por $\{XY\}$ el área del segmento parabólico determinado por los puntos X y Y, y por $[XYZ]$ el área del triángulo de vértices X, Y y Z, tenemos:

$$\begin{aligned}[PQR] &= [APR] - [BPQ] - [QCR] - [ABC] \\ &= \tfrac{3}{2}\{PR\} - \tfrac{3}{2}\{PQ\} - \tfrac{3}{2}\{QR\} - [ABC] \\ &= \tfrac{3}{2}\big(\{PR\} - \{PQ\} - \{QR\}\big) - [ABC] = \tfrac{3}{2}[PQR] - [ABC],\end{aligned}$$

de modo que $[PQR] = 2[ABC]$, resultado independiente de la parábola (es decir, de la posición del foco F en la circunferencia circunscrita) en cuestión.

Solución enviada por F. J. García Capitán, I. E. S. Álvarez Cubero, Priego, Córdoba; Néstor Aguilera, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina; y R. Barroso Campos, Universidad de Sevilla (ligeramente modificada por los eds.)
También resuelto por F. J. García, N. Aguilera y R. Barroso (otras dos soluciones al apartado a) y otra del apartado b)), D. Lasaosa, C. Beade y por el proponente

Nota. En la pág. 236 de la referencia de P. Puig Adam dada en la solución, el *Ejercicio 12* propone probar que *la circunferencia circunscrita al triángulo formado por tres tangentes a una parábola pasa por el foco*. Este resultado se atribuye a J. H. Lambert (matemático francés del siglo XVIII). Se puede ver una demostración en las págs. 206–208 de la referencia H. Dörrie, *100 great problems of elementary Mathematics, their history and solution*, Dover, 1965. Dörrie comenta que el teorema de Lambert conduce directamente a la solución del siguiente problema: *determinar el lugar geométrico de los focos de todas las parábolas que son tangentes a tres rectas dadas*. La solución es la circunferencia circunscrita al triángulo que forman las rectas.

Problema 71

Denominamos matriz binaria a aquella cuyos elementos son todos 0 ó 1. Sean m, n, s, t números naturales tales que $2 \leq s \leq m$, $2 \leq t \leq n$ y $\text{máx}\{m, n\} \leq s + t - 1$. Hallar el máximo número de unos que puede contener una matriz binaria de dimensión $m \times n$ tal que de ella no pueda extraerse ninguna submatriz $s \times t$ enteramente formada por unos.

Propuesto por C. Balbuena y X. Marcote, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona; M. Cera y P. García-Vázquez, Universidad de Sevilla, Sevilla; y J.C. Valenzuela, Universidad de Cádiz, Cádiz

Solución

Para una matriz binaria M cualquiera denotamos por $\Sigma(M)$ a la suma de todos sus elementos. Como $\text{máx}\{m, n\} \leq s+t-1$ podemos considerar la matriz binaria $D = (d_{ij})$ de dimensión $m \times n$ cuyos elementos son todos iguales a uno salvo $d_{ii} = 0$ para $i = 1, \ldots, m+n-s-t+1$, con lo cual $\Sigma(D) = mn - (m+n-s-t+1)$. Veamos que D no contiene ninguna submatriz $s \times t$ enteramente formada por unos. En efecto, sabemos que el número de filas sin ceros es $m-(m+n-s-t+1) = s+t-1-n \geq 0$. Por tanto el número de ceros incluidos en s filas cualesquiera es al menos $s-(s+t-1-n) = n-t+1$. Teniendo en cuenta que los ceros ocupan columnas distintas, estas s filas intersectan a lo sumo con $n-(n-t+1) = t-1$

columnas de unos. Luego D es libre de submatrices $s \times t$ enteramente formada por unos.

Por último, veamos que toda matriz binaria de dimensión $m \times n$ libre de submatrices $s \times t$ de unos tiene a lo sumo $\Sigma(D)$ unos. En efecto, sea A una de estas matrices. Denotamos por $F_1, F_2, \ldots, F_m$ a las filas de A. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Sigma(F_i) \geq \Sigma(F_{i+1})$ para $i = 1, \ldots, m-1$. En primer lugar, obsérvese que $\Sigma(F_s) \leq n-1$, ya que en caso contrario $\Sigma(F_1) = \cdots = \Sigma(F_s) = n$ de donde A contendría una submatriz $s \times n$ de unos. En consecuencia,

$$\Sigma(F_j) \leq n-1, \quad j = s, \ldots, m. \tag{1}$$

En segundo lugar, si $\Sigma(F_1) + \cdots + \Sigma(F_s) \geq sn - (n-t)$ entonces el número total de ceros contenidos en estas s filas sería a lo sumo $n-t$. Dicho de otro modo, las s filas intersectarían con al menos $n-(n-t) = t$ columnas de unos, dando lugar a una submatriz $s \times t$ cuyos elementos serían todos unos. Por consiguiente,

$$\Sigma(F_1) + \cdots + \Sigma(F_s) \leq sn - (n-t+1). \tag{2}$$

Finalmente, combinando (1) y (2),

$$\begin{aligned}\Sigma(A) &= \Sigma(F_1) + \cdots + \Sigma(F_s) + \Sigma(F_{s+1}) + \cdots + \Sigma(F_m)\\ &\leq sn - (n-t+1) + (m-s)(n-1)\\ &= mn - (m+n-s-t+1) = \Sigma(D).\end{aligned}$$

De esta forma queda probado que el máximo número de unos que puede contener una matriz binaria de dimensión $m \times n$ tal que de ella no pueda extraerse ninguna submatriz $s \times t$ enteramente formada por unos es $\Sigma(D) = mn - (m+n-s-t+1)$.

Solución enviada por los proponentes

PROBLEMA 72

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq i<k\leq n} \log\left(\sqrt[n]{\frac{3n-2i}{3n+2i}}\right) \log\left(\sqrt[n]{\frac{3n-2k}{3n+2k}}\right).$$

Propuesto por José Luis Díaz Barrero
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

Solución

Utilizando las propiedades de los logaritmos, la suma involucrada en el límite es igual a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n}\ln\left(\frac{3n+2i}{3n-2i}\right)\right)^2-\frac{1}{2n^2}\sum_{1\le i\le n}\ln^2\left(\frac{3n+2i}{3n-2i}\right).$$

Ahora bien, cuando $1\le i\le n$, se tiene que $1<\frac{3n+2i}{3n-2i}\le 5$, con lo que al ser el logaritmo una función estrictamente creciente, deducimos que

$$0<\frac{1}{2n^2}\sum_{1\le i\le n}\ln^2\left(\frac{3n+2i}{3n-2i}\right)\le\frac{\ln^2(5)}{2n},$$

lo que implica que el límite, al tender n a infinito, de la segunda suma es 0. De este modo el límite a calcular es igual a

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n}\ln\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{i}{n}}{\frac{3}{2}-\frac{i}{n}}\right)\right)^2.$$

Pero la cantidad elevada al cuadrado es una suma de Riemann para aproximar la integral en el intervalo $[0,1]$ de la función

$$f(x)=\ln\left(\frac{3}{2}+x\right)-\ln\left(\frac{3}{2}-x\right),$$

que es continua y acotada en $[0,1]$. Ahora, integrando por partes, obtenemos que

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\ln 5-\int_0^1\frac{x}{\frac{3}{2}+x}\,dx-\int_0^1\frac{x}{\frac{3}{2}-x}\,dx=\ln\left(\frac{5^{5/2}}{3^3}\right).$$

De este modo, llegamos a que el límite pedido es $\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{5^{5/2}}{3^3}\right)$.

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde
Universidad Pública de Navarra, Pamplona
También resuelto por M. Fernández, E. M. García y S. G. Moreno, J. C. González, X. Ros (estudiante), J. Vinuesa y el proponente