Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de marzo de 2009.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 109. *Propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.*

Caracterizar todos los triángulos tales que las longitudes de sus medianas están en progresión geométrica y las longitudes de sus lados en progresión aritmética.

Problema 110. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sea k un número real positivo. Dadas dos circunferencias secantes de radios r y R y cuyos centros están a una distancia d, trazar, por uno de sus puntos de intersección, una recta tal que el producto de las longitudes de las cuerdas que determina en ambas circunferencias sea k. Discutir el resultado según los valores de k.

PROBLEMA 111. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Sean $a, b, c > 0$, $\lambda \geq 1$ y $\mu \geq 1$ números reales. Probar que

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[6]{\frac{\left(\sum_{\text{cíclica}} a^2b^2 + 2\lambda \sum_{\text{cíclica}} a^2bc\right)\left(\sum_{\text{cíclica}} a^2 + 2\mu \sum_{\text{cíclica}} ab\right)}{(3+6\lambda)(3+6\mu)}} \leq \frac{1}{3}\sum_{\text{cíclica}} a,$$

donde estamos usando la notación

$$\sum_{\text{cíclica}} F(a,b,c) = F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b).$$

PROBLEMA 112. *Propuesto por Mihaly Bencze, Brasov, Rumanía.*

Sean $x_1, \ldots, x_n \in (0, +\infty)$ con $n \geq 4$. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1+x_1)^2} + \dfrac{1}{(1+x_2)^2} = \dfrac{1}{1+x_3x_4}, \\ \dfrac{1}{(1+x_2)^2} + \dfrac{1}{(1+x_3)^2} = \dfrac{1}{1+x_4x_5}, \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{1}{(1+x_n)^2} + \dfrac{1}{(1+x_1)^2} = \dfrac{1}{1+x_2x_3}. \end{cases}$$

PROBLEMA 113. *Propuesto por Ovidiu Furdui, The University of Toledo, Toledo, Ohio.*

Sea $k \geq 1$ un entero y definimos

$$I_k = \int_0^1 \int_0^1 \left\{\frac{kx}{y}\right\}\left\{\frac{ky}{x}\right\} dy\, dx,$$

donde $\{a\}$ denota la parte fraccionaria de a.

a) Probar que
$$I_k = \int_0^1 \{kx\}\left\{\frac{k}{x}\right\} dx.$$

b) Evaluar I_1 e I_2.

$\star$ c) Obtener una expresión para I_k como función de k.

Problema 114. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Sea $g_p(z) = z^{p+1}{}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}+\frac{p}{2}, \frac{3}{2}+\frac{p}{2}, -z^2\right)$, donde ${}_2F_1$ denota la función hipergeométrica. Probar que si $x>0$ y $0<a<2$ entonces

$$\frac{1}{a-2}\left(g_{1-a}\left(\frac{1}{x}\right)+g_{1-a}(x)\right)+\frac{1}{a}\left(g_{a-1}\left(\frac{1}{x}\right)+g_{a-1}(x)\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi}{2}\right)}.$$

Soluciones

Problema 85. *Propuesto por I. V. Maftei y P. G. Popescu, Bucarest, Rumanía.*

Sean a, b, c los lados de un triángulo ABC y sean r y R los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\geq 2-\frac{r}{R}.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sean $p=(a+b+c)/2$ y S, respectivamente, el semiperímetro y el área del triángulo ABC. Teniendo en cuenta las identidades $pr = S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C = \frac{1}{2}\frac{abc}{2R}$ y $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, se sigue que

$$\frac{r}{R}=\frac{4S^2}{pabc}=\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}.$$

De este modo el resultado a probar es equivalente a

$$a^3+b^3+c^3\geq 4abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Mediante sencillas manipulaciones, la desigualdad anterior se transforma en

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc,$$

que a su vez puede escribirse como

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 6.$$

Finalmente, esta desigualdad es cierta puesto que, para cada $x>0$, se cumple $x+\frac{1}{x}\geq 2$, alcanzándose la igualdad únicamente para $x=1$. De este último hecho se deduce que la igualdad en el enunciado propuesto se alcanza para $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$; es decir, cuando el triángulo es equilátero.

También resuelto por M. Amengual (dos soluciones), R. S. Eléxpuru, M. Fernández, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, A. Munaro, X. Ros, C. Sánchez y los proponentes.

PROBLEMA 86. *Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña.*

En un plano se dan cuatro puntos fijos A, B, C y D. Construir un cuadrado de lados contenidos en cuatro rectas a, b, c y d de forma que $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ y $D \in d$. Demostrar que se pueden construir seis de estos cuadrados.

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.

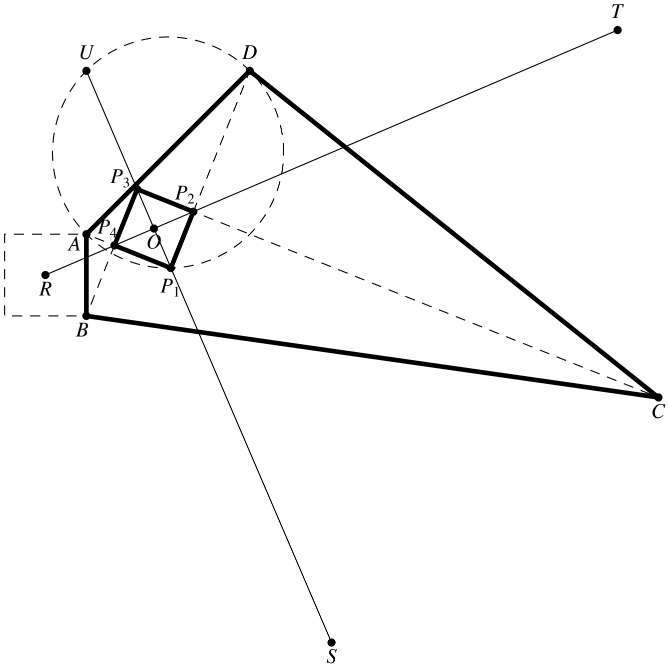

Figura 1: Construcción del cuadrado mediante cuadrados hacia afuera.

Una conocida propiedad (teorema de Van Aubel, véase por ejemplo `http://mathworld.wolfram.com/vanAubelsTheorem.html`) dice que si en un cuadrilátero construimos sobre cada lado un cuadrado en el mismo sentido (por ejemplo hacia afuera), las rectas que unen los centros de estos cuadrados correspondientes a lados opuestos son perpendiculares.

En la situación propuesta consideramos el cuadrilátero $ABCD$, véase la figura 1. Los centros de los cuadrados son R, S, T, U (en la figura 1 sólo se ha dibujado el cuadrado correspondiente al lado AB).

Por otra parte, un vértice cualquiera del cuadrado solución (por ejemplo P_1) tiene que estar sobre la circunferencia de diámetro AD; además, la diagonal P_1P_3, por ser bisectriz de $\widehat{AP_1D}$ y de $\widehat{BP_3C}$, pasará por U y S, lo que nos permite trazarla. El guión de la construcción partiendo del cuadrilátero $ABCD$ es el siguiente:

a) Se trazan los centros de los cuadrados construidos sobre cada lado hacia afuera R, S, T y U.

b) Se trazan las diagonales RT y US que se cortan en el centro del cuadrado O.

c) La segunda intersección de la diagonal US con la correspondiente circunferencia de diámetro AD nos define el vértice P_1. Los restantes vértices se obtienen con sucesivos giros de $\pi/2$ con centro en O aplicados a P_1.

Procediendo de modo análogo con los centros de los cuadrados construidos hacia "adentro" se obtiene otro cuadrado. En la figura 2 se muestra la construcción de dos cuadrados, usando cuadrados hacia afuera en un caso y cuadrados hacia adentro en otro.

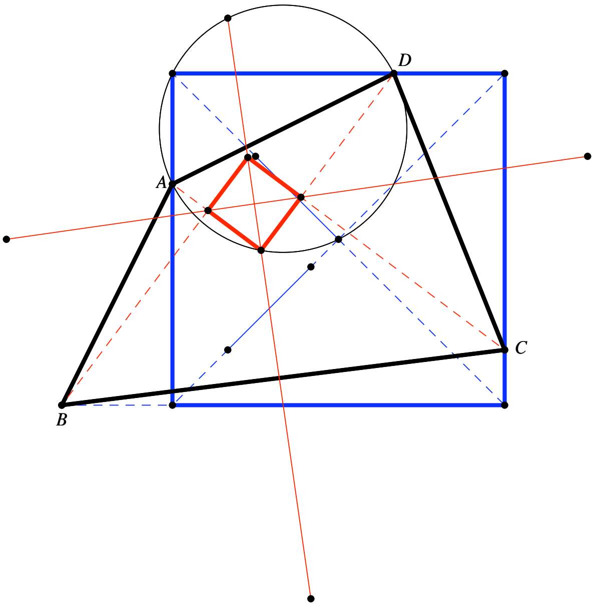

Figura 2: Construcción de dos cuadrados, uno usando cuadrados hacia afuera y otro hacia adentro.

Las propiedades en las que nos hemos basado son ciertas para cualquier cuadrilátero, por tanto hay seis soluciones correspondientes a los tres cuadriláteros que es posible obtener con los puntos A, B, C y D; estos son $ABCD$, $ACDB$ y $ADBC$. En la figura 3 se muestran las seis soluciones asociadas con cuatro puntos A, B, C y D sin líneas auxiliares.

También resuelto por D. Lasaosa y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

Nota. Miguel Amengual nos informa de que el problema (sin el apartado final en el que se pide demostrar que se pueden construir seis de estos cuadrados) fue propuesto

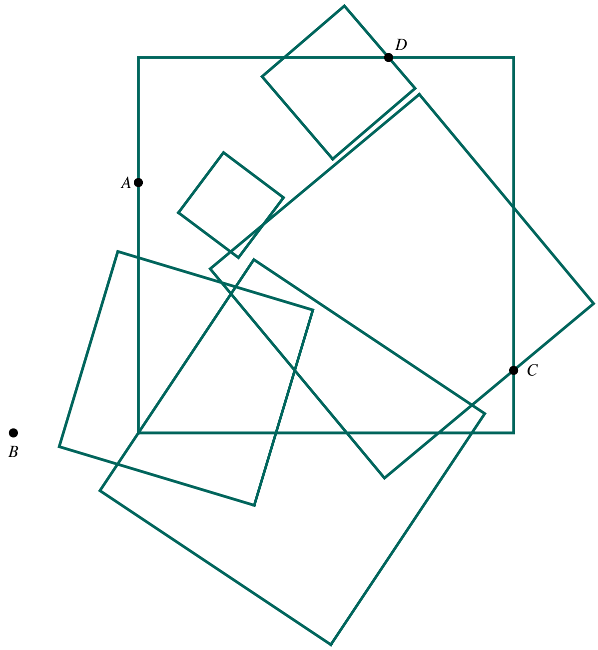

Figura 3: Construcción de todos los posibles cuadrados para cuatro puntos A, B, C y D.

en la fase final de la XII Olimpiada Matemática Española en 1976, y aparece resuelto en el CD-ROM *2004*, editado y reproducido por la RSME (primera edición, marzo de 2004).

PROBLEMA 87. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA, AB en los puntos D, E, F. Sean D', E', F' puntos variables en las rectas EF, FD, DE.

1. Demostrar que AD', BE', CF' concurren o son paralelas si y sólo si DD', EE', FF' concurren o son paralelas.
2. Si DD', EE', FF' son paralelas, hallar el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas AD', BE', CF'. ¿En qué casos dicho lugar es una circunferencia?

Solución al apartado 1 enviada por Saturnino Campo Ruiz, I. E. S. Fray Luis de León, Salamanca.

Planteamos una situación más general que la propuesta en el enunciado del problema.

Digamos que el triángulo $U'V'W'$ está *inscrito* en el triángulo UVW cuando los puntos U', V' y W' pertenecen respectivamente a las rectas VW, UW y UV. Además, diremos que los triángulos UVW y $U'V'W'$ están en perspectiva si las rectas UU', VV' y WW' son paralelas o concurrentes. Con estas definiciones tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN. *Si T_1 es un triángulo inscrito en otro triángulo T_2, y a su vez T_2 está inscrito y está en perspectiva con otro triángulo T_3, entonces T_1 y T_3 están en perspectiva si y sólo si T_1 y T_2 están en perspectiva.*

El resultado propuesto es un caso particular de esta propiedad: pues sean $T_2 = \triangle DEF$ y $T_3 = \triangle ABC$; el triángulo T_2 está inscrito en T_3 y, como es conocido, están en perspectiva en una perspectividad de centro P, el punto de Gergonne del triángulo ABC. Por otra parte, $T_1 = \triangle D'E'F'$ es un triángulo inscrito en T_2.

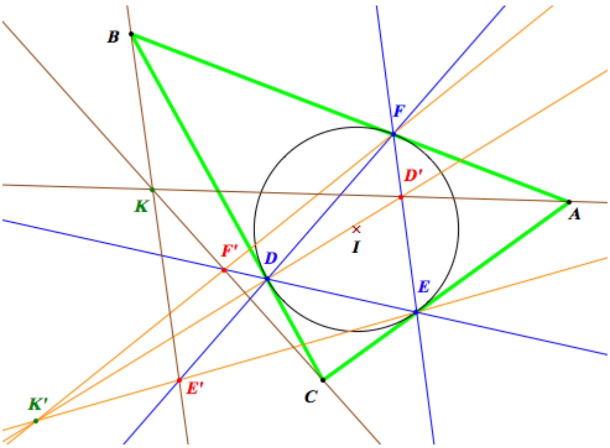

Figura 4: Ilustración correspondiente a la solución del Problema 87.

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN. Consideraremos coordenadas homogéneas (x, y, z) usando el sistema de referencia proyectivo $\mathfrak{R} = \{A, B, C; P\}$, siendo $T_3 = \triangle ABC$ y P el centro de la perspectividad supuesta entre los triángulos $T_2 = \triangle DEF$ y T_3. Véase la figura 4.

Pongamos para los puntos de la referencia las siguientes coordenadas: $A = \lambda(1, 0, 0)$, $B = \lambda(0, 1, 0)$, $C = \lambda(0, 0, 1)$; $P = \lambda(1, 1, 1)$. Las rectas AB, BC y AC tienen, respectivamente, las ecuaciones $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Los puntos D, E y F son las proyecciones desde P de los vértices de T_2 sobre los lados de T_3. Sus coordenadas son $D = \lambda(0, 1, 1)$, $E = \lambda(1, 0, 1)$, $F = \lambda(1, 1, 0)$. Las ecuaciones de los lados de T_2 son $EF\colon x = y + z$, $DF\colon y = x + z$, $DE\colon z = x + y$.

Para los vértices de $T_1 = \triangle D'E'F'$ tomemos $D' = \lambda(a + a', a, a')$ sobre la recta EF, $E' = \lambda(b, b + b', b')$ sobre la recta DF y $F' = \lambda(c, c', c + c')$ sobre la recta DE.

Entonces, para el resto de objetos geométricos resultan las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} AD'\colon a'y = az, & DD'\colon (a'-a)x + (a+a')y = (a+a')z, \\ BE'\colon b'x = bz, & EE'\colon (b+b')x + (b'-b)y = (b+b')z, \\ CF'\colon c'x = cy, & FF'\colon (c+c')x - (c+c')y = (c-c')z. \end{array}$$

Puesto que los triángulos T_3 y T_1 están en perspectiva, las rectas AD', BE' y CF' deben ser concurrentes, y esto se expresa con la anulación del determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a' & -a \\ b' & 0 & -b \\ c' & -c & 0 \end{vmatrix} = ab'c - a'bc'.$$

Y, por otra parte, que los triángulos T_2 y T_1 estén en perspectiva significa que las rectas DD', EE' y FF' son concurrentes, lo que se expresa como

$$\begin{vmatrix} a'-a & a+a' & -(a+a') \\ b+b' & b'-b & -(b+b') \\ c+c' & -(c+c') & -(c-c') \end{vmatrix} = 4(ab'c - a'bc').$$

Pero ambas condiciones de concurrencia son idénticas, como se quería demostrar. Resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones resulta que el centro de perspectiva de los triángulos T_1 y T_3 es el punto $K = \lambda(a'b, b'a, a'b')$, y que el centro de perspectiva de los triángulos T_1 y T_2 es el punto $K' = \lambda\big(b(a+a'), a(b+b'), a'b + ab'\big)$. $\square$

Solución al apartado 2 enviada por el proponente.

Sea X el punto de corte de las rectas BE' y CF' (y AD'). Hallaremos el lugar geométrico de X como intersección de pares de rayos homólogos por una proyectividad entre los haces de rectas por B y C. Definimos:

$$\varphi : BE' \mapsto E' \mapsto EE' \mapsto FF' \mapsto F' \mapsto CF',$$

correspondencia obtenida por sección con la recta FD, proyección desde E, sección con la recta del infinito y proyección desde F, sección con ED, y finalmente proyección desde C. Así, el lugar geométrico de X es una cónica que pasa por B, C y también por A puesto que $\varphi(BA) = CA$. La tangente al lugar por C es $\varphi(BC) =$ la paralela a DE por C, y la tangente al lugar por B es $\varphi^{-1}(CB) =$ la paralela a FD por B. Si construimos el triángulo $A'B'C'$ cuyos lados $B'C', C'A', A'B'$ son las paralelas a EF, FD, DE por A, B, C, es fácil ver que las rectas AA', BB', CC' son bisectrices del triángulo ABC y alturas de $A'B'C'$, luego son concurrentes, y en virtud del teorema de Brianchon existe una cónica —nuestro lugar geométrico— inscrita en el triángulo $A'B'C'$ con puntos de contacto A, B, C. El lugar geométrico buscado es entonces la elipse que pasa por A, B, C con tangentes perpendiculares a las bisectrices, y será una circunferencia si y sólo si el circuncentro y el incentro de ABC coinciden, es decir, ABC es un triángulo equilátero.

Nota. La solución dada al apartado 2 por Saturnino Campo prueba, en el contexto más general presentado en su solución al apartado 1, que si el punto de intersección K' de las rectas DD', EE' y FF' se mueve sobre una cierta recta r (no necesariamente la recta del infinito, como se plantea en la propuesta), entonces el punto K, intersección de las rectas AD', BE' y CF', describe una cónica circunscrita al triángulo ABC.

También resuelto por D. Lasaosa, R. S. Eléxpuru (apartado 1) y el proponente.

Problema 88. *Propuesto por Ovidiu Bagdasar, Babes Bolyai University, Cluj Napoca, Rumanía.*

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Si $S_1 = \sum_{i=1}^n x_i$ y $S_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, probar que

$$\sum_{i=1}^n \frac{S_2 - x_i^2}{S_1 - x_i} \le n\frac{S_2}{S_1}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Kau, Hong Kong, China.

Por la desigualdad de Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned}
n\frac{S_2}{S_1} - \sum_{i=1}^n \frac{S_2 - x_i^2}{S_1 - x_i} &= \frac{1}{S_1}\sum_{i=1}^n \frac{x_i(x_iS_1 - S_2)}{S_1 - x_i}\\
&= \frac{1}{S_1}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i(S_1^2 - S_2)}{S_1 - x_i} - x_iS_1\right)\\
&= \frac{1}{S_1}\left((S_1^2 - S_2)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S_1 - x_i} - S_1^2\right)\\
&= \frac{1}{S_1}\left(\sum_{i=1}^n x_i(S_1 - x_i)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S_1 - x_i}\right) - S_1\\
&\ge \frac{1}{S_1}\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(S_1 - x_i)}\sqrt{\frac{x_i}{S_1 - x_i}}\right) - S_1\\
&= \frac{1}{S_1}S_1^2 - S_1 = 0,
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

También resuelto por D. Lasaosa, P. Perfetti, J. Rivero, X. Ros y el proponente.

Problema 89. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Se considera un triángulo equilátero ABC y los puntos D y E situados sobre los lados AC y AB, respectivamente, tales que los segmentos AE y CD tienen la misma longitud. Sea M el punto medio del lado BC y P la intersección de BD con CE. Demostrar que los ángulos APE y BPM son iguales.

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

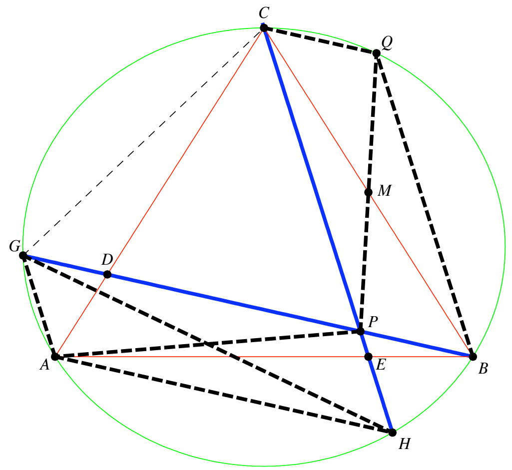

Figura 5: Ilustración correspondiente a la solución del Problema 89.

Por construcción (véase la figura 5) se tiene $\angle ABD = \angle BCE = \alpha$. Sean G y H, respectivamente, los puntos donde BD y CE cortan de nuevo a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Son obvias entonces las igualdades

$$\angle ABG = \angle ACG = \angle AHG = \angle BCH = \angle BAH = \angle BGH = \alpha,$$

y

$$\angle ACH = \angle ABH = \angle AGH = \angle CBG = \angle CHG = \angle CAG = \frac{\pi}{3} - \alpha.$$

Así,

$$\angle GAH = \angle GAC + \angle CAB + \angle BAH = \frac{2\pi}{3},$$
$$\angle AHP = \angle AHG + \angle GHC = \frac{\pi}{3}$$

y

$$\angle PGA = \angle BGH + \angle HGA = \frac{\pi}{3},$$

luego $AHPG$ es un paralelogramo con ángulos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$.

Sea ahora Q el simétrico de P respecto de M. Por ser M el punto medio de PQ y BC, $PBQC$ es también un paralelogramo. Además

$$\angle BPC = \pi - \angle CBG - \angle BCH = \frac{2\pi}{3}.$$

Como $\angle PBH = \angle BHP = \frac{\pi}{3}$, $\angle CGP = \frac{\pi}{3}$ y $\angle GCP = \angle GCA + \angle ACH = \frac{\pi}{3}$, los triángulos PBH y PCG son equiláteros y se tiene $AH = PG = PC = BQ$ y $AG = PH = PB = QC$, con lo que los paralelogramos $AGPH$ y $PBQC$ son iguales. En particular son iguales los triángulos APH y QPB, luego

$$\angle APE = \angle APH = \angle QPB = \angle MPB,$$

con lo que concluimos.

(Nótese que, al ser $\angle BQC = \angle BPC = \frac{2\pi}{3}$, el punto Q también está en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, aunque este hecho no haya sido utilizado en esta solución.)

También resuelto por R. Barroso, S. Campo, C. Sánchez y el proponente.

Problema 90. *Propuesto por Manuel Benito Muñoz, I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño.*

Determinar los triángulos rectángulos de lados naturales (triángulos pitagóricos) para los que se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a cuatro veces el área del triángulo más uno.

Solución enviada por Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

Si el triángulo que tiene por lados a, b, c cumple la condición del enunciado, y $a > b > c$, entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 = 2bc + 1,$$

y, por lo tanto, $(b-c)^2 = 1$, de donde deducimos que $b = c+1$. Poniendo $x = 2c+1$, tenemos que

$$a^2 = 2c(c+1) + 1 = (x-1)\frac{x+1}{2} + 1,$$

o, equivalentemente, $2a^2 = x^2 + 1$ que es una ecuación de Pell.

Es conocido que las únicas soluciones de la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = -1$ son de la forma

$$x = \frac{(p+q\sqrt{D})^n + (p-q\sqrt{D})^n}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{(p+q\sqrt{D})^n - (p-q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}},$$

donde p, q forman la solución básica y n es un numero impar.

Así, tomando en nuestro caso $p = 1$, $q = 1$, $D = 2$ e $y = a$, tendremos que los triángulos que cumplen las condiciones del enunciado, son los que tienen por lados

$$a = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}},$$
$$b = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n + 2}{4},$$
$$c = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n - 2}{4},$$

con $n > 1$ impar. Por ejemplo, para $n = 3, 5, 7$ y 9 tenemos las ternas $(5, 4, 3)$, $(29, 21, 20)$, $(169, 120, 119)$ y $(985, 697, 696)$.

También resuelto por R. Barroso, C. Beade, S. Campo, M. Fernández, D. Lasasosa, A. Oller, J. Vinuesa y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.