

**INVARIANTES NUMERICOS DE LAS
CURVAS ALGEBROIDES REDUCIDAS.
UNA DESCRIPCION EXPLICITA**

FELIX DELGADO DE LA MATA

THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY

ANN ARBOR, MICHIGAN 48106-1000

AT THE UNIVERSITY OF MICHIGAN

UNIVERSITY MICROFILMS

En primer lugar, quiero agradecer a Antonio Campillo su excelente labor de dirección y su apoyo durante la realización de esta Memoria.

Asimismo quiero expresar mi agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Álgebra y Geometría, especialmente al Prof. José M. Aroca que despertó en mí el interés por la Geometría y a Ana Nuñez, con quien he recorrido esta etapa de formación.

Finalmente doy las gracias a M^a José Valles por la excelente labor mecanográfica.

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO

DE DOCTOR EN CIENCIAS

SECCION DE MATEMATICAS

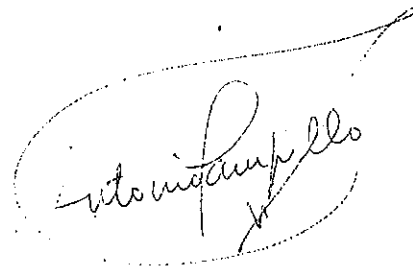
POR

FELIX DELGADO DE LA MATA

ANTONIO CAMPILLO LOPEZ, CATEDRATICO DE ALGEBRA DE LA FACULTAD DE
CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

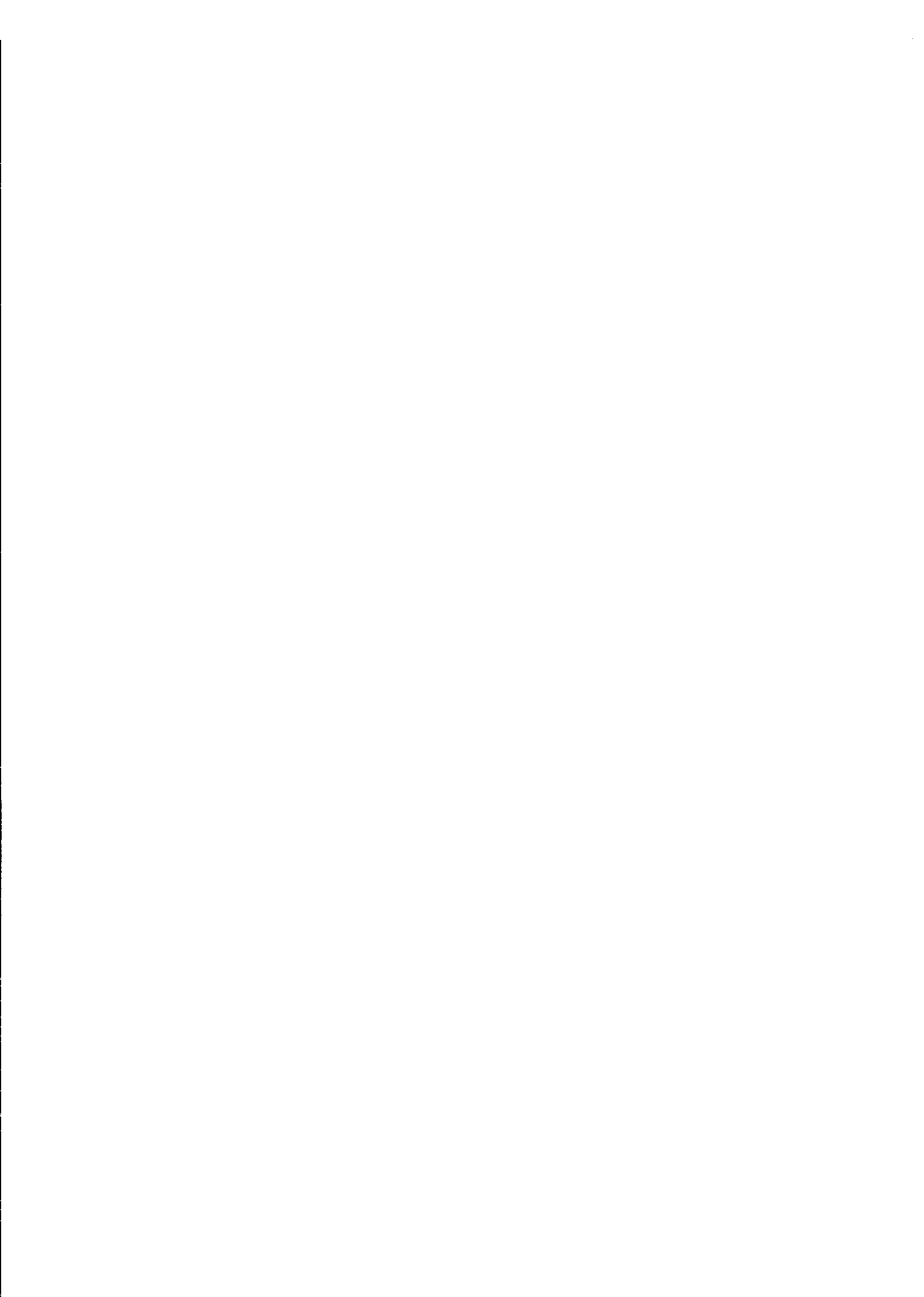
CERTIFICA : Que la presente Memoria "INVARIANTES NUMERICOS DE LAS
CURVAS ALGEBROIDES REDUCIDAS. UNA DESCRIPCION EXPLICITA".
Ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento
de Algebra y Geometría de la Facultad de Ciencias de la
Universidad de Valladolid por D. Félix Delgado de la
Mata, y para que conste en cumplimiento de la vigente legis-
lación, presenta y apadrina ante la Facultad de Cien-
cias de dicha Universidad la referida Tesis de Doctorado.

Valladolid a treinta de Mayo de mil novecientos ochenta
y seis

A handwritten signature in cursive script, enclosed within a hand-drawn oval. The signature appears to read "Antonio Campillo López".

Fdo.: Prof. Dr. Antonio Campillo López

A MIS PADRES



INDICE

Introducción I

Capítulo I. Arbol de contactos principales de una singularidad
de curva reducida

- 1.0. Notaciones y preliminares 1
- 1.1. Par de contacto de dos ramas 5
- 1.2. Contactos principales de una curva algebroide . . 15
- 1.3. Arbol de contactos principales de una curva . . . 28

Capítulo II. Anillos saturados. Arbol de exponentes característicos
de una singularidad

- 2.1. Estructura del anillo saturado de una curva plana. 39
- 2.2. Semigrupos saturados y su estructura 61
- 2.3. Arbol de exponentes característicos de una curva. 74
- 2.4. Desarrollos de Puiseux 82

Capítulo III. El semigrupo de valores

- 3.1. Generación de un semigrupo a partir de sus proyec-
ciones 99
- 3.2. La simetría de los maximales 110
- 3.3. El contacto maximal 135
- 3.4. Una determinación explícita del semigrupo 155

Capítulo IV. Aspectos Geométricos. El grafo dual

- 4.0. Introducción y preliminares 177

4.1 Puntos infinitamente próximos 182

4.2 El grafo dual 188

BIBLIOGRAFIA 225

INTRODUCCION

18/05/2024

18/05/2024

INTRODUCCION

En esta memoria se consideran curvas algebroides planas, reducidas $C = \text{Spec}(k[[X,Y]]/(f))$ donde $f = f_1 \dots f_d$; f_i irreducible en $k[[X,Y]]$, $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$ y k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria (o bien gérmenes analíticos de curvas sobre \mathbb{C}). Nuestro principal objetivo es efectuar una descripción combinatoria explícita y simple de manejar de diferentes invariantes numéricos que caracterizan el tipo de equisingularidad.

El tipo de equisingularidad para curvas planas fue introducido por O. Zariski en su serie de artículos "Studies in Equisingularity" [79], y su estudio ha conducido a numerosos desarrollos hasta el momento, siendo de destacar como resultados de más envergadura los debidos a Teissier, quien mediante un estudio sistemático de las familias de singularidades ha construido la llamada "estratificación equisingular" de una variedad algebraica o espacio analítico complejo, usando como invariantes numéricos básicos las multiplicidades de las variedades polares locales (véase [73] y [71]).

El más ambicioso proyecto de Zariski propone establecer un concepto de equisingularidad para las familias que equivalga, inductivamente, a la equisingularidad de la familia discriminante por una proyección lineal. Este posible concepto, que reduciría por proyecciones la teoría al caso de curvas (de curvas planas si se comienza con hipersuperficies), debería además ser "estable por explosiones" en el sentido que Zariski precisa. Sin embargo la igualdad de multiplicidades de las variedades polares (o equivalentemente las condiciones de Whitney o el tipo topológico local) no cumple la propiedad anterior. Un reciente ejemplo de singularidades de superficies en \mathbb{C}^3 debido a Luengo [57] muestra que la llamada "equisingularidad genérica" que Zariski había conjeturado como válida tampoco es estable por explosiones.

En esta situación parece razonable profundizar una vez más en el intento de una mejor comprensión de las singularidades de curvas planas, para las cuales el concepto de equisingularidad está bien establecido. Cuando la curva tiene una sola rama, es decir $d = 1$ con la notación del principio, la equisingularidad está caracterizada por los exponentes característicos de Puiseux, el semigrupo de valores, los valores del contacto maximal, el grafo dual, la topología local, las condiciones de Whitney, etc... (véase [18]). La relación explícita entre todos estos datos es bien conocida y ampliamente usada en la literatura.

En el caso $d > 1$ la equisingularidad se caracteriza por el tipo de equisingularidad de cada rama y las multiplicidades de intersección entre los pares de ramas, lo cual equivale también a la topología local, condiciones de Whitney, grafo dual y semigrupo de

valores $S \subset \mathbb{Z}_+^d$, $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} / n \geq 0\}$ (ver Waldi [76] para esto último). A la vista de la técnica usada por Campillo en [21] parece, sin embargo, existir una vía de trabajar con un análogo de los exponentes característicos de Puiseux (véase nuestro Capítulo II) y análogamente, a la vista del trabajo de Lejeune [51], una vía de trabajar con los valores del contacto maximal (véase nuestros Capítulos I y III). Por otro lado, aunque la equisingularidad es equivalente a la igualdad de semigrupos en \mathbb{Z}_+^d , no se ha podido describir explícitamente el semigrupo correspondiente a un tipo dado salvo para el caso $d = 2$ en el reciente trabajo de Bayer [10]. Nosotros conectamos en esta memoria los invariantes tipo exponentes característicos (en el sentido de [21]), con los valores del contacto maximal (en el sentido de [51]), con el semigrupo de valores para d arbitrario y con la estructura del grafo dual; dando descripciones explícitas de cada uno de estos tipos de invariantes en función de cada uno de los otros.

Una mejor comprensión de la topología local ha sido también obtenida recientemente (véase Lê: [49]): A partir de datos topológicos se puede obtener información sobre los invariantes polares, es decir los cocientes $\frac{(C, \Gamma)}{\text{mult}(\Gamma)}$, donde Γ es una componente irreducible de la curva polar local genérica. La obtención de información numérica sobre los componentes irreducibles de la polar fue iniciada para el caso $d = 1$ por Mèrle en su conocido trabajo [60] y continuando por varios autores entre los que destaca Casas ([23], [24]), quien analiza la principal dificultad de este estudio: la polar local genérica tiene un tipo de equisingularidad que no depende sólo del tipo de C , sino de su clase módulo isomorfismo analítico.

También merece ser destacado el papel de las polares espe-

ciales, para las cuales hay un resultado idéntico al de Mèrle que tiene aplicación en un interesante enfoque de la conjetura jacobiana (véase Ephraim [31]). Si se efectuase un buen análisis de las polares para el caso $d \geq 2$, pensamos que entonces se podría proporcionar un buen avance en la conjetura jacobiana y esto lo hemos tenido en cuenta al elaborar el Capítulo III de esta memoria y nuestro trabajo [27].

Otro tipo de problemas nos han llevado a enfocar la Memoria en la forma en que lo hemos hecho. Es frecuente encontrar en la literatura ejemplos de invariantes cuyo cálculo o comportamiento es difícil de efectuar explícitamente salvo para casos particulares, y en este sentido es frecuente encontrar cálculos para curvas planas con $d = 1$ que no tienen análogo para $d > 1$. Por ejemplo, no conocemos un cálculo similar al de Loesser [55] o Igusa [42] para el exponente de Arnold y demás elementos del espectro de una singularidad con varias ramas, ni conocemos la descripción (en el caso $d > 1$) de la serie de Poincaré hecha por Bollaerts en [12] para el número de soluciones p -ádicas de una ecuación $f(X,Y) = 0$, $f \in \mathbb{Q}_p[X,Y]$ en el caso $d = 1$. Esperamos que nuestra Memoria proporcione cálculos explícitos para situaciones como las anteriores. Describiremos a continuación el contenido de la Memoria.

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria, sea $C = \text{Spec}(k[[X, Y]]/(f))$; donde $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_d$, $f_i \in k[[X, Y]]$ irreducible y $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$. (Es decir C es una curva algebroide plana y reducida sobre k). Sus componentes irreducibles serán entonces $C_i = \text{Spec}(k[[X, Y]]/(f_i))$ y asociada a cada una de ellas tenemos la valoración discreta v_i ($1 \leq i \leq d$) que supondremos normalizada. El semigrupo de valores $S_i = \mathfrak{s}(C_i)$ viene dado por $\{v_i(x) / x \in k[[X, Y]]/(f_i)\} \subset \mathbb{Z}_+$ y el semigrupo de valores de la curva C es el subsemigrupo de \mathbb{Z}_+^d dado por

$$S(C) = \{\underline{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x)) \in \mathbb{Z}_+^d / x \in k[[X, Y]]/(f)$$

y x es un no divisor de cero $\}$. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos S en vez de $S(C)$. Es conocido que si C y C' son dos curvas algebroides, planas y reducidas con d y d' ramas respectivamente, C y C' son equisingulares si y sólo si $d = d'$ y para una reordenación de las ramas es $S(C) = S(C')$ ([76]). Sin embargo, la estructura de $S(C)$ para un tipo de equisingularidad dado es muy complicada de expresar como veremos en la memoria.

Asociado el anillo $\mathcal{O} = k[[X, Y]]/(f)$ podemos tomar su anillo saturado $\tilde{\mathcal{O}}$, [21], definido como el menor anillo A , $\mathcal{O} \subset A \subset \tilde{\mathcal{O}}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$ denota el cierre entero de \mathcal{O} en su anillo total de fracciones) verificando la condición siguiente: Si $z \in A$ y $z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s$ son no divisores de cero de A tales que $z \cdot z_1^{-1}, z w_j^{-1}, (z_1 \cdots z_r)(w_1 \cdots w_s)^{-1} \in \tilde{\mathcal{O}} = \bar{A}$, entonces $z(z_1 \cdots z_r)(w_1 \cdots w_s)^{-1} \in A$.

El anillo saturado $\tilde{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} es el anillo local de una curva algebroide reducida sobre k con d componentes irreducibles. Asociado a $\tilde{\mathcal{O}}$ tenemos el semigrupo saturado de C , que denotaremos $S(\tilde{\mathcal{O}})$ ó \tilde{S} , definido como $S(\tilde{\mathcal{O}}) = \{\underline{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x)) / x \in \tilde{\mathcal{O}}, x \text{ no divi}$

son de cero $\} \subset \mathbb{Z}_+^d$. Por supuesto, también se tienen los semigrupos saturados \tilde{S}_i de la rama C_i para $i = 1, 2, \dots, d$.

Podemos tomar $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \dots \cdot \pi_N: S_N \rightarrow S_0 = \text{Spec}(k[[X, Y]])$, la "resolución de la singularidad" de C , donde π_i y S_i son lo siguiente: $\pi_1: S_1 \rightarrow S_0$ es la transformación cuadrática de S_0 con centro en el punto cerrado de C , O_0 . Supongamos definido

$\pi^{(i)} = \pi_1 \cdot \dots \cdot \pi_i: S_i \rightarrow S_0$ ($\bar{C}^{(i)}$ denota la transformada total de C , $\bar{C}^{(i)} = \pi^{(i)^{-1}(C)$; $E(i) = \pi^{(i)^{-1}(O_0)$ es el divisor excepcional y $C^{(i)} = \bar{C}^{(i)} - E(i)$ denota la transformada estricta de C), si $\bar{C}^{(i)}$ es una curva cuyos puntos singulares son todos de cruzamientos normales nos detenemos y ponemos $N = i$; en caso contrario π_{i+1} es la explosión de S_i en los puntos singulares de $\bar{C}^{(i)}$ que no son de cruzamientos normales.

Asociado a $\pi^{(i)}: S_i \rightarrow S_0$ podemos considerar también los puntos infinitamente próximos de C en el i -ésimo entorno infinitesimal, es decir los puntos del conjunto $C^{(i)} \cap E(i) = \{O_i^1, \dots, O_i^s\}$. El conjunto de puntos infinitamente próximos se distribuye habitualmente en un árbol, el árbol de puntos infinitamente próximos de C . Si O_i^j es un punto infinitamente próximo en el i -ésimo entorno infinitesimal, diremos que O_i^j es un punto libre si es un punto no singular de $E(i)$. Si, en caso contrario, O_i^j es un punto singular de $E(i)$ diremos que O_i^j es un punto satélite (en este caso el punto debe ser necesariamente un cruzamiento normal de dos componentes de $E(i)$).

En el caso en que C sea una curva irreducible, tendremos un único punto infinitamente próximo en cada entorno y por tanto una sucesión O_0, O_1, \dots, O_N a cuyos términos les podemos asociar multipli

Los exponentes característicos son exactamente los exponentes de Puiseux de C , mientras que los valores del contacto maximal son un sistema minimal de generadores del semigrupo S , es decir:

$S = \sum_0^g \bar{\beta}_i \mathbb{Z}_+$. Los exponentes característicos se pueden determinar también a partir del semigrupo $\tilde{S} = S(\tilde{\mathcal{O}})$, del anillo saturado ya que $\beta_0 = \min(\tilde{S} - \{0\})$ y β_{j+1} es el mínimo elemento de \tilde{S} tal que no es múltiplo de $e_j = \text{m.c.d.}(\beta_0, \dots, \beta_j)$. Como en lo sucesivo trabajaremos con varias ramas C_1, \dots, C_d denotaremos por $\beta_j^i, \bar{\beta}_j^i$, etc... (con un subíndice i) los datos correspondientes a la i -ésima rama.

Estas relaciones numéricas entre exponentes característicos, valores del contacto maximal, semigrupos y el resto de invariantes que usualmente se manejan en el estudio de las singularidades analíticamente irreducibles, son bien conocidas y extensivamente utilizadas en la literatura. En esta memoria obtenemos relaciones análogas para el caso reducible, permitiendo conectar invariantes del tipo exponentes característicos (obtenidos a partir del semigrupo saturado) con invariantes del tipo valores del contacto maximal (ya utilizados esencialmente por M. Lejeune en su Tesis [51]) y que nosotros localizaremos como "generadores" en un cierto sentido del semigrupo $S(C)$.

Puesto que los datos que hay que manejar en el caso reducible tienen una estructura combinatoria ciertamente más complicada que en el caso irreducible, nuestro primer objetivo ha sido buscar un sistema de distribuir estos datos de una forma cómoda de manejar en el sentido de que nos permita trabajar con no muchos datos (análogo por ejemplo a considerar generadores de un semigrupo de \mathbb{Z}_+) y

tidades, concretamente a cada O_i la multiplicidad de la transformada estricta de C en dicho punto. De esta forma tenemos una sucesión del tipo:

$$\overbrace{n_0, \dots, n_0}^{h_0}, \overbrace{n_1, \dots, n_1}^{h_1}, \dots, \overbrace{n_i, \dots, n_i}^{h_i}, \dots, \overbrace{1, \dots, 1}^{k_g}$$

y se dice que el género de la curva es g si existen exactamente g enteros $s_1 < s_2 < \dots < s_g$ de manera que $n_{s_i} = e_i$ divide a n_{s_i-1} y $n_{s_g} = 1$. Como puntos libres en la sucesión de puntos infinitamente próximos aparecen los siguientes: $h_0 = l_0$ puntos de multiplicidad n_0 , el primer punto de multiplicidad n_1 , $l_i \geq h_{s_i} - 2$ últimos puntos de multiplicidad n_{s_i} y el primero de multiplicidad n_{s_i+1} para $i = 1, 2, \dots, g-1$ (además del punto O_N). Es conocido que los enteros $h_0, h_1, \dots, l_1, h_{s_1}, h_{s_1+1}, \dots, k_g$ determinan el tipo de equisingularidad de la curva C . Los invariantes comúnmente asociados a la clase de equisingularidad de C son los exponentes característicos β_0, \dots, β_g y los valores del contacto maximal $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g$ definidos por (ver [18]):

$$\beta_0 = \bar{\beta}_0 = n_0$$

$$k \geq 0, \beta_{k+1} = \beta_k + l_k n_{s_k} + n_{s_k+1}$$

$$k \geq 0, \bar{\beta}_{k+1} = \sum_{j \leq s_k} h_j n_j^2 + n_{s_k+1}$$

ambos conjuntos de datos están relacionados por la siguiente relación numérica ($N_k = e_{k-1}/e_k$, $k = 1, \dots, g$):

$$(*) \quad \bar{\beta}_{k+1} = N_k \bar{\beta}_k + (\beta_{k+1} - \beta_k)$$

por otra parte disponer de un método recursivo para manejar simultáneamente datos de una curva C con d ramas y curvas que consten de $d' < d$ ramas de las de C .

En este sentido se introduce en el Capítulo I (1.2.1) la noción de par de contacto, (q, c) , de las ramas que forman la curva C . Se introduce en términos analíticos utilizando desarrollos de Hamburger-Noether que es el lenguaje que utilizamos técnicamente en gran parte de la memoria. El par de contacto proporciona, en el caso de dos ramas, un dato equivalente a la multiplicidad de intersección (supuesto conocidos los tipos de equisingularidad de las ramas) (1.1.9) y es una forma de medir los puntos infinitamente próximos comunes a todas las ramas. Más concretamente, sea

$B(C) = \{O_0, \dots, O_n\}$ el conjunto de puntos infinitamente próximos comunes a todas las ramas (es decir: $\forall i \leq n$ existe un único punto en el i -ésimo entorno infinitesimal y n es el mayor con esta condición) y $B^*(C)$ el subconjunto de los puntos libres de $B(C)$. El par de contacto es entonces la única pareja de números naturales tal

que $\#B^*(C) = \sum_{i < q} (l_i + 1) + c$, donde $l_i = l_i^k$, $k = 1, 2, \dots, d$;

$0 \leq c \leq \min \{l_q^k + 1 / k = 1, 2, \dots, d\}$ (4.1.4) y de manera que

$c = 0 \Leftrightarrow O_n$ es un punto satélite terminal (es decir, todos los puntos del $n+1$ -ésimo entorno infinitesimal son libres y O_n es un punto satélite).

Si consideramos una curva irreducible, definida por $h(X, Y) = 0$, de género q y de manera que h tiene un común con cualquiera de las ramas de C los puntos libres de $B^*(C)$ únicamente (es decir, el par de contacto con cualquiera de las ramas es precisamen

te (q, c)), entonces el valor $\underline{v}(h) = \gamma^0$ es un elemento de S que proporciona una información equivalente a la de (q, c) (ver 1.2.4). Explícitamente, γ^0 tiene por coordenadas $\gamma_i^0 = \text{pr}_i(\gamma^0) = N_q^i \bar{\beta}_q^i + c e_q^i$ si $c \leq l_q^i$ ó $\gamma_i^0 = \text{pr}_i(\gamma^0) = \bar{\beta}_{q+1}^i$ si $c = l_q^i + 1$; y en el semigrupo de valores se caracteriza por la condición (1.2.6).

$$\gamma^0 = \text{máx} \{ \gamma \in S / S \subset L \cup \{ \gamma' \in S / \gamma' \geq \gamma \} \}$$

siendo L la recta que une el origen de coordenadas con el punto multiplicidad (n_0^1, \dots, n_0^d) y " \geq " la relación de orden producto en \mathbb{Z}_+^d (es decir $\gamma' \geq \gamma \iff \text{pr}_i(\gamma') \geq \text{pr}_i(\gamma), \forall i = 1, \dots, d$). De forma similar en el semigrupo saturado tenemos

$$\tilde{\gamma}^0 = \text{máx} \{ \gamma \in \tilde{S} / \tilde{S} \subset L \cup \{ \gamma' \in \tilde{S} / \gamma' \geq \gamma \} \}$$

cuyas coordenadas son $\text{pr}_i(\tilde{\gamma}^0) = \beta_q^i + c e_q^i$ si $c \leq l_q^i$ ó $\text{pr}_i(\tilde{\gamma}^0) = \beta_{q+1}^i$ si $c = l_q^i + 1$. Tanto γ^0 como $\tilde{\gamma}^0$ son datos equivalentes al par de contacto cuando uno conoce la clase de equisingularidad de las ramas (2.2.10).

En el anillo saturado $\bar{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} aparece entonces una relación de equivalencia, $R_{\tilde{\gamma}^0}$, sobre el conjunto de índices $I = \{1, 2, \dots, d\}$ de manera natural. Consideramos el anillo $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0) = \{z \in \bar{\mathcal{O}} / z \cdot \tilde{\gamma} \in \tilde{\mathcal{O}}\}$ donde $\underline{v}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}^0$, $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)$ no depende del elemento $\tilde{\gamma} \in \tilde{\mathcal{O}}$ elegido con $\underline{v}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}^0$. (Una de las ventajas de trabajar con anillos saturados es precisamente disponer de la propiedad de que $\forall \gamma \in S(\bar{\mathcal{O}})$ el conjunto $\tilde{\mathcal{O}}(\gamma)$, definido como arriba, es un anillo que no depende del elemento $y \in \tilde{\mathcal{O}}$ con $\underline{v}(y) = \gamma$ y tal que $\tilde{\mathcal{O}} \subset \tilde{\mathcal{O}}(\gamma) \subset \bar{\mathcal{O}}$ (propiedad de Anf de anillos saturados) véase 2.1 y [21]). Si m_1, \dots, m_d son los ideales maximales del anillo $\bar{\mathcal{O}}$, los ideales maximales del anillo semi-

local $\tilde{\Theta}(\tilde{\gamma}^0)$ son $m_i(\tilde{\gamma}^0) = m_i \cap \tilde{\Theta}(\tilde{\gamma}^0)$, $i = 1, 2, \dots, d$ y diremos que $iR_{\tilde{\gamma}^0}j$ si y sólo si $m_i(\tilde{\gamma}^0) = m_j(\tilde{\gamma}^0)$. Si denotamos por I_1, \dots, I_r las clases de equivalencia para $R_{\tilde{\gamma}^0}$, necesariamente es $r > 1$ y

$$\tilde{\Theta}(\tilde{\gamma}^0) = \bigoplus_1^r \tilde{\Theta}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_n}} \text{ donde } \tilde{\Theta}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_n}} = \tilde{\Theta}(\tilde{\gamma}^0)_{m_i(\tilde{\gamma}^0)} \text{ para } i \in I_n. \text{ La}$$

relación de equivalencia $R_{\tilde{\gamma}^0}$ se expresa de una forma muy simple en el semigrupo saturado:

$$iR_{\tilde{\gamma}^0}j \iff (\forall \delta \in S, \delta \geq \tilde{\gamma}^0 \text{ se tiene } \delta_i = \tilde{\gamma}_i^0 \iff \delta_j = \tilde{\gamma}_j^0)$$

debido a que el semigrupo de valores de $\tilde{\Theta}(\tilde{\gamma}^0)$ es precisamente

$$\tilde{S}_0(\tilde{\gamma}^0) = \{ \delta \in \mathbb{Z}_+^d / \delta + \tilde{\gamma}^0 \in \tilde{S} \} = \prod_1^r S(\tilde{\Theta}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_n}}).$$

La relación de equivalencia análoga $R_{\tilde{\gamma}^0}$, que resultará de hecho ser la misma que $R_{\tilde{\gamma}^0}$ (2.2.12), se introduce en términos de pares de contacto en el Capítulo I (1.2.3) y se caracteriza más adelante en términos del semigrupo de valores $S(C)$ (ver 1.3.10). La interpretación geométrica de $R_{\tilde{\gamma}^0}$ (4.1.4) nos vuelve a dar una idea de la naturalidad de su definición:

"Si $B^*(C_i.C_j)$ son los puntos libres comunes de las ramas C_i y C_j se tiene $iR_{\tilde{\gamma}^0}j \iff B^*(C_i.C_j) \supseteq B^*(C) \iff \#B^*(C_i.C_j) > \#B^*(C)$ ". Es decir los índices i, j son equivalentes si las ramas C_i y C_j tienen en común un punto libre más que los que tienen todas las ramas de la curva.

La relación $R_{\tilde{\gamma}^0} = R_{\tilde{\gamma}^0}$ nos permite iniciar el procedimiento recursivo a que hacíamos alusión más arriba. De esta forma, por ejemplo, construimos en los capítulos I y II dos árboles, que denominaremos árbol de contactos principales (A.C.P.) y árbol de expo-

nentes característicos (A.E.C.) respectivamente, cuyos "esqueletos" son isomorfos y cuyos pesos son equivalentes. (Cualquiera de los dos árboles equivale al tipo de equisingularidad de la curva).

Para cada entero n con $0 \leq n < q$ existe una curva de género n con contacto maximal de dicho género con cada una de las componentes de C , sus valores $P_1 = (\bar{\beta}_1^{-1}, \dots, \bar{\beta}_1^{-d}), \dots, P_q = (\bar{\beta}_q^{-1}, \dots, \bar{\beta}_q^{-d})$ son todos ellos elementos del semigrupo de valores que están situados sobre la recta L (ver 1.2.3). A los elementos del semigrupo de valores $P_0 = (\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_0^{-d}), P_1, \dots, P_q, \gamma^0$ les damos el nombre de contactos principales de la curva C . El Teorema 1.2.10 nos permite calcular las multiplicidades de intersección entre dos ramas C_i y C_j tales que $i \neq j$ en función de los contactos principales, pues $(C_i, C_j) = \min\{e_{q_j}^i \gamma_j^0, e_{q_i}^j \gamma_i^0\}$ y $e_{q_i}^i = \text{m.c.d.}(\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_q^{-1})$. Este resultado nos permite razonar inductivamente calculando los contactos principales de las curvas cuyas componentes forman las clases de equivalencia de R_{γ^0} . Toda esta información se distribuye en un árbol, que llamaremos árbol de contactos principales, en la forma siguiente (1.3):

- En el tronco colocamos los pesos $P_0 < P_1 < \dots < P_q$.
- Del primer nudo salen tantas ramas como clases de equivalencia hay para R_{γ^0} y en él colocamos el peso γ^0 .
- En cada una de las ramas colocamos los contactos principales de las curvas $C_{I_i} = \bigcup_{j \in I_i} C_j$ que no aparecen explícitamente en el tronco: $P_{q+1}^{I_i}, \dots, P_{q_i}^{I_i}$.
- El proceso continúa inductivamente hasta que hayamos "sepa

rado" todas las ramas y para cada una de ellas hayamos agotado los valores del contacto maximal.

El A.C.P. es un dato equivalente al tipo de equisingularidad de la curva como indica claramente su construcción. En 1.3 se describe también su cálculo explícito a partir del semigrupo de valores S , sin embargo obtener S a partir del árbol (o equivalentemente a partir del tipo de equisingularidad) es un problema mucho más complicado al que dedicaremos todo el capítulo III.

Cuando utilizamos el anillo saturado $\tilde{\mathcal{O}}$ y el semigrupo saturado $\tilde{S} = S(\tilde{\mathcal{O}})$, un proceso análogo al anterior nos proporciona el que llamaremos árbol de exponentes característicos (A.E.C). En este caso se toma $\tilde{P}_n = (\beta_n^1, \dots, \beta_n^d)$ en vez de P_n , $\tilde{\gamma}^0$ en vez de γ^0 y se continúa el proceso como en el caso del A.C.P. usando ahora la relación $R_{\tilde{\gamma}^0}$. Nótese que puesto que $R_{\tilde{\gamma}^0} = R_{\gamma^0}$ el "esqueleto" de ambos árboles es el mismo.

Como se pone de manifiesto en 2.3 el cálculo del A.E.C a partir de \tilde{S} es esencialmente el mismo que el cálculo del A.C.P. a partir de S . Sin embargo en este caso el teorema de estructura de anillos saturados que probamos en 2.1 (2.1.13), y que mejora el probado en [21], pone de manifiesto la facilidad del manejo tanto del anillo saturado como de su semigrupo de valores (de hecho, este teorema leído en el semigrupo de valores nos proporciona un teorema de estructura de semigrupos saturados:

$\tilde{S} = [L \cap \tilde{S}] \cup (\tilde{\gamma}^0 + \tilde{S}_1 \times \dots \times \tilde{S}_r)$ donde $[L \cap \tilde{S}] = \{\gamma \in \tilde{S} / \gamma < \tilde{\gamma}^0\}$ y $\tilde{S}_1 \times \dots \times \tilde{S}_r = S(\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0))$. El A.E.C. resulta así ser la forma de leer el semigrupo \tilde{S} (según el teorema de estructura) y recíprocamen

te, como se ve en 2.3.6.

La comparación entre el A.C.P. y el A.E.C. resume la filosofía de nuestro trabajo hasta el momento. En efecto, el "esqueleto" ó soporte es el mismo en ambos árboles y además se tienen las relaciones (2.3.7):

$$P_0 = \tilde{P}_0$$

$$(**) \quad P_{n+1} = N_n P_n + \tilde{P}_{n+1} - \tilde{P}_n \quad \forall n < q$$

$$\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 + \sum_1^q (N_n - 1) P_n$$

donde $N_n = e_{n-1}^i / e_n^i \quad \forall i = 1, \dots, d$ y $e_n = (e_n^1, \dots, e_n^d) =$

$= \text{m.c.d}(P_0, \dots, P_n) = \text{m.c.d}(\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_n)$. Estas fórmulas generalizan las análogas (*), referidas anteriormente, para el caso de una sola rama.

El objetivo del capítulo III es proporcionar un cálculo explícito del semigrupo de valores S de una curva C en función de un cierto conjunto (minimal) de invariantes del tipo de equisingularidad similar al del caso de una sola rama en función de los valores del contacto maximal. El procedimiento a seguir es inductivo sobre el número d de ramas de la curva C , puesto que el caso $d = 1$ es suficientemente conocido, supondremos conocidos los semigrupos de curvas que tienen $d' < d$ componentes de las componentes de C y buscaremos criterios que nos permitan decidir cuándo un elemento $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ está en S .

Así, se introduce en 3.1 la noción de elemento maximal de S : "Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in S$, diremos que α es maximal si para cada $i \in I = \{1, 2, \dots, d\}$ el conjunto $\Delta_i(\alpha) = \{\beta \in S / \beta_i = \alpha_i; \beta_k > \alpha_k \quad \forall k \neq i\}$ es vacío. Como casos extremos de elementos maximales se

tienen, por un lado los que llamaremos maximales absolutos y por otro los maximales relativos que responden respectivamente a las siguientes definiciones:

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in S$ es maximal absoluto si $\forall J \subset I, J \neq I$ es $\Delta_J(\alpha) = \{ \beta \in S / \beta_i = \alpha_i \ \forall i \in J, \beta_k > \alpha_k \ \forall k \notin J \} = \emptyset$ y α es maximal relativo si α es maximal y para cada $J \subset I$ con $\#J \geq 2$ se tiene que $\Delta_J(\alpha) \neq \emptyset$.

Los maximales relativos, que son un número finito debido a la existencia de conductor en S (es decir el mínimo elemento $\delta \in S$ tal que $\delta + \mathbb{Z}_+^d \subset S$), nos proporcionan el siguiente teorema de generación (válido en general para semigrupos de curvas no necesariamente planas):

Teorema 3.1.7.— Sea $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ el conjunto de maximales relativos de S . Sea $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ tal que $\text{pr}_J(\beta) \in S_J = \text{pr}_J(S)$ para todo $J \subset I$ con $\#J = d-1$. Entonces

$$\beta \in S \iff \beta \notin \bar{\Delta}(\alpha^i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

donde $\bar{\Delta}(\alpha^i) = \bigcup_{i=1}^d \{ \gamma \in \mathbb{Z}_+^d / \gamma_i = \text{pr}_i(\alpha^i), \gamma_k > \alpha_k^i \ \forall k \neq i \}$.

El problema queda reducido entonces al cálculo de los maximales relativos, sin embargo la estructura de los maximales del semigrupo resulta bastante rica y su análisis nos permitirá continuar nuestro proceso de cálculo. Con precisión, denotaremos por ξ^J el elemento de $S_J = \text{pr}_J(S)$, para $J \subset I$, definido por: si $i \in J$, $\text{pr}_i(\xi^J) = \sum_{j \notin J} (C_i, C_j)$ donde (C_i, C_j) denota la multiplicidad de intersección de C_i y C_j ; en particular pondremos $\xi^i = \sum_{j \neq i} (C_i, C_j)$.

Los semigrupos $S_i = \text{pr}_i(S)$ son precisamente los semigrupos de valores de las ramas C_i de C y denotaremos por c_i el conductor del semigrupo S_i . Nuestro Teorema de Simetría 3.2.13 describe la estructura del conjunto de maximales y dice esencialmente lo siguiente:

A) Se tiene $Q = (c_1 + \xi^1 - 1, c_2 + \xi^2 - 1, \dots, c_d + \xi^d - 1) \in S$ y Q es maximal relativo de S (de hecho el mayor de todos los maximales de S para el orden producto).

B) $Q + \underline{1} = (c_1 + \xi^1, \dots, c_d + \xi^d)$ es el conductor de S .

C) Si $\alpha \in S$ entonces α es maximal si y sólo si $Q - \alpha \in S$.

Además si $\alpha, \beta \in S$ con $\alpha + \beta = Q$ se tiene que

α es maximal relativo $\iff \beta$ es maximal absoluto

El procedimiento para demostrar el teorema nos ha resultado bastante complejo y ha sido preciso, debido a la inducción, probar de hecho un teorema en el que aparecen un tipo más general de puntos, a los que llamamos nudos de Apery (aquí la palabra Apery se debe a que en su definición se usan las ideas de Apery para el manejo de los semigrupos de \mathbb{Z}_+ -ver [7]-).

Dado $\alpha \in S_j$, llamaremos fibra en S de α al conjunto $F_S(\alpha) = \{\beta \in S \mid \text{pr}_j(\beta) = \alpha\}$ y diremos que α tiene fibra de tipo finito si existe $\gamma \in \mathbb{Z}_+^d$ con $\text{pr}_j(\gamma) = \alpha$ de manera que $\Delta_j(\gamma) = \emptyset$ (y lo denotaremos por $F_S(\alpha) < \infty$); en caso contrario diremos que $F_S(\alpha)$ es de tipo infinito ($F_S(\alpha) = \infty$) (ver 3.3.6, 3.2.7). Obsérvese que los maximales de S tienen fibra finita sobre cada una de sus coordenadas. El teorema 3.2.8 prueba que $F_S(\alpha) < \infty$ si y sólo si $\alpha - \xi^j \notin S_j$ y justifica la introducción de las bases de Apery de un

semigrupo: "Si $\gamma \in S$ llamaremos base de Apery de S con respecto a γ al conjunto $A_\gamma(S) = \{ \beta \in S / \beta - \gamma \notin S \}$ ". Aún más, si $\alpha \in S$ es un maximal se tiene que para cada $J \subset I$ el conjunto

$\Delta(\text{pr}_J(\alpha)) = \bigcup_{i \in J} \Delta_i(\text{pr}_J(\alpha)) \subset S_J$ está contenido en la base de Apery de S_J con respecto a ξ^J (3.2.10 y 3.2.11). Este hecho justifica la

definición de nudo de Apery con respecto a $\gamma \in S$: " $\alpha \in S$ es un nudo de S con respecto a γ si $\Delta(\alpha) = \bigcup_1^d \Delta_i(\alpha) \subset A_\gamma(S)$ ".

El hecho esencial, comentado antes, de que todas las proyecciones de un maximal son nudos de Apery en los semigrupos proyección proporcionan la base para probar inductivamente el teorema de simetría 3.2.13, prueba que nos obliga por otra parte a incluir dos nuevos apartados en él que son de fundamental importancia en la misma:

D) $Q + \gamma$ es un vértice relativo de $A_\gamma(S)$ y el mayor de los nudos de $A_\gamma(S)$.

E) Si $v \in S$, entonces v es un nudo de Apery respecto a $\gamma \in S$ si y sólo si $Q + \gamma - v \in S$.

(Un vértice, α , es un nudo de Apery respecto a $\gamma \in S$ que verifica además $\alpha - \gamma \in S$, esto implica que $\alpha - \gamma$ es maximal y de ahí el calificativo relativo aplicado a un vértice. Nótese que también los maximales son nudos con respecto a γ , $\forall \gamma \in S$).

Nuestro problema de calcular el semigrupo S queda reducido, merced al Teorema de Simetría, al cálculo de los maximales absolutos del semigrupo; pues conocer estos equivale a conocer los relativos de S . La clave para calcular los maximales absolutos nos la proporciona la noción de valores del contacto maximal utilizados

ya por M. Lejeune en [51] y que, como en el caso de una sola rama, juegan el papel de generadores minimales del semigrupo S .

Denotaremos por g_i el género de la rama C_i y para un entero $n \geq 0$ consideramos $\mathcal{C}^n = \{i \in I / g_i \geq n\}$ y el conjunto T^n definido por $A \in T^n$ si $A \subset \mathcal{C}^n$ y existe una curva D de género n de manera que D tiene contacto maximal de dicho género con las ramas C_i para $i \in A$. Podemos suponer T^n ordenado por inclusión y consideramos $M^n = \{E \in T^n / E \text{ es maximal}\}$. Para cada uno de los elementos $E \in M^n$ tenemos una curva de ecuación $h_E \in k[[X, Y]]$ con contacto maximal de género n con las ramas C_i para $i \in E$; los valores $\{\underline{v}(h_E) / E \in M^n\}$ no dependen de la curva h_E elegida en las condiciones anteriores (3.3.4) y los denominaremos los valores del contacto maximal de género n , $V^n(C)$, de C . Notemos que no son elementos de S , sino de su cierre topológico $\bar{S} \subset \bar{\mathbb{Z}}_+^d$, siendo $\bar{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ con la topología que tiene a ∞ como punto de acumulación de $1, 2, \dots, n, \dots$ y como puntos aislados los de \mathbb{Z}_+ . En efecto para $n = g_i$ aparece la curva C_i como una de las h_E (ya que es la única con contacto maximal de género g_i consigo misma) y es $v_i(C_i) = \infty$. Los valores del contacto maximal, $V(C)$, son por tanto por una parte $V_\infty(C) = \{\underline{v}(f_1), \dots, \underline{v}(f_d)\}$ y por otra, los que llamaremos valores del contacto maximal finitos

$$\bar{V}(C) = \left(\bigcup_{-1}^m V^n(C) \right) \cap S \text{ donde } m = \sup\{g_i / i = 1, \dots, d\} \text{ y}$$

$$V^{-1}(C) = \{(\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_0^{-d})\} \text{ si todas las ramas de } C \text{ tienen la misma tan-}$$

gente ($V^{-1}(C) = \emptyset$ en caso contrario).

El conjunto de valores del contacto maximal, $V(C)$, es un dato equivalente al tipo de equisingularidad de la curva C , además su cálculo en función del A.C.P. es bastante simple pues P_0, \dots, P_d

son los valores del contacto maximal de géneros $-1, 0, \dots, q-1$ y el resto se calculan utilizando la inducción del A.C.P. y el elemento γ^0 (3.3.11, 12, 13). Lo mismo sucede con el cálculo inverso, mostrando así la proximidad entre los conceptos de A.C.P. y $V(C)$.

La siguiente etapa consiste en caracterizar los elementos de $\bar{V}(C)$ dentro de S . Si α es un elemento de S , diremos que α es irreducible si dados $\alpha^1, \alpha^2 \in S$ tales que $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2$ entonces $\alpha^1 = 0$ ó $\alpha^2 = 0$. Además si α es maximal absoluto y $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2$ entonces α^1 y α^2 son también maximales absolutos y por tanto los maximales absolutos descomponen como suma de maximales absolutos irreducibles. El Teorema 3.4.3 da la caracterización buscada: " α es un maximal absoluto irreducible si y sólo si α es uno de los valores finitos del contacto maximal". La demostración de este hecho ocupa gran parte del epígrafe 3.4 y la técnica utilizada en ella son de nuevo los desarrollos de Hamburger-Noether.

Como consecuencia de todo lo anterior se obtiene el Teorema 3.4.15 que da una forma de calcular explícitamente el semigrupo S a partir del tipo de equisingularidad de una forma puramente aritmética:

"Sea $\{\beta^1, \dots, \beta^m\}$ el conjunto de valores del contacto maximal finitos y $F = \{ \sum \lambda_i \beta^i / \lambda_i \in \mathbb{N}; \sum \lambda_i \beta^i < Q \}$, $F^S = \{ Q - \gamma / \gamma \in F \}$. Sea $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ tal que $\text{pr}_J(\beta) \in S_J$ para $J \subset I$ con $\#J = d-1$, entonces

$$\beta \in S \iff \beta \notin \bar{\Delta}(\alpha), \quad \forall \alpha \in F^S "$$

Haremos notar que los valores del contacto maximal de S_J se obtiene de una manera muy cómoda a partir de los valores del contacto maximal de S (3.3.16), por tanto estos valores se conocen explí-

citamente a priori y así, para decidir si $\beta \in S$, sería suficiente un número finito de comprobaciones del tipo $\beta \notin \bar{\Delta}(\alpha)$.

Pasamos finalmente a comentar el contenido de la última parte de la memoria. Volviendo a las notaciones del principio, si $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_N: S_N \rightarrow S_0$ es la resolución de la singularidad de C , consideramos el divisor excepcional $E = \pi^{-1}(O_0)$. E es unión de curvas racionales no singulares y los puntos de corte entre ellas son siempre de cruzamientos normales. El grafo dual, $G(C)$, de la curva C lo analizaremos de la siguiente manera:

- Por cada componente, E_i , de E colocamos un punto con peso $p(E_i)$, donde $p(E_i)$ es el número de explosiones consecutivas que conduce a la componente E_i (es decir si E_i es el divisor que resulta de explotar el punto $O_{k-1} \in S_{k-1}$ entonces $p(E_i) = k$).

- Dos puntos se unen por un segmento si y sólo si sus divisores correspondientes se cortan.

- Por cada una de las componentes irreducibles de $C^{(N)}$ colocamos una flecha en el único punto (divisor) al que corta.

En la noción habitual de grafo dual se asignan como pesos las autointersecciones, sin embargo para nuestro propósito, que es describir el "esqueleto" de dicho grafo y el comportamiento que las curvas de contacto maximal van teniendo por explosiones, nos hemos limitado a describir combinatoriamente dichos grafos poniendo a cada componente el peso que según su definición representa su "edad".

El par de contacto y la relación de equivalencia R_0 son estudiados en esta parte de la memoria en su contexto natural en términos de puntos infinitamente próximos (por razones técnicas en

la primera parte estudiamos estos conceptos de una forma analítica). La descripción explícita del grafo dual $G(C)$ se hace de nuevo por inducción sobre el número de ramas de C , utilizando esencialmente el proceso de inducción descrito para el A.C.P. ó el A.E.C. El análisis previo del caso irreducible nos proporciona los bien conocidos resultados sobre la distribución y caracterización de los "extremos libres" del grafo (puntos unidos únicamente a otro punto) y los puntos "estrellados" (es decir, puntos unidos al menos a tres puntos más).

Utilizando el hecho de que el grafo de una curva se puede obtener mediante una operación de adjunción (4.2.5) entre el grafo de nivel n , $G(n-)$ (definido por $\pi(n)^{-1}(O_0)$, $\pi(n): S_n \rightarrow S_0$, $n \leq N$ en la misma forma que $G(C)$) y el grafo determinado por $C^{(n)} \subset S_n$ añadiéndole los divisores a los que corta $C^{(n)}$ (suponemos que en el n -ésimo entorno infinitesimal hay un solo punto infinitamente próximo) (ver 4.2.6); se prueba en 4.2.13 que $G(C)$ se puede obtener "pegando" $G(n-)$ (que depende de una cualquiera de las ramas y del número n , elegido de manera que O_n es el último punto infinitamente próximo común a todas las ramas) y grafos $G_1(+), \dots, G_r(+)$ ($r > 1$) que esencialmente se forman a partir de los grafos de las transformadas estrictas C_{I_i} para las clases de equivalencia I_i de R_{Y_0}

$$(C_{I_i} = \bigcup_{j \in I_i} C_j) \text{ (ver también 4.2.14, 15, 16, 17).}$$

Para el caso en que C tenga dos componentes irreducibles se analizan con detalle los grafos para las posibles C en función de los tipos de equisingularidad de las ramas, viendo la equivalencia con las posibilidades para la multiplicidad de intersección y con

el par de contacto (4.2.24).

Como último resultado de la Memoria, se interpretan geométricamente los valores del contacto maximal en el contexto del grafo dual. Si D es una curva irreducible que proporciona uno de los valores del contacto maximal de C , la transformada estricta de D , $D^{(N)}$, aparece en S_N como una curva lisa y transversal a un divisor (en un punto regular del divisor $E = \pi^{-1}(O_0)$), el cual aparece en $G(C)$ como un "extremo libre" (es decir un punto del que parte un único segmento en $G(C)$) (4.2.28). También se tiene la recíproca y este resultado, además de dar un sentido geométrico a los valores del contacto maximal, generaliza de nuevo lo que ocurre en el caso irreducible (4.2.11) y proporciona una definición de los mismos en el lenguaje clásico de las explosiones. En 4.2.28 se obtiene también una caracterización similar para γ^0 (recordemos que en el A.C.P. γ^0 juega un papel similar al del resto de los valores que son, esencialmente, valores del contacto maximal).

Finalmente, decir que a lo largo de la Memoria hemos ido desarrollando una serie de ejemplos con intención de ayudar al lector en la visualización del comportamiento de los invariantes que manejamos, describiendo para ellos el A.C.P. (en 1.3.12), el A.E.C. (en 2.3.8), los contactos maximales (en 3.3.20), el cálculo del semigrupo de valores (en 3.4.15) y el cálculo del grafo dual (en 4.2.30).

CAPITULO I: ARBOL DE CONTACTOS PRINCIPALES DE UNA
SINGULARIDAD DE CURVA REDUCIDA



CAPITULO I

ARBOL DE CONTACTOS PRINCIPALES DE UNA SINGULARIDAD

DE CURVA REDUCIDA

1.0 NOTACIONES Y PRELIMINARES

1.0.1.— En esta memoria k denotará un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria y C una curva algebroide reducida sobre k . Denotaremos por \mathcal{O} el anillo local de la curva C en su punto cerrado, \mathcal{O} es entonces una k -álgebra local, reducida, de tipo finito, completa y de dimensión uno. Si p_1, \dots, p_d son los ideales primos minimales de \mathcal{O} , el anillo $\mathcal{O}_i := \mathcal{O}/p_i$ $i = 1, 2, \dots, d$ es el anillo local de la curva algebroide obtenida al dotar a la componente irreducible i -ésima C_i de C de la estructura reducida de subesquema cerrado. Cada anillo \mathcal{O}_i es un dominio de integridad completo y su cierre íntegro en su cuerpo de cocientes $\bar{\mathcal{O}}_i$ es un anillo de valoración discreta. Denotaremos la valoración asociada a $\bar{\mathcal{O}}_i$ mediante v_i ; es bien conocido que si $t_i \in \bar{\mathcal{O}}_i$ es un uniformizante para v_i tendremos $\bar{\mathcal{O}}_i \cong k[[t_i]]$ y $v_i(x) = \text{ord}_{t_i}(x)$ para cada x de $\bar{\mathcal{O}}_i$.

El homomorfismo inyectivo de anillos

$$f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \dots \times \mathcal{O}_d$$

definido por $f(x) = (x_1, \dots, x_d) := (x + p_1, \dots, x + p_d)$ permite definir la aplicación $\underline{v} : D(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{Z}_+^d$ como

$$\underline{v}(x) = (v_1(x_1), \dots, v_d(x_d)) \in \mathbb{Z}_+^d$$

siendo $D(\mathcal{O})$ el conjunto de no divisores de cero del anillo \mathcal{O} y $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z}/n \geq 0\}$.

Al subsemigrupo aditivo de \mathbb{Z}_+^d , $\text{Im} \underline{v} = \underline{v}(D(\mathcal{O}))$, lo denotaremos por $S(\mathcal{O})$, $S(C)$ ó S si no da lugar a confusión y le llamaremos semigrupo de valores de la curva C .

Supondremos, salvo que se especifique lo contrario, que la curva C es además plana. En este caso existe $f(X, Y) \in k[[X, Y]]$ de manera que $\mathcal{O} = k[[X, Y]]/(f)$ y series irreducibles $f_1, f_2, \dots, f_d \in k[[X, Y]]$ tales que $p_i = f_i \mathcal{O}$ $1 \leq i \leq d$ y $f = f_1 f_2 \dots f_d$ es la descomposición de f en factores irreducibles en el anillo $k[[X, Y]]$. Nótese que, puesto que C es reducida, es $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$.

En estas condiciones se tiene ([76]):

Teorema: Sean C y C' dos curvas algebroides planas reducidas con d y d' ramas respectivamente. C y C' son equisingulares en el sentido de Zariski si y sólo si $d = d'$ y para una reordenación de las ramas se tiene $S(C) = S(C')$.

1.0.2.- Denotaremos, en toda la memoria, por I el conjunto de índices $\{1, 2, \dots, d\}$ correspondientes a las ramas de la curva

C. Si $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, denotaremos por $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ su componente i -ésima y denotaremos por " \leq " el orden producto en \mathbb{Z}_+^d , es decir

$$\text{Si } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d \quad \alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i \quad \forall i \in I$$

1.0.3.- Sea $r \in I$, el anillo local de la componente irreducible C_r es entonces $\mathcal{O}_r = k[[x(r), y(r)]]$, donde $x(r) = X + (f_r)$ y $y(r) = Y + (f_r)$. Supondremos siempre que $x(r)$ es un parámetro transversal para \mathcal{O}_r ($\forall r$) (véase [18] 1.4) y denotamos por (D_r) el desarrollo de Hamburger-Noether de \mathcal{O}_r con respecto a la base de su ideal maximal $\{x(r), y(r)\}$ ([18] 2). Utilizaremos siempre que sea posible las notaciones de A. Campillo en "Algebroid Curves in Positive characteristic" ([18]). Podemos escribir entonces ([18] 2.2.4)

$$(D_r) \left\{ z_{j-1} = \sum_{i=0}^{h_j^r} a_{ji}^r z_j^i + z_j^{h_j^r} z_{j+1} \mid 0 \leq j \leq d_r, z_0 = x(r), z_{-1} = y(r) \right\}$$

Si $\{s_1 < s_2 < \dots < s_{g_r}\} = \{j > 0 \mid \exists i \text{ con } a_{ji}^r \neq 0\}$ necesariamente g_r es el género de la curva C_r ([18] 3.2) y podemos escribir la fila s_n como

$$\begin{aligned} z_{s_n-1} &= a_{s_n}^r k_n^r z_{s_n}^{k_n^r} + \dots + a_{s_n}^r h_{s_n}^r z_{s_n}^{h_{s_n}^r} + z_{s_n}^{h_{s_n}^r} z_{s_n+1} \\ &= z_{s_n}^{k_n^r} (a_{s_n}^r k_n^r + \dots + a_{s_n}^r h_{s_n}^r z_{s_n}^{l_n^r} + z_{s_n}^{l_n^r} z_{s_n+1}) \end{aligned}$$

donde $a_{s_n}^r k_n^r \neq 0$ y $l_n^r = h_{s_n}^r - k_n^r$. Estas filas reciben, junto con la fila 0-ésima, el nombre de filas libres (tomaremos $h_0 = 1_0$). El resto de las filas reciben el nombre de filas satélites del desarrollo (D_r) .

Denotaremos con el superíndice r los datos de la clase de

equisingularidad, o del desarrollo de Hamburger-Noether, de la rama r-ésima. De esta manera tendremos que $n_j^r = v_r(z_j)$, $0 \leq j \leq s_{g_r}$, $e_j^r = n_{s_j}^r, \bar{\beta}_c^r, \dots, \bar{\beta}_{g_r}^r$ (resp. $\beta_0^r, \dots, \beta_{g_r}^r$) son los valores del contacto maximal para C_r (resp. los exponentes característicos), etc. No obstante, cuando no haya lugar a confusión omitiremos el superíndice para simplificar las notaciones.

En lo que sigue utilizaremos resultados de [18] indicando la referencia pero omitiendo las demostraciones.

1.1 PAR DE CONTACTO DE DOS RAMAS

Supondremos en este epígrafe $d = 2$.

1.1.1 Definición.— Llamaremos índice de separación del tipo de equisingularidad de f_1 y f_2 al entero $0 \leq \rho \leq \min\{g_1, g_2\}$

$$\rho := \max\{n / h_j^1 = h_j^2 \quad \forall j < s_n, k_i^1 = k_i^2 \quad \forall i \leq n\}$$

Nótese que ρ depende sólo de los tipos de singularidad de f_1 y f_2 más precisamente

1.1.2 Lema.— $\rho = \max\{n / \beta_0^{-1} \beta_i^{-2} = \beta_i^{-1} \beta_0^{-2} \quad \forall i \leq n\}$

Demostración:

Para cada índice $i \leq \rho$ tendremos las igualdades ([1]g 3.3.3)

$$\begin{array}{l|l} n_{s_{i-1}}^1 = h_{s_{i-1}+1} n_{s_{i-1}+1}^1 + n_{s_{i-1}+2}^1 & n_{s_{i-1}}^2 = h_{s_{i-1}+1} n_{s_{i-1}+1}^2 + n_{s_{i-1}+2}^2 \\ \dots & \dots \\ n_{s_{i-2}}^1 = h_{s_{i-1}} n_{s_{i-1}}^1 + n_{s_i}^1 & n_{s_{i-2}}^2 = h_{s_{i-1}} n_{s_{i-1}}^2 + n_{s_i}^2 \\ n_{s_{i-1}}^1 = k_i n_{s_i}^1 & n_{s_{i-1}}^2 = k_i n_{s_i}^2 \end{array}$$

donde $n_j^1 = v_1(z_j)$, $n_j^2 = v_2(z_j)$, $h_j = h_j^1 = h_j^2$, $k_i = k_i^1 = k_i^2$ para $s_{i-1} + 1 \leq j \leq s_i - 1$.

Se tiene entonces $k_i = n_{s_{i-1}}^1 (n_{s_i}^1)^{-1} = n_{s_{i-1}}^2 (n_{s_i}^2)^{-1}$, y utilizando las igualdades anteriores y puesto que los coeficientes h_j

son iguales en los dos casos tenemos la cadena de implicaciones

$$\begin{aligned} n_{s_{i-1}}^1 (n_{s_i}^1)^{-1} = n_{s_{i-1}}^2 (n_{s_i}^2)^{-1} &\Rightarrow n_{s_{i-2}}^1 (n_{s_{i-1}}^1)^{-1} = n_{s_{i-2}}^2 (n_{s_{i-1}}^2)^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow n_{s_{i-1}}^1 (n_{s_{i-1}+1}^1)^{-1} &= n_{s_{i-1}}^2 (n_{s_{i-1}+1}^2)^{-1} \quad \forall i \leq \rho. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$n_{j-1}^1 (n_j^1)^{-1} = n_{j-1}^2 (n_j^2)^{-1} \quad \forall j \leq s_\rho$$

o lo que es equivalente

$$(*) \quad n_j^2 n_0^1 = n_j^1 n_0^2 \quad \forall j \leq s_\rho$$

Si tomamos $n < \rho$ y la expresión ([18] 4.2.7) para $\bar{\beta}_{n+1}$ tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_0^{-2} \bar{\beta}_{n+1}^{-1} &= n_0^2 \bar{\beta}_{n+1}^{-1} = n_0^2 \left((n_{s_n}^1)^{-1} \sum_{j=0}^n h_j^1 (n_j^1)^2 + n_{s_{n+1}}^1 \right) = \\ &= (n_0^2 n_{s_n}^1)^{-1} \sum_{j=0}^n h_j^1 (n_0^2 n_j^1)^2 + n_0^2 n_{s_{n+1}}^1 = (*) = \\ &= (n_0^1 n_{s_n}^2)^{-1} \sum_{j=0}^n h_j^1 (n_0^1 n_j^2)^2 + n_0^1 n_{s_{n+1}}^2 = \\ &= n_0^1 \left((n_{s_n}^2)^{-1} \sum_{j=0}^n h_j^2 (n_j^2)^2 + n_{s_{n+1}}^2 \right) = \bar{\beta}_0^{-1} \bar{\beta}_{n+1}^{-2} \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\bar{\beta}_{\rho+1}^{-1} \bar{\beta}_0^{-2} \neq \bar{\beta}_{\rho+1}^{-2} \bar{\beta}_0^{-1}$. Utilizaremos para ello la expresión [18], 4.3.5.

$$\bar{\beta}_{\rho+1}^{-1} = N_\rho^1 \bar{\beta}_\rho^{-1} + m_\rho^1$$

donde $N_\rho^1 = e_{\rho-1}^1 (e_\rho^1)^{-1}$, $m_\rho^1 = \beta_{\rho+1}^1 - \beta_\rho^1 = \frac{1}{\rho} n_{s_\rho}^1 + n_{s_{\rho+1}}^1$

La igualdad (*) anterior nos permite afirmar que $N_\rho^1 = N_\rho^2$

y por tanto

$$\frac{-1}{\beta_{\rho+1}} \frac{-2}{\beta_0} = N_{\rho}^1 \frac{-1}{\beta_{\rho}} \frac{-2}{\beta_0} + m_{\rho}^1 \frac{-2}{\beta_0} = N_{\rho}^2 \frac{-2}{\beta_{\rho}} \frac{-1}{\beta_0} + m_{\rho}^1 \frac{-2}{\beta_0}$$

Basta probar entonces que $m_{\rho}^1 \frac{-2}{\beta_0} \neq m_{\rho}^2 \frac{-1}{\beta_0}$. Ahora bien, puesto que

$$e_{\rho}^1 (e_{\rho}^2)^{-1} = \frac{-1}{\beta_0} (\frac{-2}{\beta_0})^{-1} \quad \text{se tiene la equivalencia:}$$

$$m_{\rho}^1 \frac{-2}{\beta_0} \neq m_{\rho}^2 \frac{-1}{\beta_0} \iff m_{\rho}^1 e_{\rho}^2 \neq m_{\rho}^2 e_{\rho}^1$$

Si suponemos que $m_{\rho}^1/e_{\rho}^1 = m_{\rho}^2/e_{\rho}^2$, entonces los desarrollos como fracción continua de ambas fracciones coinciden y puesto que ([18] 3.3.9).

$$m_{\rho}^1 = (h_{s_{\rho}}^1 - k_{\rho}^1) n_{s_{\rho}}^1 + n_{s_{\rho}+1}^1$$

$$n_{s_{\rho}}^1 = h_{s_{\rho}+1}^1 n_{s_{\rho}+1}^1 + n_{s_{\rho}+2}^1$$

.....

$$n_{s_{\rho}+1}^1 = k_{\rho+1}^1 n_{s_{\rho}+1}^1$$

se tiene necesariamente $h_j^1 = h_j^2 \quad s_{\rho} \leq j \leq s_{\rho+1}-1, \quad k_{\rho+1}^1 = k_{\rho+1}^2$

que es absurdo por la definición de ρ y se tiene por lo tanto el Lema.

1.1.3 Nota.- Como consecuencias de la demostración anterior tenemos

a) $\rho = \max\{n / \beta_i^1 \beta_0^2 = \beta_i^2 \beta_0^1 \quad \forall i \leq n\}$

b) $e_i^1 e_0^2 = e_i^2 e_0^1 \quad \text{y} \quad N_i^1 = N_i^2 \quad \forall i \leq \rho$

c) Si además $h_{s_{\rho}}^1 = h_{s_{\rho}}^2$ necesariamente

$$n_{s_{\rho}}^1 n_{s_{\rho}+1}^2 \neq n_{s_{\rho}}^2 n_{s_{\rho}+1}^1$$

1.1.4 Definición.- Llamaremos par de contacto de f_1 y f_2 y lo denotaremos por $(f_1 | f_2)$ a la pareja de números naturales (q, c) verificando las condiciones siguientes:

$$(1) \quad k_q^1 = k_q^2 = k_q; \quad h_j^1 = h_j^2, \quad a_{ji}^1 = a_{ji}^2 \quad \forall j < s_q \quad 1 \leq i \leq h_j$$

$$\text{y } a_{s_q, k_q+i}^1 = a_{s_q, k_q+i}^2 \quad 0 \leq i < c$$

(2) (q, c) es el mayor par de números naturales, para el orden lexicográfico en \mathbb{Z}_+^2 , verificando la condición (1).

1.1.5 Nota

a) $(f_1 | f_2)$ denota el número de fila libre y el lugar en esta hasta el que coinciden los desarrollos de Hamburger-Noether de f_1 y f_2 . Es decir, si $(f_1 | f_2) = (q, c)$

$$y = a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots + a_{0h}x^h + x^h z_1$$

$$x = z_1^{h_1} z_2$$

.....

.....

$$z_{s_q-1} = a_{s_q, k_q} z_q^{k_q} + \dots + a_{s_q, k_q+c-1} z_q^{k_q+c-1}$$

es la parte común de los desarrollos de H-N D_1 y D_2 . (Nótese que x, y, z_i no son los mismos para las dos ramas pues ni siquiera están en el mismo anillo (v. [18] 2.), pero los denotamos de la misma forma porque el papel que juegan en los desarrollos posteriores es, hasta cierto punto, irrelevante).

b) Es claro que $q \leq \rho$. Además si se tiene $c = l_q^1 + 1$ ó $c = l_q^2 + 1$ necesariamente es $q = \rho$ pues si $q < \rho$, entonces $h_j^1 = h_j^2$ $s_{q+1} \leq j \leq s_{q+1}-1$; $k_{q+1}^1 = k_{q+1}^2$ y por lo tanto $(f_1 | f_2) \geq (q+1, 0)$

Esto nos permite asegurar que para el par de contacto, en relación con el índice de separación del tipo de equisingularidad, se tienen las desigualdades

- (i) $0 \leq q \leq \rho$
- (ii) Si $q < \rho$, entonces $0 \leq c \leq l_q$ y $a_{s_q, k_q+c}^1 \neq a_{s_q, k_q+c}^2$
- (iii) Si $q = \rho$, entonces $0 \leq c \leq \min \{l_q^1+1, l_q^2+1\}$

1.1.6 Lema.- Sean (m, n) y (m', n') dos pares de números naturales y consideramos el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de cada uno de ellos:

$$\begin{array}{ll} m = c_0 n + r_1 & m' = c'_0 n' + r'_1 \\ n = c_1 r_1 + r_2 & n' = c'_1 r'_1 + r'_2 \\ \dots & \dots \\ r_{t-1} = c_t r_t & r'_{s-1} = c'_s r'_s \end{array}$$

Sea $k = \min \{j / c_j \neq c_j\}$; $d_k = \min \{c_k, c'_k\}$ y

$$S = \sum_0^{k-1} c_i r_i r'_i + d_k r_k r'_k + p; \quad p = \begin{cases} r_{k+1} r'_k & \text{si } d_k = c_k \\ r'_{k+1} r_k & \text{si } d_k = c'_k \end{cases}$$

Se verifica entonces:

- a) $S = \min \{n'm, nm'\}$
- b) $n'm = m'n \iff t = s$ y $c_j = c'_j \quad \forall j \leq s$

Demostración:

b) Puesto que los coeficientes c_0, c_1, \dots, c_t (resp. c'_0, c'_1, \dots, c'_s) son los que aparecen en el desarrollo como fracción continua de m/n (resp. m'/n') de la misma forma que en la demostración de 1.1.2 se tiene este apartado.

a) Supongamos $m \cdot n' \geq m' \cdot n$ y procedamos por inducción sobre k ,
Si $k = 0$ tenemos

$$S = d_0 r_0 r'_0 + p$$

Puesto que estamos suponiendo $mn' \geq m'n$ necesariamente es $c_0 \geq c'_0$ y por lo tanto $d_0 = c'_0, p = r'_1 r_0$. Se tiene entonces

$$S = c'_0 r_0 r'_0 + r'_1 r_0 = r_0 (c'_0 r'_0 + r'_1) = r_0 m' = nm'$$

Supongamos $k > 0$, entonces $c_0 = c'_0$ y puesto que $mn' \geq m'n$ entonces $c_0 + r_1/n \geq c'_0 + r'_1/n'$ y por lo tanto $r_1 n' \geq r'_1 n$. Consideramos entonces los pares de números (n, r_1) y (n', r'_1) y podemos aplicar la hipótesis de inducción, es decir:

$$\begin{aligned} S &= \sum_0^{k-1} c_i r_i r'_i + d_k r_k r'_k + p = c_0 r_0 r'_0 + \left(\sum_1^{k-1} c_i r_i r'_i + d_k r_k r'_k + p \right) = \\ &= c_0 r_0 r'_0 + \min\{r_1 n', r'_1 n\} = c_0 r_0 r'_0 + r'_1 n = n(c_0 r'_0 + r'_1) = n \cdot m' \end{aligned}$$

1.1.7 Proposición. - Sea (q, c) el par de contacto de las ramas f_1 y f_2 y denotamos por (f_1, f_2) la multiplicidad de intersección de ellas. Se tiene:

i) Si $c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}$ entonces

$$(f_1, f_2) = e_{q-1}^1 \bar{\beta}_q^2 + c e_q^1 e_q^2 = e_{q-1}^2 \bar{\beta}_q^1 + c e_q^1 e_q^2$$

ii) Si $c = l_{\rho}^i + 1$ para $i=1$ ó 2 entonces

$$(f_1, f_2) = \min \{ e_{\rho, \rho+1}^{1-2}, e_{\rho, \rho+1}^{2-1} \}$$

Donde ρ es el índice de separación del tipo de equisingularidad de f_1 y f_2 y suponemos $\bar{\beta}_{g_i+1}^i = \infty$.

Demostración:

i) En función de los desarrollos de H-N podemos escribir la multiplicidad de intersección de f_1 y f_2 como ([18] 2.3.3)

$$(f_1, f_2) = \sum_0^{s_q-1} h_j n_j^1 n_j^2 + (k_q + c) n_{s_q}^1 n_{s_q}^2$$

Si consideramos $A = \sum_{s_{q-1}+1}^{s_q-1} h_j n_j^1 n_j^2 + k_q n_{s_q}^1 n_{s_q}^2$, aplicando

el Lema anterior a los pares $(n_{s_{q-1}}^1, n_{s_{q-1}+1}^1)$ y $(n_{s_{q-1}}^2, n_{s_{q-1}+1}^2)$

y teniendo en cuenta las expresiones para ellas que aparecen en la prueba del Lema 1.1.2 (v. [18] 3.3.3) obtenemos

$$A = n_{s_{q-1}}^1 n_{s_{q-1}+1}^1 = n_{s_{q-1}}^2 n_{s_{q-1}+1}^2$$

y entonces

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= \sum_0^{s_{q-1}} h_j n_j^1 n_j^2 + n_{s_{q-1}}^1 n_{s_{q-1}+1}^2 + c n_{s_q}^1 n_{s_q}^2 \\ &= n_{s_{q-1}}^1 \left(\sum_0^{s_{q-1}} h_j n_j^2 n_j^1 (n_{s_{q-1}}^1)^{-1} + n_{s_{q-1}+1}^2 \right) + c e_{q,q}^1 e_{q,q}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e_{q-1}^{-1} \left(\sum_0^{s_{q-1}} h_j n_j^2 n_j^2 (n_{s_{q-1}}^2)^{-1} + n_{s_{q-1}+1}^2 \right) + c e_q^{-1} e_q^2 \\
 &= e_{q-1}^{-1} \bar{\beta}_q^{-2} + c e_q^{-1} e_q^2
 \end{aligned}$$

La igualdad $e_{q-1}^{-1} \bar{\beta}_q^{-2} + c e_q^{-1} e_q^2 = e_{q-1}^{-2} \bar{\beta}_q^{-1} + c e_q^{-1} e_q^2$ es inmediata de 1.1.2 y 1.1.3. También se puede obtener utilizando para A la otra expresión.

ii) Consideramos las parejas de números naturales $(m_\rho^1, n_{s_\rho}^1)$ y $(m_\rho^2, n_{s_\rho}^2)$, el algoritmo de Euclides para ellas es, $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 m_\rho^i &= l_\rho^i n_{s_\rho}^i + n_{s_\rho+1}^i \\
 n_{s_\rho}^i &= h_{s_\rho+1}^i n_{s_\rho+1}^i + n_{s_\rho+2}^i \\
 &\dots \\
 n_{s_\rho+1}^i &= k_{\rho+1}^i n_{s_\rho+1}^i
 \end{aligned}$$

utilizando el Lema anterior y las fórmulas 2.3.3 de [18] obtenemos, para la multiplicidad de intersección

$$(f_1, f_2) = \sum_0^{s_\rho-1} h_j n_j^1 n_j^2 + k_\rho n_{s_\rho}^1 n_{s_\rho}^2 + \min\{m_\rho^1 n_{s_\rho}^2, m_\rho^2 n_{s_\rho}^1\}$$

Puesto que $\bar{\beta}_{\rho+1}^{-1} = N_\rho^{-1} \bar{\beta}_\rho^{-1} + m_\rho^1$ y $\bar{\beta}_{\rho+1}^{-2} = N_\rho^{-2} \bar{\beta}_\rho^{-2} + m_\rho^2$

se tiene que $\bar{\beta}_{\rho+1}^{-1} e_\rho^2 \{ > < \} \bar{\beta}_{\rho+1}^{-2} e_\rho^1 \iff m_\rho^1 e_\rho^2 \{ > < \} m_\rho^2 e_\rho^1$

Supongamos por ejemplo $m_\rho^1 n_{s_\rho}^2 < m_\rho^2 n_{s_\rho}^1$, entonces se tiene

$$(f_1, f_2) = \sum_0^{s_\rho-1} h_j n_j^1 n_j^2 + k_\rho n_{s_\rho}^1 n_{s_\rho}^2 + m_\rho^1 n_{s_\rho}^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_0^{s_p-1} h_j n_j^1 n_j^2 + k_p n_{s_p}^1 n_{s_p}^2 + l_p n_{s_p}^1 n_{s_p}^2 + n_{s_p+1}^1 n_{s_p}^2 \\
 &= n_{s_p}^2 \left(\sum_0^{s_p} h_j n_j^1 n_j^2 (n_{s_p}^2)^{-1} + n_{s_p+1}^1 \right) \\
 &= e_p^2 \left(\sum_0^{s_p} h_j n_j^1 n_j^2 (n_{s_p}^1)^{-1} + n_{s_p+1}^1 \right) \\
 &= e_p^{2-1} = \min \{ e_p^{2-1}, e_p^{1-2} \}
 \end{aligned}$$

Si se tiene $m_p^1 n_{s_p}^2 > m_p^2 n_{s_p}^1$ por el mismo procedimiento obtendremos

$$(f_1, f_2) = e_p^{1-2} < e_p^{2-1}$$

1.1.8 Nota.- Supongamos conocidos los tipos de equisingularidad correspondientes a dos curvas irreducibles f_1 y f_2 distintas, podemos tomar $\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_{g_1}^1$ (resp. $\bar{\beta}_0^2, \dots, \bar{\beta}_{g_2}^2$) los valores del contacto maximal de f_1 (resp. de f_2).

a) Sea ρ el índice de separación del tipo de equisingularidad de f_1 y f_2 . Para cada par de enteros (q, c) con $0 \leq q \leq \rho$ y $0 \leq c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}$ consideramos el número entero

$$\xi(q, c) = e_{q-1}^1 \bar{\beta}_q^2 + c e_q^1 e_q^2 = e_{q-1}^2 \bar{\beta}_q^1 + c e_q^1 e_q^2$$

Es inmediato que $\xi(q, c) \neq \xi(q', c')$ si $(q, c) \neq (q', c')$ y también se tiene

$$\xi(q, c) < \xi(q', c') \iff (q, c) < (q', c')$$

(considerando el orden lexicográfico en \mathbb{Z}_+^2). Además todos los enteros $\xi(q, c)$ están acotados por el entero $\xi(\rho) = \min\{e_{\rho}^{1,2}, e_{\rho}^{2-1}\}$

es decir

$$\forall (q,c) \quad \xi(q,c) < \min\{e_{\rho}^{1-2}, e_{\rho}^{2-1}\} = \xi(\rho)$$

La proposición anterior, junto con 1.1.5 nos dice que las posibles multiplicidades de intersección entre las ramas f_1 y f_2 son los elementos del conjunto

$$A = \{\xi(q,c) / 0 \leq q \leq \rho, 0 \leq c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}\} \cup \{\xi(\rho)\}$$

b) Supongamos conocida además la multiplicidad de intersección (f_1, f_2) de las ramas f_1 y f_2 ; los comentarios del apartado anterior nos permiten asegurar que, o bien $(f_1, f_2) = \xi(\rho)$ o bien existe un par único $(q,c) \in \mathbb{Z}_+^2$ con las condiciones $0 \leq q \leq \rho$, $0 \leq c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}$ de manera que $(f_1, f_2) = \xi(q,c)$

En cualquier caso podemos determinar el par de contacto de f_1 y f_2 que resulta ser en el primer caso $(\rho, \min\{l_{\rho}^1+1, l_{\rho}^2+1\})$ y en el segundo (q,c) .

Se tiene entonces:

1.1.9 Teorema.— Conocidas las clases de equisingularidad de f_1 y f_2 son datos equivalentes la multiplicidad de intersección (f_1, f_2) y el par de contacto $(f_1 | f_2)$.

1.2. CONTACTOS PRINCIPALES DE UNA CURVA ALGEBROIDE

Utilizaremos las notaciones introducidas en el epígrafecero del presente capítulo, en particular $f = f_1 f_2 \dots f_d \in k[[X, Y]]$ es la ecuación de una curva algebroide con d ramas de ecuaciones f_1, \dots, f_d .

Denotaremos por $\rho(i, j)$ el índice de separación del tipo de equisingularidad de las ramas f_i y f_j con $i \neq j$.

1.2.1 Definición. - Llamaremos índice de separación del tipo de equisingularidad de las ramas f_1, \dots, f_d al entero

$$\rho = \min \{ \rho(i, j) / 1 \leq i < j \leq d \}$$

Llamaremos par de contacto de f ó de f_1, \dots, f_d , y lo denotaremos por $(f_1 | f_2 | \dots | f_d)$ al par de números naturales

$$(f_1 | f_2 | \dots | f_d) := \min \{ (f_i | f_j) / 1 \leq i < j \leq d \}$$

(Como en 1.1.4 tomamos el orden lexicográfico en \mathbb{Z}_+^2).

1.2.2 Notas. - a) Se verifica

$$\rho = \max \{ n / \bar{\beta}_j^i \bar{\beta}_0^k = \bar{\beta}_j^k \bar{\beta}_0^i \quad \forall i, k \in I, \quad \forall j \leq n \}$$

$$\rho = \max \{ n / \beta_j^i \beta_0^k = \beta_j^k \beta_0^i \quad \forall i, k \in I, \quad \forall j \leq n \}$$

$$e_j^i e_0^k = e_j^k e_0^i, \quad N_j^i = N_j^k \quad \forall i, k \in I, \quad \forall j \leq \rho$$

(Recordemos que $I = \{1, 2, \dots, d\}$).

b) Como en el caso de dos ramas el par de contacto de f , $(f_1 | \dots | f_d)$ lo denotaremos habitualmente por el par de números

(q,c). De manera análoga a 1.1.5 el par de contacto (q,c) señala la parte común en los desarrollos de Hamburger-Noether $(D_1), (D_2), \dots, (D_d)$ de f_1, \dots, f_d en el sentido allí expresado.

1.2.3 Proposición.- Sea (q,c) el par de contacto de la curva f. Se tiene entonces:

i) Para cada entero natural $0 \leq n < q$ existe una curva irreducible C_n con contacto maximal de género n simultáneamente con todas las ramas f_1, f_2, \dots, f_d .

ii) Sus valores $\underline{v}(C_0), \underline{v}(C_1), \dots, \underline{v}(C_{q-1}) \in S$ están todos ellos sobre la recta que une el origen de coordenadas con el punto multiplicidad $(\bar{\beta}_0^{-1}, \bar{\beta}_0^{-2}, \dots, \bar{\beta}_0^{-d})$.

iii) q es el mayor entero que verifica las condiciones i) e ii)

Demostración:

i) Consideramos $C_n, n < q$, una curva irreducible de género n dada por un "truncamiento" del desarrollo de Hamburger-Noether de cualquiera de las ramas en la fila libre n-ésima (v. [18] 2.2.13)

$$y = a_{01}x + \dots + a_{0h}x^h + x^h z_1$$

$$x = z_1^{h_1} z_2$$

.....

$$z_{s_n-1} = a_{s_n k_n} z_{s_n}^{k_n} + \dots + a_{s_n h_{s_n}} z_{s_n}^{h_{s_n}} + \dots$$

Por la definición de par de contacto, es claro que D_{C_n} no depende de la rama elegida y por 4.2.9 de [18] C_n tiene contacto

maximal de género n con f_1, f_2, \dots, f_d simultáneamente.

Si $h_n \in k[[X, Y]]$ es la ecuación de C_n , representamos por $\underline{v}(C_n)$ el elemento del semigrupo de valores $S = S(\mathcal{O}) \quad \underline{v}(h_n)$. Se tiene

$$\underline{v}(C_n) = (\bar{\beta}_{n+1}^{-1}, \bar{\beta}_{n+1}^{-2}, \dots, \bar{\beta}_{n+1}^{-d})$$

ii) Puesto que $q \leq \rho$, se tiene para $i, j \in I$

$$\bar{\beta}_n^{-i} \bar{\beta}_0^{-j} = \bar{\beta}_0^{-i} \bar{\beta}_n^{-j} \quad \forall n \leq q$$

Por tanto $(\bar{\beta}_n^{-1}, \dots, \bar{\beta}_n^{-d}) = \bar{\beta}_n^{-i} (\bar{\beta}_0^{-i})^{-1} (\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_0^{-d})$ para cualquier $i \in I$ y $\forall n \leq q$ tenemos demostrado ii).

iii) Supongamos que existe C_q con $\underline{v}(C_q) = (\bar{\beta}_{q+1}^{-1}, \dots, \bar{\beta}_{q+1}^{-d})$.

Existen necesariamente dos índices $i, j \in I$ de manera que $(q, c) = (f_i | f_j)$. Si se tiene $c \leq \min\{l_q^i, l_q^j\}$ entonces es (1.1.5).

$$a_{s_q, k_q+c}^i \neq a_{s_q, k_q+c}^j$$

y por 4.2.9 [18] no existe una curva irreducible de género q con contacto maximal con f_i y f_j simultáneamente. Debe ser, entonces, $c = \min\{l_q^i+1, l_q^j+1\}$ y utilizando de nuevo 1.1.5 y 1.1.2 se tiene

$$q = \rho(i, j) = \rho \quad \text{y} \quad \bar{\beta}_{q+1}^{-i} \bar{\beta}_0^{-j} \neq \bar{\beta}_0^{-i} \bar{\beta}_{q+1}^{-j}$$

Así pues, si existe $(\bar{\beta}_{q+1}^{-1}, \dots, \bar{\beta}_{q+1}^{-d}) \in S$, no está en la recta considerada y finalizamos la prueba.

1.2.4 Nota.— Sea (q, c) el par de contacto de f_1, \dots, f_d y $h \in k[[X, Y]]$ una curva irreducible de género q verificando $(h | f_i) = (q, c) \quad \forall i \in I$. Es claro que podemos construir una curva con estas condiciones tomando la parte común de los desarrollos de H-N

D_1, \dots, D_d y completando la última fila de manera genérica. Más concretamente

$$(D_h) \left\{ \begin{array}{l} y = a_{01}x + \dots + a_{0h}x^h + x^h z_1 \\ x = z_1^{h_1} \dots z_2^{h_2} \\ \dots \\ \dots \\ z_{s_q-1}^{k_q} = a_{s_q, k_q} z_{s_q}^{k_q} + \dots + a_{s_q, k_q+c-1} z_{s_q}^{k_q+c-1} + b z_{s_q}^{k_q+c} \end{array} \right.$$

dónde $b \neq a_{s_q, k_q+c}^i$ para aquellos superíndices $i \in I$ para los que la expresión anterior tenga sentido.

El valor $\underline{v}(h) \in S$ no depende del elemento $b \in k$ elegido con las anteriores restricciones y será denotado en adelante por γ^0

$$\gamma^0 = \underline{v}(h) = (v_1(h), v_2(h), \dots, v_d(h))$$

Usaremos las notaciones usuales para los conjuntos de invariantes habituales asociados a la clase de equisingularidad de h , pero sin escribir ningún superíndice sobre ellas. Nótese que se tiene

$$\bar{\beta}_n = \bar{\beta}_n^i / e_q^i \quad \forall n \leq q \quad \forall i \in I$$

$$n_j = n_j^i / e_q^i \quad \forall j \leq s_q \quad \forall i \in I$$

Observemos también que, por el Teorema 1.1.7 se tiene:

$$\begin{aligned} - \text{ Si } c \leq l_q^i \text{ entonces } v_i(h) &= e_{q-1}^i \bar{\beta}_q^i + c e_q^i = \\ &= e_{q-1}^i \bar{\beta}_q^i + c e_q^i = \\ &= N_q^i \bar{\beta}_q^i + c e_q^i \end{aligned}$$

Si $c = 1_{q+1}^i$ entonces $v_i(h) = \bar{B}_{q+1}^i$.

1.2.5 Nota y notaciones. - a) Denotaremos por L la recta que une el origen de coordenadas con el punto multiplicidad $(\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_0^{-d})$ y para un elemento $\gamma \in S$ por $S(\gamma)$ el conjunto

$$S(\gamma) = \{ \alpha \in S / \alpha \geq \gamma \}$$

Llamaremos conductor de S a un elemento $\delta \in S$ verificando $\{ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d / \alpha \geq \delta \} \subset S$ y de manera que δ es el mínimo con esta propiedad. En nuestras hipótesis (1.0) S tiene conductor debido a la existencia de ideal conductor no nulo en la extensión de anillos $\sigma \subset k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$.

b) Podemos considerar el subconjunto de S

$$A = \{ \gamma \in S / S \subset L \cup S(\gamma) \}.$$

Debido a la existencia de conductor en S , A es un conjunto finito. Por otra parte si $\gamma^1, \gamma^2 \in A$ y suponemos $\gamma^1 \not\geq \gamma^2$, $\gamma^2 \not\geq \gamma^1$ se tiene

$$\gamma^1 \in L \cup S(\gamma^2) \Rightarrow \gamma^1 \in L$$

$$\gamma^2 \in L \cup S(\gamma^1) \Rightarrow \gamma^2 \in L$$

y necesariamente $\gamma^1 \geq \gamma^2$ ó $\gamma^2 \geq \gamma^1$. Por lo tanto A es también un conjunto totalmente ordenado

c) Sea $\gamma \in S$, diremos que γ es irreducible en S si $\forall \gamma^1, \gamma^2 \in S$ tales que $\gamma = \gamma^1 + \gamma^2$ entonces $\gamma^1 = 0$ ó $\gamma^2 = 0$. Es claro que cualquier elemento γ de S se puede escribir como suma de elementos irreducibles de S .

1.2.6 Proposición.- 1) Sea $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in S$ y $\gamma^0 = (\gamma_1^0, \dots, \gamma_d^0)$. Si existe $i \in I$ con la condición $\gamma_i < \gamma_i^0$ entonces $\gamma \in L$.

2) $\gamma^0 = \text{máx. A.}$

Demostración:

1) Podemos suponer γ irreducible, pues en otro caso existen $\gamma^1, \dots, \gamma^r$ irreducibles con $\gamma = \sum_1^r \gamma^k$ y también se tiene $\gamma_i^k < \gamma_i^0$; luego basta ver que $\gamma^k \in L, \forall k$, pues entonces $\gamma \in L$.

Sea $\gamma = \underline{v}(h^* + (f))$ con $h^* \in k[[X, Y]]$. La serie h^* es irreducible por serlo γ y define entonces una curva irreducible.

Consideramos su desarrollo de H-N:

$$(D_{h^*}) = \{ z_{j-1} = \sum_{k^*}^{h^*} a_{ji}^* z_j^i + z_j^{h^*} z_{j+1} \mid 0 \leq j \leq s_{g^*} \}$$

y denotamos $n_j^* = \text{ord}_{z_{s_{g^*}}} (z_j)$

Supongamos, para simplificar, $i = 1$; es decir $\gamma_1 < \gamma_1^0$ y veamos en primer lugar que $(h^*|f_1) < (q, c)$ donde (q, c) es el par de contacto de f .

Si $c \leq \frac{1}{q}$ y suponemos $(h^*|f_1) \geq (q, c)$ tendremos

$$\gamma_1 = v_1(h^*) = \sum_0^{s_q-1} h_j n_j^1 n_j^* + (k_q + c) n_{s_q}^1 n_{s_q}^* + R$$

con $R \geq 0$. Puesto que $n_j^* n_0^1 = n_0^* n_j^1 \quad \forall j \leq s_q$ y $n_j = n_j^1 (n_{s_q}^1)^{-1}$

entonces

$$n_j^* = n_0^* n_j^1 (n_0^1)^{-1} = n_{s_q}^* n_j^1 (n_{s_q}^1)^{-1} = n_j n_{s_q}^*$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} v_1(h^*) &= n_{s_q}^* \left(\sum_{j=0}^{s_q-1} h_j n_j^1 n_j + (k_q + c) n_{s_q}^1 n_{s_q} \right) + R \\ &= n_{s_q}^* v_1(h) + R \geq v_1(h) = \gamma_1^0 \end{aligned}$$

lo que es absurdo.

Si $c = l_q^1 + 1$. Tenemos en este caso $\gamma_1^0 = \bar{\beta}_{q+1}^{-1}$. Supongamos $(h^* | f_1) \geq (q, c)$. Si h^* tiene género q , entonces $v_1(h^*) = \bar{\beta}_{q+1}^{-1}$ que es absurdo pues $\gamma_1 < \gamma_1^0$, por lo tanto el género de h^* es necesariamente mayor que q .

Por 1.1.8 tendremos $v_1(h^*) \geq \min\{e_q^{*\bar{\beta}_{q+1}^{-1}}, e_q^{1\bar{\beta}_{q+1}^*}\}$. Es claro que $e_q^{*\bar{\beta}_{q+1}^{-1}} > \bar{\beta}_{q+1}^{-1} = v_1(h)$, veamos que también se tiene $e_q^{1\bar{\beta}_{q+1}^*} > \bar{\beta}_{q+1}^{-1}$.

Podemos suponer $h_{s_q}^* = h_{s_q}^1$ pues si es $h_{s_q}^* > h_{s_q}^1$ entonces $v_1(h^*) = e_q^{*\bar{\beta}_{q+1}^{-1}} < e_q^{1\bar{\beta}_{q+1}^*}$. Utilizando 4.2.7 [18] se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{q+1}^* &= (n_{s_q}^*)^{-1} \sum_0^q h_j^*(n_j^*)^2 + n_{s_q+1}^* \\ &= (n_{s_q}^*)^{-1} \sum_0^q h_j^*(n_j^1)^2 [n_{s_q}^* (n_{s_q}^1)^{-1}]^2 + n_{s_q+1}^* \\ &= (n_{s_q}^*) (n_{s_q}^1)^{-1} ((n_{s_q}^1)^{-1} \sum_0^q h_j^1 (n_j^1)^2) + n_{s_q+1}^* \end{aligned}$$

y entonces

$$e_{q\beta_{q+1}}^{1-*} = n_{s_q}^* ((n_{s_q}^1)^{-1}) \sum h_j^1 (n_j^1)^2 + n_{s_q}^1 n_{s_{q+1}}^* >$$

$$> (n_{s_q}^1)^{-1} \sum h_j^1 (n_j^1)^2 + n_{s_{q+1}}^1 = \bar{\beta}_{q+1}^{-1}$$

Obtenemos entonces como conclusión

$$v_1(h^*) \geq \min\{e_{q\beta_{q+1}}^{*1}, e_{q\beta_{q+1}}^{1*}\} > \bar{\beta}_{q+1}^{-1} = \gamma_1^0$$

lo cual es absurdo.

Es cierto entonces que $(h^*|f_1) < (q,c)$ y, por tanto, tendremos

$$(h^*|f_1) = \dots = (h^*|f_d) = (r,s) < (q,c).$$

Si $v_i(h^*) = e_{r-1}^* \bar{\beta}_r^{-1} + s e_r^* e_r^i$, entonces

$$v_i(h^*) = e_{r-1}^* \bar{\beta}_r^{-k} \bar{\beta}_0^{-i} (\bar{\beta}_0^k)^{-1} + s e_r^* e_r^k \bar{\beta}_0^{-i} (\bar{\beta}_0^k)^{-1}$$

$$= (\bar{\beta}_0^{-i} / \bar{\beta}_0^{-k}) (e_{r-1}^* \bar{\beta}_r^{-k} + s e_r^* e_r^k)$$

$$= (\bar{\beta}_0^{-i} / \bar{\beta}_0^{-k}) v_k(h^*) \quad \forall i, k \in I$$

Si $v_i(h) = \min\{e_r^i \bar{\beta}_{r+1}^*, e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-i}\}$ se comprueba de manera similar que

$$v_i(h^*) = (\bar{\beta}_0^{-i} / \bar{\beta}_0^{-k}) v_k(h^*) \quad \forall i, k \in I$$

y por lo tanto se tiene $\underline{v}(h^*) \in L$ c.q.d.

2) El apartado 1) nos permite asegurar que $\gamma^0 \in A$. Observemos que si $\gamma^0 \notin L$ hemos terminado pues si $\gamma^* > \gamma^0$ entonces $\gamma^* \notin A$.

Para completar la prueba de la proposición necesitamos el siguiente lema que será probado al finalizar la prueba de la proposición.

1.2.7 Lema. - $\gamma^0 \notin L$ si y sólo si existe un índice $i \in I$ tal que $c = l_q^i + 1$.

Así, cuando $\gamma^0 \in L$ se tiene $c \leq l_q^i \quad \forall i \in I$. Razonando por reducción al absurdo, si suponemos que $\gamma^0 \neq \max A$, existirá $\gamma > \gamma^0$ con $\gamma \in A$ y un índice $j \in I$ con $\gamma_j > \gamma_j^0$.

Existe un índice $i \in I$ de manera que $a_{s_q, k_q + c}^i \neq a_{s_q, k_q + c}^j$ (por 1.1.5) y por lo tanto será $(f_i | f_j) = (q, c)$. Consideramos una curva irreducible de género q , P_i , con desarrollo de H-N:

$$(D_{P_i}) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = a_{01}x + \dots + a_{0h}x^h + x^h z_1 \\ \dots \\ z_{s_q - 1} = z_{s_q}^k (a_{s_q, k}^q + \dots + a_{s_q, k_q + c - 1}^q z_{s_q}^{c-1} + a_{s_q, k_q + c}^i z_{s_q}^c) \end{array} \right.$$

y sea $\gamma^i = \underline{v}(P_i)$

$$\text{Se tiene } v_i(P_i) > v_i(h) = \gamma_i^0$$

$$v_j(P_i) = v_j(h) = \gamma_j^0$$

Puesto que $\gamma_j > \gamma_j^0 = \gamma_j^i$, entonces $\gamma^i \notin S(\gamma)$ y por tanto $\gamma^i \in L$ por ser $\gamma \in A$. Pero esto es absurdo, pues tendremos

$$\gamma^0, \gamma^i \in L, \gamma_j^0 = \gamma_j^i, \gamma_i^0 < \gamma_i^i$$

Esto finaliza la prueba de la proposición. Si $\gamma^0 \in L$ se puede demostrar de esta forma que

$$\gamma^0 = \min \{ \gamma^i / i \in I \}$$

para γ^i ($\forall i \in I$) construido como antes.

Demostración del Lema 1.2.7

Condición necesaria: Si suponemos $c \leq l_q^i \quad \forall i \in I$, entonces

$$\begin{aligned} v_i(h) &= e_{q-1} \bar{\beta}_q^{-i} + c e_q^i = e_{q-1} \bar{\beta}_q^{-k} \bar{\beta}_0^k (\bar{\beta}_0^{-k})^{-1} + c e_q^k (\bar{\beta}_0^{-k})^{-1} \\ &= (\bar{\beta}_0^{-i} / \bar{\beta}_0^k) (e_{q-1} \bar{\beta}_q^{-k} + c e_q^k) \\ &= (\bar{\beta}_0^{-i} / \bar{\beta}_0^{-k}) v_k(h) \quad \forall i, k \in I \end{aligned}$$

luego $\underline{y}(h) \in L$.

Condición suficiente: Si se tiene $c = l_q^i + 1 \quad \forall i$ entonces

$$\gamma^0 = (\bar{\beta}_{q+1}^{-1}, \dots, \bar{\beta}_{q+1}^d)$$

En este caso tendremos $q = p$ y existirán índices $i, j \in I$ con

$$\bar{\beta}_{q+1}^{-i} \bar{\beta}_0^{-j} \neq \bar{\beta}_{q+1}^{-j} \bar{\beta}_0^{-i}$$

y por lo tanto $\gamma^0 \notin L$.

Podemos suponer entonces $i, j \in I$ de manera que

$c = l_q^i + 1 \leq l_q^j$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_0^{-i} \gamma_j^0 &= \bar{\beta}_0^{-i} (e_{q-1} \bar{\beta}_q^{-j} + c e_q^j) \\ &= \bar{\beta}_0^{-j} (e_{q-1} \bar{\beta}_q^{-i} + c e_q^i) \\ &= \bar{\beta}_0^{-j} (N_q^{i-i} + l_q^i e_q^i + e_q^i) > \\ &> \bar{\beta}_0^{-j} (N_q^{i-i} + l_q^i e_q^i + n_{s_{q+1}}^i) = \\ &= \bar{\beta}_0^{-j} (N_q^{i-i} + \beta_{q+1}^i - \beta_q^i) = \\ &= \bar{\beta}_0^{-j} \bar{\beta}_{q+1}^{-i} = \bar{\beta}_0^{-j} \gamma_i^0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $\gamma^0 \notin L$ y finalizamos la prueba.

1.2.8 Definición.- Sea (q,c) el par de contacto de f_1, f_2, \dots, f_d . Denotaremos por R_{Y0} la relación de equivalencia sobre el conjunto $I = \{1, 2, \dots, d\}$ dada por

$$i R_{Y0} j \iff \begin{cases} (f_i | f_j) > (q,c) & \text{si } c \leq 1_q^i \\ (f_i | f_j) > (q+1,0) & \text{si } c = 1_q^i + 1 \end{cases}$$

donde para $i = j$ convenimos $(f_i | f_i) = (g_i, \emptyset)$ siendo g_i el género de f_i .

1.2.9 Nota.- a) R_{Y0} es efectivamente una relación de equivalencia. En efecto el hecho

$$(f_i | f_k) \geq \min\{(f_i | f_j), (f_j | f_k)\}$$

garantiza la transitividad y por otro lado es simétrica, ya que:

1º) Si $i R_{Y0} j$ y $c \leq 1_q^i$, puesto que $(f_i | f_j) > (q,c)$ es claro que $c \leq 1_q^j$ y $j R_{Y0} i$.

2º) Si $i R_{Y0} j$ y $c = 1_q^i + 1$ se tiene $(f_i | f_j) > (q+1,0)$ y es también $c = 1_q^j + 1$ y $j R_{Y0} i$.

b) Podemos denotar también R_{Y0} por $R_{(q,c)}$ pues únicamente depende del par de enteros (q,c) . Para cualquier otro par de enteros $(r,s) < (q,c)$, podemos definir $R_{(r,s)}$ como en 1.2.8, pero dicha relación tiene una única clase; sin embargo R_{Y0} tiene necesariamente más de una por la propia definición de par de contacto.

1.2.10 Teorema.- En las condiciones y con las notaciones anteriores. Sean $i, j \in I$ tales que $i R_{Y0} j$, se tiene entonces que

$$(f_i, f_j) = \min\{e_q^i \gamma_j^0, e_q^j \gamma_i^0\}$$

siendo $(q, c) = (f_1 | \dots | f_d)$ y (f_i, f_j) la multiplicidad de intersección de f_i y f_j .

Demostración:

Si $c = l_q^r + 1$ entonces $\gamma_r^0 = \bar{\beta}_{q+1}^r$, y si $c \leq l_q^r$ entonces $\gamma_r^0 = N_q^{\bar{\beta}_q^r} + c e_q^r$. Así, teniendo en cuenta que $(f_i | f_j) = (q, c)$ si $c \leq l_q^i$ (resp. $(f_i | f_j) = (q, c)$ ó $(q+1, 0)$ si $c = l_q^i + 1$), tendremos que si $c \leq \min\{l_q^i, l_q^j\}$ entonces

$$\begin{aligned} e_q^i \gamma_j^0 &= e_q^i (N_q^{\bar{\beta}_q^j} + c e_q^j) = e_q^i (N_q^{\bar{\beta}_q^j} + c e_q^j) \\ &= e_{q-1}^i \bar{\beta}_q^j + c e_q^i e_q^j = (f_i, f_j) = e_q^j \gamma_i^0 \end{aligned}$$

Por la proposición 1.1.7, podemos asegurar que si (1)

$c = l_q^i + 1$ ó (2) $c = l_q^j + 1$ se tiene

$$(f_i, f_j) = \min\{e_{q+1}^{\bar{\beta}_q^j}, e_{q+1}^{\bar{\beta}_q^i}\}$$

(Obsérvese que si $(f_i | f_j) = (q+1, 0)$ ambos números son iguales).

Si se verifican simultáneamente (1) y (2) tendremos

$$\gamma_i^0 = \bar{\beta}_{q+1}^i, \quad \gamma_j^0 = \bar{\beta}_{q+1}^j \quad \text{con lo cual}$$

$$(f_i, f_j) = \min\{e_{q+1}^{\bar{\beta}_q^j}, e_{q+1}^{\bar{\beta}_q^i}\} = \min\{e_q^i \gamma_j^0, e_q^j \gamma_i^0\}$$

Si se tiene $c = l_q^i + 1 \leq l_q^j$, por la demostración del lema

1.2.7 tendremos

$$\gamma_j^0 > (\bar{\beta}_0^j / \bar{\beta}_0^i) \gamma_i^0 = (e_q^j / e_q^i) \gamma_i^0$$

de donde

$$(f_i, f_j) = e_q^{j, \beta_{q+1}^i} = e_q^{j, \gamma_i^0} = \min\{e_q^{j, \gamma_i^0}, e_q^{i, \gamma_j^0}\}$$

El caso restante es idéntico al anterior con los índices cambiados.

1.2.11 Definición.- Llamaremos contactos principales de la curva reducida C a los elementos de su semigrupo de valores:

$$P_0, P_1, \dots, P_q, \gamma^0; \text{ donde } P_n = (\bar{\beta}_n^{-1}, \dots, \bar{\beta}_n^{-d}) \quad 0 \leq n \leq q.$$

1.3. ARBOL DE CONTACTOS PRINCIPALES DE UNA CURVA

1.3.1 Construcción del A.C.P

Partimos de una curva algebroide, plana, reducida C de ecuación $f = f_1 \dots f_d$ donde f_1, \dots, f_d son las ecuaciones de las ramas C_1, \dots, C_d de C . Podemos calcular el par de contacto $(f_1 | \dots | f_d)$ que denotaremos por (q, c) y los contactos principales para C .

$$P_n = (\bar{\beta}_n^{-1}, \bar{\beta}_n^{-2}, \dots, \bar{\beta}_n^{-d}) \in S \quad 0 \leq n \leq q$$

$$\gamma^0 = (\gamma_1^0, \dots, \gamma_d^0) \in S$$

Además P_1, \dots, P_q están todos ellos sobre la recta L que une el origen O con P_0 (1.2.3), más concretamente se tiene

$$P_n = (\bar{\beta}_n^{-i} / \bar{\beta}_0^{-i}) P_0 \quad \forall i \in I, \quad n \leq q.$$

Tomamos también R_{γ^0} y sean I_1, I_2, \dots, I_r las clases de equivalencia para R_{γ^0} , denotamos por f_{I_k} , $k = 1, 2, \dots, r$ la serie

$$f_{I_k} = \prod_{i \in I_k} f_i \in k[[X, Y]].$$

Podemos considerar para f_{I_k} los datos

análogos a los calculados antes para f , es decir, si (q_k, c_k) es el

par de contacto de f_{I_k} tenemos $\gamma_{I_k}^0, P_0^{I_k}, \dots, P_{q_k}^{I_k} \in S(f_{I_k})$

Es claro que $P_n^{I_k} = pr_{I_k}(P_n)$ $\forall n \leq q$ y $\gamma_{I_k}^0 > pr_{I_k}(\gamma^0)$,

luego nos quedaremos únicamente con los nuevos datos

$$P_{q+1}^{I_k}, \dots, P_{q_k}^{I_k}, \gamma_{I_k}^0, R_{\gamma_{I_k}^0}$$

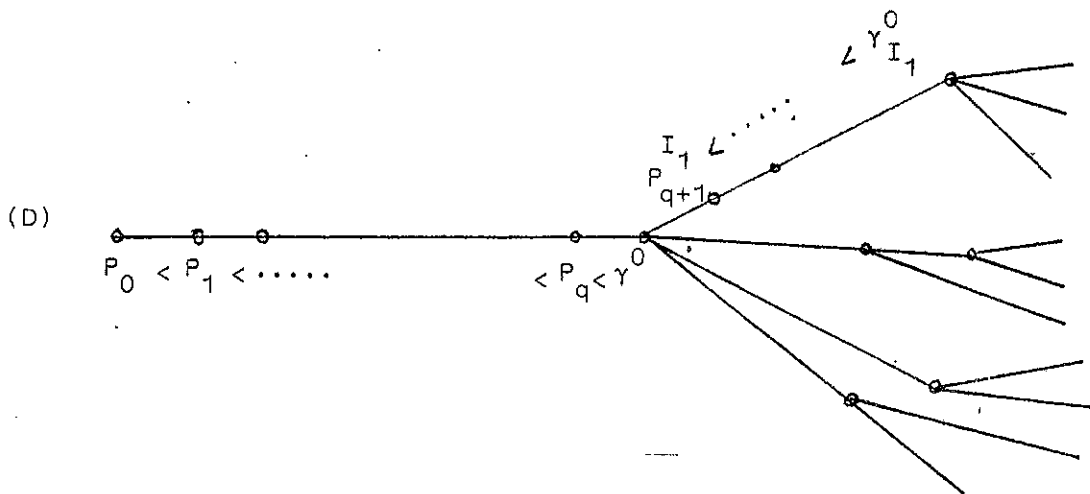
Se tiene $r > 1$ por 1.2.9, ó lo que es equivalente

$\# I_k < d \quad \forall k$, por lo tanto es claro que por este procedimiento

llegará un momento en el que hayamos "separado" todas las ramas y para cada una de ellas hayamos agotado todos los valores del contacto maximal.

Ordenamos los datos anteriores en un diagrama de árbol de la manera siguiente:

- 1) Colocamos en su tronco los pesos $P_0 < P_1 < \dots < P_q$.
- 2) Del primer nudo salen tantas ramas como clases de equivalencia hay en R_{γ^0} y en el nudo colocamos el peso γ^0 .
- 3) En cada una de las ramas seguimos el proceso inductivamente poniendo los nuevos pesos que aparecen para cada clase de equivalencia I_k , $k = 1, 2, \dots, r$.



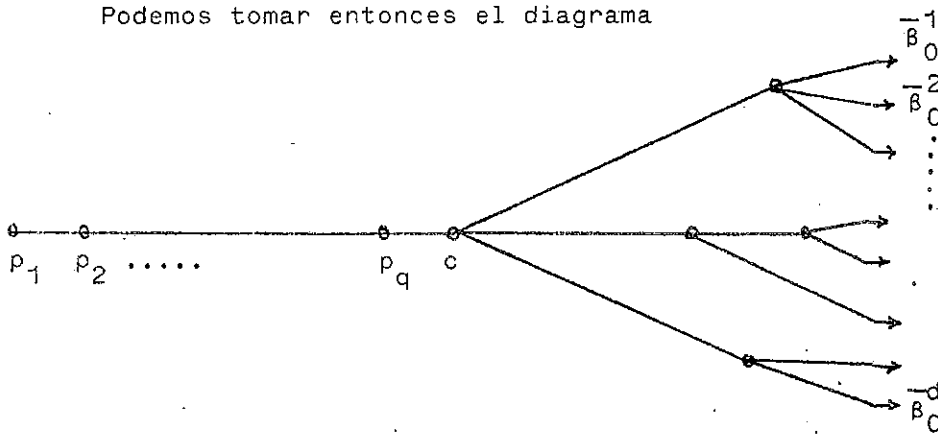
1.3.2 Nota. - Es claro que en la construcción anterior hay una sobreabundancia de datos, por ejemplo P_n queda determinado simplemente por una de sus coordenadas, o por $\bar{\beta}_n^i / \bar{\beta}_0^i$. Podemos reducir los pesos a números racionales, conservando la estructura de árbol de la forma que describimos a continuación.

Puesto que $P_n = (\bar{\beta}_n^i / \bar{\beta}_0^i) P_0 \quad \forall i \in I, \quad \forall n \leq q$ podemos considerar el número racional

$$p_n^i = \bar{\beta}_n^i / \bar{\beta}_0^i \quad \forall n \leq q$$

En lugar de γ^0 podemos colocar simplemente el segundo entero, c , que aparece en el par de contacto (q, c) . Es claro que los conjuntos de datos $\{P_0, P_1, \dots, P_q, \gamma^0\}$ y $\{P_0, p_1, \dots, p_q, c\}$ son equivalentes.

Podemos tomar entonces el diagrama



que reduce el anterior, aunque puesto que son equivalentes trabajaremos habitualmente con el primero.

1.3.3 Definición.- Llamaremos árbol de contactos principales de la curva C (A.C.P.) y lo denotaremos por $D(C)$, ó D si no da lugar a confusión, al diagrama de árbol pesado construido en 1.3.1

1.3.4 Proposición.- El A.C.P. depende únicamente de la clase de equisingularidad de la curva f .

Demostración.- Puesto que conocemos el tipo de equisingula-

ridad de cada una de las ramas, podemos calcular $\rho(i,j)$ para $i \neq j$ (1.1.2) y por tanto ρ . Por 1.1.8 y el Teorema 1.1.10, dado que conocemos la multiplicidad de intersección de 2 ramas cualesquiera (f_i, f_j) , podemos calcular $(f_i | f_j)$. Haciendo variar i, j estos datos determinan $(q, c) = (f_1 | \dots | f_d)$ y de aquí podemos determinar γ^0 y R_{γ^0} pues

$$\gamma_i^0 = N_{\beta_q}^{i-1} + c e_q^i \quad \text{si } c \leq l_q^i$$

$$\gamma_i^0 = \beta_{q+1}^{-i} \quad \text{si } c = l_q^i + 1$$

y los números $l_q^i, i \in I$, dependen sólo del tipo de equisingularidad de las ramas $f_i \quad \forall i \in I$ (3.3.9 [18]).

1.3.5 Teorema.— Sean C y C' dos curvas algebroides reducidas con d y d' ramas respectivamente. C es equisingular a C' si y sólo si $d = d'$ y para una reordenación de los índices $\{1, \dots, d\}$ $D(C) = D(C')$.

Demostración : La condición necesaria es la proposición anterior. Para probar la suficiente veamos que D determina la clase de equisingularidad de C .

Sea $i \in I$, tomando todos los pesos que aparecen desde la rama i hasta el pie podemos obtener la sucesión de contactos máximos de $f_i: \{\beta_0^{-i}, \dots, \beta_{g_1}^{-i}\}$.

Si tomamos dos índices $i, j \in I, i \neq j$ podemos tomar el nudo γ_α^0 donde ambas se separan y si A es el conjunto de pesos comunes a i, j calculamos

$$e_r^i = m.c.d \{pr_i(P) / P \in A\}$$

$$e_r^j = \text{m.c.d} \{ \text{pr}_j(P) / P \in A \}$$

Por el Teorema 1.2.10 tendremos entonces

$$(f_i, f_j) = \min \{ e_r^i \text{pr}_j(\gamma_\alpha^0), e_r^j \text{pr}_i(\gamma_\alpha^0) \}$$

y esto finaliza la prueba del Teorema.

1.3.6 Nota.- El teorema anterior más el enunciado en 1.0.1 nos dicen que en efecto el A.C.P., el tipo de equisingularidad y el semigrupo de valores son datos equivalentes. Como final de este epígrafe veremos como se puede calcular el árbol (D) explícitamente a partir del semigrupo del valores. Más adelante también podremos decir algo del cálculo inverso, es decir cómo calcular S conocido D.

1.3.7 Nota.- Puesto que $P_0 = \min(S - \{0\})$ podemos considerar la recta L en \mathbb{R}^d que une el origen de coordenadas con P_0 .

Como vimos en 1.2.5 el conjunto

$$A = \{ \gamma \in S / S \subset L \cup S(\gamma) \}$$

es finito y totalmente ordenado, además (1.2.6) se tiene $\gamma^0 = \max A$. Denotamos por $[L \cap S]$ el conjunto: $[L \cap S] = \{ \gamma^* \in L \cap S / \gamma^* < \gamma^0 \}$ y se tiene de manera inmediata:

$$P_n = \min \{ \gamma \in [L \cap S] / \gamma \notin \mathbb{Z}_+^d P_0 + \dots + \mathbb{Z}_+^d P_{n-1} \} \quad \forall n > 0$$

Nos resta entonces determinar R_{γ^0} . Observemos que podemos calcular también

$$e_n^i = \text{m.c.d.}(\bar{\beta}_0^i, \dots, \bar{\beta}_n^i), \quad e_n = (e_n^1, \dots, e_n^d) \in L \cap \mathbb{Z}_+^d, \quad \forall n \leq q$$

$$e_*^i = \text{m.c.d.}(e_q^i, \gamma_i^0), \quad e_* = (e_*^1, \dots, e_*^d) \in \mathbb{Z}_+^d$$

$$N_*^i = e_q^i / e_*^i$$

1.3.8 Lema

$$a) N_*^i = 1 \Leftrightarrow c \leq l_q^i \Leftrightarrow \gamma_i^0 \in \mathbb{Z}_+^{\beta_0^i} + \dots + \mathbb{Z}_+^{\beta_q^i}$$

$$b) N_*^i > 1 \Leftrightarrow c = l_q^i + 1 \Leftrightarrow \gamma_i^0 = \beta_{q+1}^i$$

La demostración es trivial.

1.3.9 Nota

a) Lo anterior nos permite calcular el par de contacto (q, c) en cualquier caso, pues si $\exists i \in I$ con $N_*^i > 1$ entonces $c = l_q^i + 1$, nótese que l_q^i también se puede calcular, pues $\gamma_i^0 = \beta_{q+1}^i$ entonces $m_q^i = \beta_{q+1}^i - N_q^i \beta_q^i$ y por lo tanto

$$l_q^i = \left(\begin{array}{c} m_q^i \\ e_q^i \end{array} \right)$$

En caso contrario tendremos $N_*^i = 1 \quad \forall i \in I$ con lo que $\gamma^0 \in L$ (1.2.7) y γ^0 se escribe como $\gamma^0 = N_q P_q + c e_q$ para un único $c \geq 0$ que es el dato que nos faltaba.

b) Teniendo en cuenta que $S(f_j) = pr_j(S)$ para todo $J \subset I$ con $f_J = \prod_{i \in J} f_i$ y pr_J la proyección sobre los índices J , el apartado anterior nos permite calcular $(f_i | f_j) \quad \forall i, j \in I$ en $S(f_i f_j)$ y conocer por tanto R_{γ^0} .

Proyectando sobre cada clase de equivalencia podemos continuar el proceso inductivamente.

c) Dados $i, j \in I$ denotamos por $\gamma_{i,j}^0$ el correspondiente γ^0 del semigrupo $pr_{\{i,j\}}(S) = S(f_i f_j)$.

1.3.10 Proposición.- Dados $i, j \in I$, entonces

$$i R_{Y_0} j \iff N_*^i = N_*^j \quad \text{y} \quad \gamma_{ij}^0 > N_*^i(\gamma_i^0, \gamma_j^0)$$

Demostración:

C. suficiente: Supongamos $i R_{Y_0} j$, si $(f_i | f_j) = (q, c)$ se tiene claramente $\gamma_{ij}^0 = (\gamma_i^0, \gamma_j^0)$ lo que es absurdo, por lo tanto debe ser $c = 1_{q+1}^i$ y $(f_i | f_j) = (q+1, 0)$.

Se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^0 &= (N_{q+1}^i \bar{\beta}_{q+1}^{-i}, N_{q+1}^j \bar{\beta}_{q+1}^j) = \\ &= N_*^i(\bar{\beta}_{q+1}^{-i}, \bar{\beta}_{q+1}^j) = N_*^i(\gamma_i^0, \gamma_j^0) \end{aligned}$$

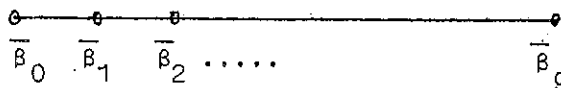
que nos lleva también a un absurdo.

C. Suficiente: Es, como la c. suficiente, una cuestión mecánica separando las distintas posibilidades para c.

1.3.11 Nota.- Es claro que los resultados anteriores nos proporcionan, a posteriori, una nueva demostración de la Proposición 1.3.4.

1.3.12 Ejemplos

A) Si se tiene una curva irreducible de valores del contacto maximal $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g$ el A.C.P es



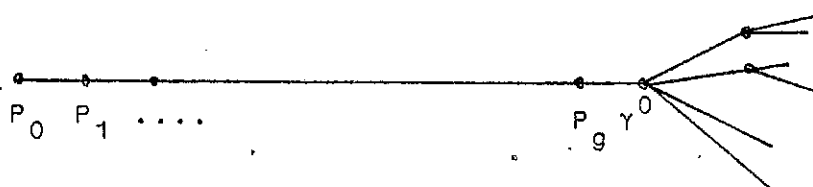
B) Caso diagonal.— Sea C una curva con d ramas equis-
 gulares $C_1 \dots C_d$. Denotamos sus valores del contacto maximal por
 $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g$ (pues son los mismos en todas las ramas) y supongamos
 que $(C_i, C_j) \geq e_{g-1} \bar{\beta}_g \quad \forall i, j \in I$.

Se tiene en primer lugar que esta última condición es equi-
 valente a $(f_i | f_j) \geq (g, 0) \quad \forall i, j \in I$ y por lo tanto equivalente a

$$(f_1 | \dots | f_d) \geq (g, 0).$$

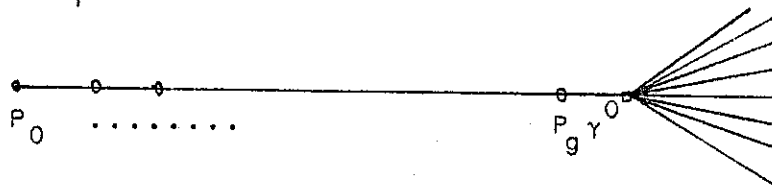
(De hecho si tenemos d ramas de género g tales que
 $(f_1 | \dots | f_d) \geq (g, 0)$ automáticamente nos encontramos en el caso diagonal).

El árbol de contactos principales es en este caso



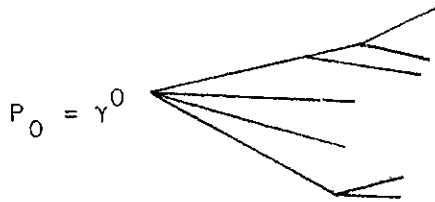
Esta distribución del A.C.P. caracteriza el caso diagonal.
 Obsérvese que $P_0, \dots, P_g \in L$, $\text{m.c.d.}(P_0, \dots, P_g) = (1, 1, \dots, 1)$ y
 no aparecen más pesos que los nudos después de P_g .

Si además se tiene $(f_i | f_j) = (f_1 | \dots | f_d) \quad \forall i, j \in I$, es
 decir $\#(I/R_{\gamma^0}) = d$ se tiene

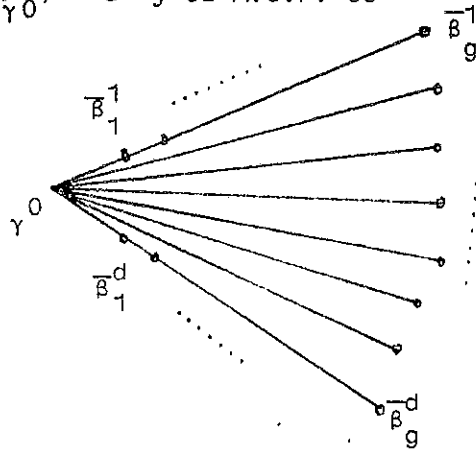


C) Caso multitangente.— Supongamos que entre las ramas
 C_1, \dots, C_d de C hay al menos dos con distinta tangente. Este ca-
 so se caracteriza por ser $\gamma^0 = \min(S - \{0\})$ y también por
 $(f_1 | \dots | f_d) = (0, 0)$.

En este caso concreto el A.C.P. tiene la forma



Aparecen en γ^0 tantas ramas como tangentes distintas hay en C , es decir $i R_{\gamma^0}^j$ si y sólo si C_i y C_j tienen la misma tangente, en particular si las tangentes son distintas dos a dos se tiene $\#(I/R_{\gamma^0}) = d$ y el A.C.P. es



D) Consideramos las curvas irreducibles C_1, C_2, C_3, C_4 de desarrollo de $H-N$.

$$(D_i) \quad \begin{cases} y = x^2 z_1 \\ x = z_1^2 z_2 \\ z_1 = z_2^2 + \lambda_i z_2^3 + z_2^3 z_3 \\ z_2 = z_3^2 + (-1)^i z_3^3 + z_3^3 z_4 \\ z_3 = z_4^2 \end{cases} \quad i = 1, \dots, 4$$

donde $\lambda_i = 1$ si $i = 1, 2$ y $\lambda_i = 0$ si $i = 3, 4$.

Se tienen los siguientes datos

$$\bar{\beta}_0^{-i} = 20, \quad \bar{\beta}_1^{-i} = 48, \quad \bar{\beta}_2^{-i} = 246, \quad \bar{\beta}_3^{-i} = 495$$

$$e_0^i = 20, \quad e_1^i = 4, \quad e_2^i = 2, \quad e_3^i = 1$$

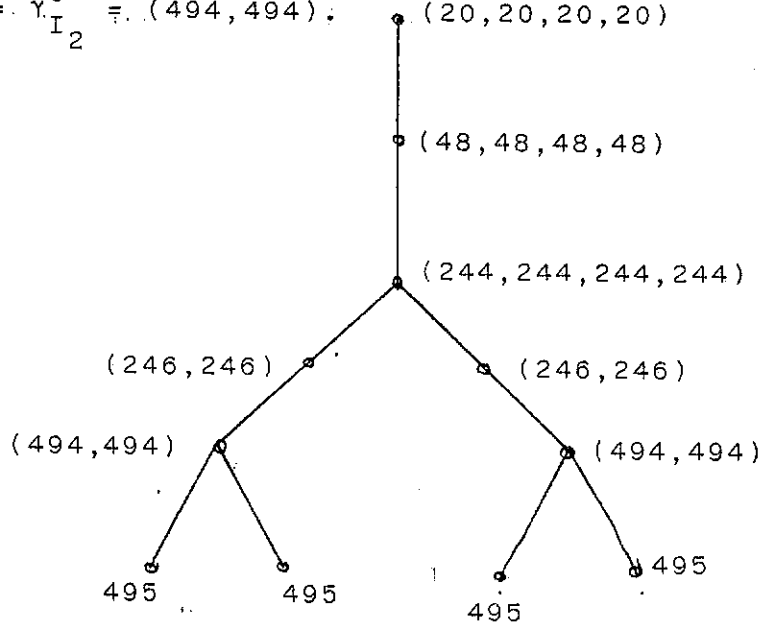
Además $(q,c) = (1,1)$ y $c \leq 1_q^i \quad \forall i$ con lo que

$$\gamma_i^0 = N_1^{i-1} + c e_1^i = 5.48 + 4 = 244$$

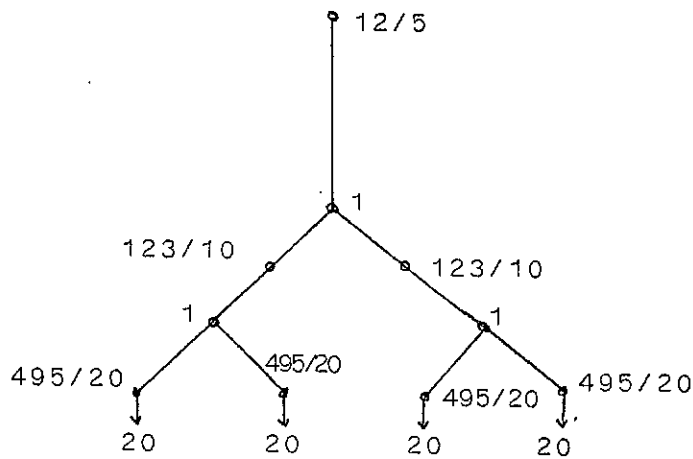
Puesto que $(f_1|f_2) = (f_3|f_4) = (2,1)$ tendremos $I_1 = \{1,2\}$ $I_2 = \{3,4\}$

y los nuevos datos $P_2^{I_1} = (246, 246)$; $P_2^{I_2} = (246, 246)$,

$$\gamma_{I_1}^0 = \gamma_{I_2}^0 = (494, 494); \quad (20, 20, 20, 20)$$



Si utilizamos los pesos reducidos (1.3.2) tenemos



E) Consideramos las curvas de desarrollo de H-N:

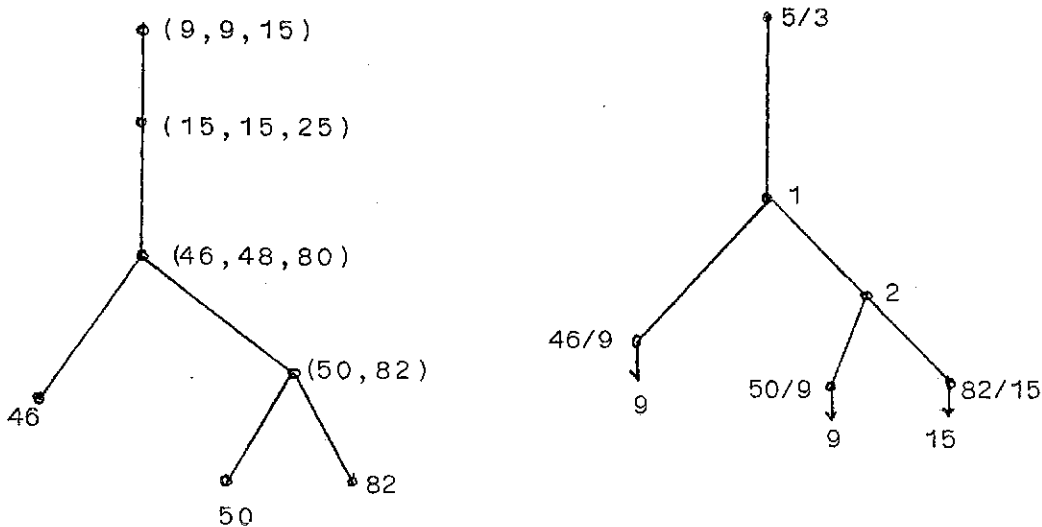
$$\begin{aligned}
 (D_1) \left\{ \begin{array}{l} y = xz_1 \\ x = z_1 z_2 \\ z_1 = z_2^2 + z_2^2 z_3 \\ z_2 = z_3^3 \end{array} \right. & \quad (D_2) \left\{ \begin{array}{l} y = xz_1 \\ x = z_1 z_2^2 \\ z_1 = z_2^2 + z_2^3 z_3 \\ z_2 = z_3^2 z_4 \\ z_3 = z_4^2 \end{array} \right. & \quad (D_3) \left\{ \begin{array}{l} y = xz_1 \\ x = z_1 z_2 \\ z_1 = z_2^2 + z_2^3 z_3 \\ z_2 = z_3^2 z_4 \\ z_3 = z_4^2 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Se tienen los datos

$$\begin{array}{lll}
 \bar{\beta}_0^1 = 9 & \bar{\beta}_0^2 = 9 & \bar{\beta}_0^3 = 15 \\
 \bar{\beta}_1^1 = 15 & \bar{\beta}_1^2 = 15 & \bar{\beta}_1^3 = 25 \\
 \bar{\beta}_2^1 = 46 & \bar{\beta}_2^2 = 50 & \bar{\beta}_2^3 = 82 \\
 e_1^1 = 3 & e_1^2 = 3 & e_1^3 = 5
 \end{array}$$

El par de contacto es $(f_1 | f_2 | f_3) = (1, 1)$ y se tiene para γ^0 , $\gamma^0 = (46, 48, 80)$. Puesto que $(f_2 | f_3) = (1, 2)$ las clases de R_{γ^0} son $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 3\}$ y tenemos también $\gamma_{I_2}^0 = (\bar{\beta}_2^2, \bar{\beta}_2^3) = (50, 82)$. (Nótese que en este caso $\gamma^0 \notin L$ pues $c = 1_2^1 + 1$, es decir $\gamma_1^0 = \bar{\beta}_2^1$. Lo mismo ocurre con $\gamma_{I_2}^0$. Compárese con el ejemplo anterior).

Lós árboles en este caso son:



CAPITULO II: ANILLOS SATURADOS. ARBOL DE EXPONENTES

CARACTERISTICOS DE UNA SINGULARIDAD



CAPITULO II

ANILLOS SATURADOS. ARBOL DE EXPONENTES CARACTERISTICOS DE UNA SINGULARIDAD

2.1 ESTRUCTURA DEL ANILLO SATURADO DE UNA CURVA PLANA

2.1.0 Notaciones.— Conservaremos todas las introducidas en 1.0, es decir C será una curva algebroide, plana, reducida con d ramas irreducibles C_1, \dots, C_d . Denotamos por $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_d$ (resp. f, f_1, \dots, f_d) los anillos locales (resp. las ecuaciones) de C, C_1, \dots, C_d respectivamente.

En este epígrafe describiremos la estructura del anillo saturado (usando las técnicas de A. Campillo: "On saturation of curve singularities (any characteristic)" [21]) de una curva plana y reducida. Parte de los resultados de este apartado están incluidos en el mencionado artículo y otros son profundizaciones sobre la estructura de estos anillos en la línea que nos interesa en esta memoria. En este sentido, este capítulo, junto con nuestro artículo [28] y parte de los resultados obtenidos en [66], pueden considerarse como una continuación de la teoría iniciada en [21].

Intentaremos conservar las notaciones de [21] y [28] en la medida que sean compatibles con las del capítulo I.

2.1.1 Definición.— Diremos que un anillo A es saturado con respecto a un subconjunto R del conjunto de no divisores de cero del anillo A , $D(A)$, si dados

$z \in A$; $z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s \in D(A)$; $x_1, \dots, x_t \in R$; $l_1, \dots, l_t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$zz_i^{-1}, zw_j^{-1}, (z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} x_1^{l_1} \dots x_t^{l_t} \in \bar{A}$$

entonces

$$z(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} x_1^{l_1} \dots x_t^{l_t} \in A.$$

En el caso particular $R = \emptyset$, diremos simplemente que A es saturado.

(\bar{A} denota el cierre entero de A en su anillo total de fracciones).

2.1.2 Definición.— Diremos que un anillo A verifica la propiedad de Arf si dados $y, z \in A$, $x \in D(A)$ con $yx^{-1}, zx^{-1} \in \bar{A}$ entonces $(yz)x^{-1} \in A$.

2.1.3 Un anillo local saturado con un cuerpo residual infinito verifica la propiedad de Arf (c.f. [21]).

Para un anillo A , el anillo saturado, \tilde{A} , de A se define como el menor de los anillos saturados situados entre A y el cierre entero de A , \bar{A} . Además se verifica que el morfismo $f: \text{Spec}(\tilde{A}) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ inducido por la inclusión, $A \subset \tilde{A}$, es un homeomorfismo de espacios topológicos ([21], §1).

2.1.4 Si \mathcal{O} es el anillo local de una curva reducida plana con d ramas se tiene $\bar{\mathcal{O}} \cong k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$ y el anillo saturado de \mathcal{O} , $\tilde{\mathcal{O}}$, es el anillo local de una curva algebroide reducida sobre k con d componentes irreducibles.

La aplicación $\underline{v}: D(\tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow \mathbb{Z}_+^d$ definida como

$$\underline{v}(z) = \underline{v}(z_1(t_1), \dots, z_d(t_d)) = (v_1(z_1), \dots, v_d(z_d)) =$$

$$= (\text{ord}_{t_1}(z_1), \dots, \text{ord}_{t_d}(z_d)) \in \mathbb{Z}_+^d \quad (\text{ver 1.0})$$

Nos permite introducir el subsemigrupo aditivo de \mathbb{Z}_+^d , $\tilde{S} = \underline{v}(D(\tilde{\mathcal{O}})) \subset \mathbb{Z}_+^d$ al que llamaremos semigrupo de valores de $\tilde{\mathcal{O}}$ ó semigrupo saturado de la curva $\text{Spec } \mathcal{O} = \text{Spec}(k[[X, Y]] / (f))$.

El anillo $\tilde{\mathcal{O}}$ verifica la propiedad de Arf y como consecuencia de ello, si $x \in D(\tilde{\mathcal{O}})$ el conjunto

$$(\tilde{\mathcal{O}} : (x)) = \{ z \in \tilde{\mathcal{O}} / zx \in \tilde{\mathcal{O}} \}$$

es un anillo. Además, el anillo $(\tilde{\mathcal{O}} : (x))$ depende únicamente de $\gamma = \underline{v}(x)$ y lo denotaremos por $\tilde{\mathcal{O}}(x)$ ó $\tilde{\mathcal{O}}(\gamma)$. Puesto que $\tilde{\mathcal{O}} \subset \tilde{\mathcal{O}}(\gamma) \subset \bar{\mathcal{O}}$, $\tilde{\mathcal{O}}(\gamma)$ es un anillo semilocal y completo; sus ideales maximales son exactamente

$$m_i(\gamma) = \{ z \in \tilde{\mathcal{O}}(\gamma) / v_i(z) > 0 \}.$$

La relación de equivalencia sobre $I = \{1, \dots, d\}$

$$iR_{\gamma j} \iff m_i(\gamma) = m_j(\gamma)$$

se puede expresar directamente en términos del semigrupo de valores \tilde{S} de $\tilde{\mathcal{O}}$ como sigue:

$$iR_{\gamma j} \iff (\forall \delta \in \tilde{S} \text{ con } \delta \geq \gamma \text{ se tiene } \delta_i = \gamma_i \iff \delta_j = \gamma_j).$$

Si I_1, I_2, \dots, I_r son las clases de equivalencia para R_γ y para $J \subset I$, $\epsilon_J \in \tilde{\mathcal{O}}$ definido como

$$\text{pr}_i(\epsilon_J) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

entonces se tiene

$$\tilde{\mathcal{O}}(\gamma) = \bigoplus_{n=1}^r \tilde{\mathcal{O}}(\gamma)_{\epsilon_{I_n}}$$

Además, los anillos $\tilde{\mathcal{O}}(\gamma)_{\epsilon_{I_n}}$ son de nuevo locales, completos y saturados; verificando además

$$\tilde{\mathcal{O}}(\gamma)_{\epsilon_{I_n}} = \tilde{\mathcal{O}}(\gamma)_{m_i(\gamma)} \quad \text{para } i \in I_n; \quad 1 \leq n \leq r.$$

2.1.5 Sea L la recta en \mathbb{R}^d que une el origen de coordenadas con el punto

$$(\beta_0^1, \dots, \beta_0^d) = (\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_0^d) = \min(\tilde{\mathcal{S}} - \{0\}).$$

Consideramos el conjunto (comparar con 1.2.5 b)).

$$A = \{\gamma \in \tilde{\mathcal{S}} / \tilde{\mathcal{S}} \subset L \cup \tilde{\mathcal{S}}(\gamma)\}$$

donde $\tilde{\mathcal{S}}(\gamma) = \{\delta \in \tilde{\mathcal{S}} / \delta \geq \gamma\}$. Se demuestra a partir de la existencia de conductor para $\tilde{\mathcal{S}}$ que A es un conjunto finito y además que es totalmente ordenado. Si tomamos $\tilde{\gamma}^0 = \max(A)$, se verifica que $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)$ tiene más de un ideal maximal y $\tilde{\gamma}^0$ es el mínimo elemento de $\tilde{\mathcal{S}}$ con esta propiedad.

Notemos que para $\gamma \in \tilde{\mathcal{S}}$, el semigrupo de valores del anillo $\tilde{\mathcal{O}}(\gamma)$ es precisamente el semigrupo

$$\tilde{\mathcal{S}}_0(\gamma) = \{\delta \in \mathbb{Z}_+^d / \delta + \gamma \in \tilde{\mathcal{S}}\}.$$

Además existe una biyección $\tilde{\mathcal{S}}(\gamma) \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_0(\gamma)$

$$\delta \longrightarrow \delta - \gamma$$

2.1.6 Si $\gamma^1, \gamma^2 \in L \cap \tilde{\mathcal{S}}$, se puede definir su máximo común divisor como el elemento $\underline{e} = (\gamma^1, \gamma^2) \in \mathbb{Z}_+^d$ dado por

$$e_i = \text{m.c.d.}(\gamma_i^1, \gamma_i^2) \quad \forall i \in I.$$

Puesto que $\gamma_i^1 \gamma_j^2 = \gamma_j^1 \gamma_i^2 \quad \forall i, j \in I$ si tomamos dos números enteros $h, l \in \mathbb{Z}$ tales que $h\gamma_i^1 + l\gamma_i^2 = e_i$ se verifica también la igualdad de Bezout para γ^1 y γ^2 , es decir

$$h\gamma^1 + l\gamma^2 = \underline{e}$$

Como consecuencia $\underline{e} \in L$ y existen enteros positivos l_1, l_2 con $\gamma^1 = l_1 \underline{e}$, $\gamma^2 = l_2 \underline{e}$. En general si tenemos $\gamma^1, \gamma^2 \in L \cap \mathbb{Z}_+^d$ y existe $i \in I$ verificando $\gamma_i^1 \mid \gamma_i^2$ (γ_i^1 divide a γ_i^2) se tiene que $\forall k \in I, \gamma_k^1 / \gamma_k^2 = \gamma_i^1 / \gamma_i^2 \in \mathbb{Z}$ y tiene sentido denotar por γ^1 / γ^2 el entero γ_k^1 / γ_k^2 .

En [21] se prueba un teorema de estructura para el anillo saturado de una curva reducida $\tilde{\mathcal{O}}$:

2.1.7 Teorema de estructura: Sean $0 < \gamma^1 < \gamma^2 < \dots < \gamma^n < \tilde{\gamma}^0$ los elementos del conjunto A (2.1.5) y sean $x_1, \dots, x_n, y \in \tilde{\mathcal{O}}$ con $\underline{v}(x_i) = \gamma^i, 1 \leq i \leq n; \underline{v}(y) = \tilde{\gamma}^0$. Se tiene entonces

$$\tilde{\mathcal{O}} = k + kx_1 + \dots + kx_n + y \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0).$$

2.1.8 Nota.- Sean $x, y \in k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$ y $\underline{m} = (m_1, \dots, m_d) = \underline{v}(y) > 0, \underline{n} = (n_1, \dots, n_d) = \underline{v}(x) > 0$ verificando $n_i m_j = n_j m_i, \forall i, j \in I = \{1, 2, \dots, d\}$.

Supongamos que se verifica una de las condiciones siguientes:

- 1) $\underline{n} < \underline{m}$ y $\underline{n} \nmid \underline{m}$ (n no divide a m)

- 2) $\underline{m} < \underline{n}$.

Denotamos por D_1, \dots, D_d los desarrollos de H-N de $\{pr_1(x), pr_1(y)\}, \dots, \{pr_d(x), pr_d(y)\}$ en los anillos

$k[[t_1]], \dots, k[[t_d]]$ respectivamente. Escribiremos los desarrollos D_1, \dots, D_d con la notación utilizada ya en el capítulo I (v.1.0)

$$(D_r) : \{ z_{j-1} = \sum_{i=0}^{n_j} a_{ji}^r z_j^i + z_j^{h_j^r} z_{j+1} \}$$

es decir, diferenciamos únicamente las constantes a_{ji} con un superíndice, r , que señala el anillo $k[[t_r]]$ y denotamos igual las z_j en todos ellos.

Se tienen las dos posibilidades siguientes:

A) $m \mid n$ (m divide a n): El desarrollo de H-N de la componente i -ésima comienza por la fila

$$x = a_{k_i}^i y^{k_i} + \dots + a_{h_i}^i y^{h_i} + y^{h_i} z_1, \quad a_{k_i}^i \neq 0$$

En este caso $k_1 = k_2 = \dots = k_d = k$, pues $m \mid n$ y el par de contacto, definido como en 1.2.1 para los desarrollos de H-N D_1, \dots, D_d , $(D_1 \mid \dots \mid D_d) \geq (0, 0)$.

Ponemos entonces:

$$x_1 = y \in k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$$

$$y_1 = (y^{h_1-k} z_1, \dots, y^{h_d-k} z_1) \in k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$$

$$v = xy^{-k} \in k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$$

Observemos entonces que

$$pr_i(v) = a_{k_i}^i + a_{k_i+1}^i y + \dots + a_{h_i}^i y^{h_i-k} + pr_i(y_1),$$

es decir v es una unidad del anillo $k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$. Además si $h_i = \infty$ ($\Leftrightarrow v_i(y) = 1$) escribiremos $pr_i(y_1) = 1$.

B) $m \nmid n$ y $n \nmid m$: El desarrollo de H-N D_i viene dado por

$$(D_i) \begin{cases} z_{-1} = z_0^{h_1^i} z_1 \\ z_0 = z_1^{h_1^i} z_2 \\ \dots \\ z_{s_1-1} = a_{s_1, k_1}^i z_{s_1}^{k_1^i} + \dots + a_{s_1, h_1^i}^i z_{s_1}^{h_1^i} + z_{s_1}^{h_{s_1}^i} z_{s_1+1}^{h_{s_1}^i} \end{cases}$$

Puesto que $n_i m_j = n_j m_i$ el par de contacto

$(q, c) = (D_1 | \dots | D_d)$ verifica $q \geq 1$ y por lo tanto los enteros $h_j^i, j \leq s_1-1$ y k_1^i no dependen de i y serán denotados por h_j y k_1 .

Consideramos en este caso los elementos de

$k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$ siguientes

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{s_1} \\ y_1 &= (z_{s_1}^{l_1^1} z_{s_1+1}, \dots, z_{s_1}^{l_1^d} z_{s_1+1}) \\ v &= (z_{s_1-1}^{-k_1} z_{s_1}, \dots, z_{s_1-1}^{-k_1} z_{s_1}) \end{aligned}$$

Con estas notaciones podemos enunciar

2.1.9 Lema. - Si consideramos $e = \text{m.c.d.}(\underline{m}, \underline{n}), m' = \underline{m}/e \in \mathbb{N}$
 $n' = \underline{n}/e$. Existen dos enteros $\sigma, \tau \in \mathbb{N}$ que verifican

$$\tau m' - \sigma n' = \pm 1$$

y además

$$x = x_1^{n'} v^\tau, \quad y = x_1^{m'} v^\sigma$$

(cf. [18] 3.4.10 y 3.4.11).

Demostración:

El caso A) es claro; como $m \mid n$, observando los desarrollos se tiene $\frac{n}{m} = k = n'$ y $m' = 1$. Entonces:

$$x = y^k v$$

$$y = y ; \quad y \quad \tau = 1, \quad \sigma = 0 \quad \text{prueban el Lema.}$$

En el caso B) el desarrollo de H-N es

$$z_{-1} = z_0^{h_0} z_1$$

$$z_0 = z_1^{h_1} z_2$$

.....

$$z_{s_1-1} = z_{s_1}^{k_1} v$$

donde $z_{-1} = x$ y $z_0 = y$ si es cierta la hipótesis 2) de 2.1.8 ó $z_{-1} = y$, $z_0 = x$ si lo es la 1).

Consideramos los corchetes de Euler definidos inductivamente de la forma

$$[h_0] = h_0$$

$$[h_0, h_1] = h_0 h_1 + 1$$

.....

$$[h_0, \dots, h_i] = h_i [h_0, \dots, h_{i-1}] + [h_0, \dots, h_{i-2}] \quad \forall i > 1$$

Si aplicamos sucesivamente las transformaciones indicadas en el desarrollo de H-N tendremos

$$\begin{aligned} z_{-1} &= z_i^{[h_0 \dots h_i]} z_{i+1}^{[h_0 \dots h_{i-1}]} \\ z_0 &= z_i^{[h_1 \dots h_i]} z_{i+1}^{[h_1 \dots h_{i-1}]} \end{aligned} \quad (\forall i)$$

y por lo tanto

$$z_{-1} = x_1 \begin{matrix} [h_0, \dots, h_{s_1-1}, k_1] \\ v \end{matrix} \begin{matrix} [h_0, \dots, h_{s_1-1}] \\ v \end{matrix}$$

$$z_0 = x_1 \begin{matrix} [h_1, \dots, k_1] \\ v \end{matrix} \begin{matrix} [h_1, \dots, h_{s_1-1}] \\ v \end{matrix}$$

Puesto que v es una unidad en $k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$

tendremos $\underline{v}(z_{-1}) = [h_0, \dots, k_1] \underline{v}(x_1)$

$$\underline{v}(z_0) = [h_1, \dots, k_1] \underline{v}(x_1)$$

y por ser $\underline{v}(x_1)$ el máximo común divisor de $\underline{v}(z_{-1})$ y $\underline{v}(z_0)$ se tiene:

$$x = x_1^{n'} v^\tau, \quad y = x_1^{m'} v^\sigma$$

donde

$$\tau = \begin{cases} [h_0, \dots, h_{s_1-1}] & \text{si } z_{-1} = x \\ \text{ó} & \\ [h_1, \dots, h_{s_1-1}] & \text{si } z_{-1} = y \end{cases}$$

(y viceversa para σ).

Se prueba finalmente que $m'\tau - n'\sigma = \pm 1$ demostrando por inducción que

$$\forall i : [h_0, \dots, h_i][h_1, \dots, h_{i-1}] - [h_0, \dots, h_{i-1}][h_1, \dots, h_i] = \pm 1.$$

Observemos que la prueba es idéntica a la que se hace en [18] 3.4.10 para el caso $d = 1$. Se puede demostrar que σ y τ son de hecho la única pareja de números naturales que verifican

$$\begin{aligned} m'\tau - n'\sigma &= \pm 1 \\ 0 \leq 2\tau \leq n', \quad 0 \leq 2\sigma \leq m'. \end{aligned}$$

2.1.10 Notas

a) Observemos que, puesto que $x = x_1^{n'} v^\tau$, $y = x_1^{m'} v^\sigma$, entonces:

$$\left. \begin{aligned} x^\sigma &= x_1^{n'\sigma} v^{\sigma\tau} \\ y^\tau &= x_1^{m'\tau} v^{\sigma\tau} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1^{m'\tau} - n'\sigma = \frac{y^\tau}{x^\sigma}$$

$$\left. \begin{aligned} x^{m'} &= x_1^{n'm'} v^{\tau m'} \\ y^{n'} &= x_1^{n'm'} v^{\sigma n'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v^{\tau m'} - \sigma n' = \frac{x^{m'}}{y^{n'}}$$

y por lo tanto se tiene

$$\tau m' - \sigma n' = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y^\tau x^{-\sigma} \\ v = x^{m'} y^{-n'} \end{cases}$$

$$\tau m' - \sigma n' = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x^\sigma y^{-\tau} \\ v = y^{n'} x^{-m'} \end{cases}$$

b) Supongamos en 2.1.8 la posibilidad B) con $q = 1, c > 0$. Denotaremos en este caso por $y^* \in k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$ el elemento definido por

$$\begin{aligned} pr_i(y^*) &= (z_{s_1-1}^{-k_1} - a_{s_1 k_1} z_{s_1}^{k_1} - \dots - a_{s_1 k_1+c-1} z_{s_1}^{k_1+c-1}) z_{s_1}^{-k_1} + \lambda z_{s_1}^c \\ &= z_{s_1-1}^{-k_1} z_{s_1}^{-k_1} - (a_{s_1 k_1} z_{s_1}^{c-1} + \dots + a_{s_1 k_1+c-1} z_{s_1}^{c-1} + \lambda z_{s_1}^c) \\ &= pr_i(v) - pr_i(u) \end{aligned}$$

Donde $u \in k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$ es la unidad dada por

$$u = a_{s_1 k_1} + a_{s_1 k_1+1} z_{s_1} + \dots + a_{s_1 k_1+c-1} z_{s_1}^{c-1} + \lambda z_{s_1}^c$$

siendo λ un elemento del cuerpo k distinto de $a_{s_1 k_1+c}^i \quad 1 \leq i \leq d$.

Observemos que $u \in k[[x_1]]$, siendo $x_1 = z_{s_1}$ y como consecuencia $v = y^* + u \in k[[x_1, y^*]]$.

Si tenemos $q > 1$ podemos hacer una construcción similar a la anterior, tomando ahora

$$u = a_{s_1 k_1} + \dots + a_{s_1 h_{s_1}} z_{s_1}^{h_{s_1} - k_1}$$

$$y^* = y_1 = v - u$$

En el caso en que se de la posibilidad A), si suponemos además, $q = 0$, $c \geq 0$ consideramos

$$u = a_{0k} + a_{0k+1} y + \dots + a_{0k+c-1} y^{c-1} + \lambda y^c$$

$$y^* = v - u$$

y por supuesto, si $q > 1$ $y^* = y_1$.

2.1.11 Lema.- Con las hipótesis y notaciones de 2.1.8, 2.1.9, 2.1.10. Consideramos $\mathcal{O} = k[[x, y]]$, $\mathcal{O}_1 = k[[x_1, y^*]]$ y sean $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ el saturado de \mathcal{O} con respecto a x , $(\widetilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1}$ el saturado de \mathcal{O}_1 con respecto a x_1 . Entonces:

$$\widetilde{\mathcal{O}}_x = k[[x]] + y (\widetilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1}$$

Demostración: Para simplificar llamaremos A al miembro de la derecha de la igualdad. Debemos probar entonces $\widetilde{\mathcal{O}}_x = A$. Para demostrar que $\widetilde{\mathcal{O}}_x \subset A$ probaremos:

a-1) A es un anillo que contiene a \mathcal{O} .

a-2) A es saturado con respecto a x .

entonces $\widetilde{\mathcal{O}}_x \subset A$ al ser $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ el menor anillo verificando a-1) y a-2).

a-1) A es un anillo que contiene a \mathcal{O}

Sea k un entero tal que $kn' \geq m'$, entonces

$$x^k y^{-1} = (x_1^{n'} v^\tau)^k (x_1^{m'} v^\sigma)^{-1} = x_1^{n'k - m'} v^{\tau k - \sigma} \in \mathcal{O}_1 \subset (\widetilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1}$$

ya que v es una unidad, con lo que $v^{\tau k - \sigma} \in \mathcal{O}_1$ y $n'k - m' \geq 0$.

Por lo tanto tendremos que

$$x^k \in y(\widetilde{\mathcal{O}_1})_{x_1} \quad \text{si} \quad kn' \geq m'.$$

Como consecuencia, todo elemento del anillo A se puede escribir como $p(x) + yz$ donde $p(x)$ es un polinomio en x de grado menor ó igual que la parte entera de $m'/n'([m'/n'])$, $z \in (\widetilde{\mathcal{O}_1})_{x_1}$.

La única propiedad que requiere comprobación es el producto y para él se tiene

$$(p(x) + yz)(p'(x) + yz') = p(x)p'(x) + y[p(x)z' + p'(x)z + yzz'].$$

Puesto que $x = x_1^{n'} v^\tau$, $y = x_1^{m'} v^\sigma$ entonces $x, y \in \mathcal{O}_1$ y por lo tanto

$p(x)z' + p'(x)z + yzz' \in (\widetilde{\mathcal{O}_1})_{x_1}$ con lo que se tiene

$$(p(x) + yz)(p'(x) + yz') \in A.$$

La contención $\mathcal{O} \subset A$ es inmediata.

a-2) A es saturado con respecto a x .

Sean $z \in A$, $z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s \in D(A)$ y $l \in \mathbb{Z}$ tales que $zz_i^{-1}, zw_j^{-1}, (z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} x^l \in \bar{A}$. Probaremos que

$$\Delta = z(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} x^l \in A$$

Distinguiremos dos casos

i) $\underline{v}(z) < \underline{v}(y)$

Podemos escribir $z = p(x) + yz_1$ y consideramos $\gamma = \text{ord}_x p(x) \leq [m'/n']$. Se tiene entonces $p(x) = x^\gamma \epsilon(x)$ donde $\epsilon(x)$ es una unidad de $k[[x]]$ (y por tanto también de \mathcal{O}_1) y

$$z = x^\gamma \epsilon(x) + yz_1 = x^\gamma \epsilon(x)(1 + yz_1 \epsilon(x)^{-1}) = x^\gamma \epsilon(x)(1 + yz')$$

donde $\epsilon(x)$ es una unidad y $z' \in (\mathcal{O}_1)_{x_1}$.

Puesto que $\underline{v}(z_i) \leq \underline{v}(z)$ y $\underline{v}(w_j) \leq \underline{v}(z)$ por un argumento similar al anterior podemos escribir

$$z_i = x^{\gamma_i} \epsilon_i(x) (1 + yz'_i) \quad 1 \leq i \leq r \quad \gamma_i \leq \gamma$$

$$w_j = x^{\delta_j} \eta_j(x) (1 + yw'_j) \quad 1 \leq j \leq s \quad \delta_j \leq \gamma$$

y tomamos la unidad $u = \epsilon(x) \epsilon_1(x) \dots \epsilon_r(x) [\eta_1(x) \dots \eta_s(x)]^{-1}$.

Los elementos de la forma $1 + yw'_j$ son también unidades en el anillo A por ser éste completo, además:

$$(1 + yw'_j)^{-1} = (1 - yw'_j + y^2 w_j'^2 + \dots) = (1 + yw_j^*)$$

y podemos entonces tomar

$$(1 + yz'') = (1 + yz'_1)(1 + yz'_1) \dots (1 + yz'_r)(1 + yw_1^*) \dots (1 + yw_s^*) \in A$$

se tiene

$$\Delta = x^{\gamma} x^{\alpha} (1 + yz'') u$$

donde $\alpha = \gamma_1 + \dots + \gamma_r - (\delta_1 + \dots + \delta_s) + 1$, $u \in A$, $z'' \in (\mathcal{O}_1)_{x_1}$.

Además es $\alpha \geq 0$ por ser $(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} x^1 \in \bar{A}$ y por tanto tenemos $\Delta \in A$.

ii) $\underline{v}(z) \geq \underline{v}(y)$

Si escribimos $z = p(x) + yz'$ y $\gamma = \text{ord}_x p(x) \leq [m'/n']$ se tiene $\gamma n' < m' \iff \gamma n < m$ y entonces $\underline{v}(z) = \gamma n < m = \underline{v}(y)$.

Por lo tanto se tiene $p(x) = 0$ y $z = yz'$ con $z' \in (\mathcal{O}_1)_{x_1}$.

Existen enteros t, k con $0 \leq t \leq r$, $0 \leq k \leq s$ tales que

$$\underline{v}(z_i) \geq \underline{v}(y), \underline{v}(w_j) \geq \underline{v}(y) \quad 1 \leq i \leq t, \quad 1 \leq j \leq k$$

$$\underline{v}(z_i) < \underline{v}(y), \underline{v}(w_j) < \underline{v}(y) \quad i > t, \quad j > k.$$

Podemos entonces escribir

$$z_i = yz'_i; \quad z'_i \in (\widetilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1}, \quad \underline{v}(z'_i) \leq \underline{v}(z') \quad 1 \leq i \leq t$$

$$w_j = yw'_j; \quad w'_j \in (\widetilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1}, \quad \underline{v}(w'_j) \leq \underline{v}(z') \quad 1 \leq j \leq k$$

$$z_i = x^{\gamma_i} \epsilon_i(x)(1 + yz'_i); \quad \epsilon_i(x) \text{ unidad en } k[[x]] \quad i > t$$

$$w_j = x^{\delta_j} \eta_j(x)(1 + yw'_j); \quad \eta_j(x) \text{ unidad en } k[[x]] \quad j > k$$

Como en el apartado anterior, tomamos

$$w = \left(\prod_{t+1}^r \epsilon_i(x)(1 + yz'_i) \right) \left(\prod_{k+1}^s \eta_j(x)(1 + yw'_j) \right)^{-1} \in A$$

$$\alpha = \sum_{t+1}^r \gamma_i - \sum_{k+1}^s \delta_j + 1$$

y obtenemos para Δ :

$$\Delta = yz'(y^t z'_1 \dots z'_t)(y^k w'_1 \dots w'_k)^{-1} x^\alpha w.$$

Utilizando las igualdades $x = x_1^{n_1} v^\tau$, $y = x_1^{m_1} v^\sigma$ en la expresión anterior resulta ser

$$\Delta = yz'(z'_1 \dots z'_t)(w'_1 \dots w'_k)^{-1} x_1^\beta v^\epsilon w$$

Ahora bien, $\underline{v}(z') \geq \underline{v}(z'_i)$, $\underline{v}(z') \geq \underline{v}(w'_j)$ y puesto que v y w son unidades en \mathcal{O}_1 se tiene también

$$\underline{v}[(z'_1 \dots z'_t)(w'_1 \dots w'_k)^{-1} x_1^\beta] = \underline{v}[(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} x_1] \geq 0.$$

Por ser el anillo $(\widetilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1}$ saturado con respecto a x_1 se tiene entonces

$$z'(z'_1 \dots z'_t)(w'_1 \dots w'_k)^{-1} x_1^\beta \in (\widetilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1}$$

y como consecuencia $\Delta \in y(\widetilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1} \subseteq A$.

Esto concluye la prueba de a-2 y por lo tanto tenemos ya

que $\tilde{\sigma}_x \subset A$.

b) Probaremos ahora que $A \subset \tilde{\sigma}_x$

Puesto que $k[[x]] \subset \tilde{\sigma}_x$ es suficiente demostrar que $y \cdot (\tilde{\sigma}_1)_{x_1} \subset \tilde{\sigma}_x$ ó lo que es equivalente

$$(\tilde{\sigma}_1)_{x_1} \subset (\tilde{\sigma}_x)(y).$$

Para probar esta contención, demostraremos:

b-1) $\sigma_1 \subset \tilde{\sigma}_x(y)$

b-2) $\tilde{\sigma}_x(y)$ es saturado con respecto a x_1 .

b-1) Se tiene que

$$x_1 = \begin{cases} y^\tau x^{-\sigma} \\ \text{ó} \\ x^\sigma y^{-\tau} \end{cases} \implies yx_1 = \begin{cases} y(y^\tau x^{-\sigma}) \\ \text{ó} \\ y(x^\sigma y^{-\tau}) \end{cases}$$

y por ser $\tilde{\sigma}_x$ saturado con respecto a x , $yx_1 \in \tilde{\sigma}_x$ es decir, $x_1 \in \tilde{\sigma}_x(y)$.

Análogamente

$$v = \begin{cases} x^{m'} y^{-n'} \\ \text{ó} \\ y^{n'} x^{-m'} \end{cases} \implies yv = \begin{cases} y(x^{m'} y^{-n'}) \\ \text{ó} \\ y(y^{n'} x^{-m'}) \end{cases} \in \tilde{\sigma}_x$$

Puesto que $u \in k[[x_1]]$ también $u \in \tilde{\sigma}_x(y)$ y entonces $y^* = v - u \in \tilde{\sigma}_x(y)$ con lo que $\sigma_1 = k[[x_1, y^*]] \subset \tilde{\sigma}_x(y)$.

b-2) Sean $z \in \tilde{\sigma}_x(y)$, $z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s \in D(\tilde{\sigma}_x(y))$, $l \in \mathbb{Z}$ tales que

$$zz_i^{-1}, zw_j^{-1}, (z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} x_1^l \in \tilde{\sigma}_x$$

y veamos entonces que $\Delta = z(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} x_1^l \in \tilde{\sigma}_x(y)$

Escribimos $y_\Delta = (yz) \prod_1^r (yz_i) (\prod_1^s (yw_j))^{-1} y^s y^{-r} x_1^1$ y tendremos

$$y_\Delta = \left\{ \begin{array}{l} (yz) \frac{(yz_1) \dots (yz_r) y^s}{(yw_1) \dots (yw_s) y^r} \left(\frac{y^\tau}{x^\sigma} \right) \\ \text{ó} \\ (yz) \frac{(yz_1) \dots (yz_r) y^s}{(yw_1) \dots (yw_s) y^r} \left(\frac{x^\sigma}{y^\tau} \right)^1 \end{array} \right.$$

Por ser $\tilde{\mathcal{O}}_x$ saturado con respecto a x se tiene en cualquiera de los casos $y \cdot \Delta \in \tilde{\mathcal{O}}_x$, es decir $\Delta \in \tilde{\mathcal{O}}_x(y)$ con lo que finaliza la demostración.

2.1.12 Nota.- Sea $\mathcal{O} = k[[x, y]]$ el anillo local de una curva algebroide, reducida y plana con d ramas irreducibles dadas por f_1, f_2, \dots, f_d . Sea (q, c) su par de contacto y consideramos los elementos de $k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$

$$y_0 = y - a_{01}x - \dots - a_{0h}x^h$$

$$y_i = z_{s_i}^{l_i} z_{s_i+1} \quad 1 \leq i < q$$

$$y_q = (z_{s_q}^{k_q - 1} - a_{s_q k_q} z_{s_q}^{k_q} - \dots - a_{s_q k_q + c - 1} z_{s_q}^{k_q + c - 1}) z_{s_q}^{-k_q}$$

Sea $x_n = z_{s_n} \in k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]] \quad 0 \leq n \leq q$ y

$$y^* = y_q + \lambda z_{s_q}^c = y_q + \lambda x_q^c$$

para $\lambda \in k$ distinto de $a_{s_q, k_q + c}^i$, $i \in I$ siempre que tenga sentido (es decir si $c \leq l_q^i$).

En estas condiciones se tiene el siguiente

2.1.13 Teorema de estructura. - En las condiciones y con las notaciones de 2.1.12

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = & k[[x]] + y_0 k[[x_1]] + \dots + y_0 y_1 \dots y_{q-2} k[[x_{q-1}]] + \\ & + y_0 \dots y_{q-1} (\epsilon_c k[[x_q]] + y^* \tilde{\sigma}(\tilde{\gamma}^0)) \end{aligned}$$

Donde $\epsilon_c = 1$ si $c > 0$ y $\epsilon_c = 0$ si $c = 0$.

Demostración:

Si hacemos el cambio $y_0 = y - a_{01}x - \dots - a_{0h}x^h$, se tiene $\sigma = k[[x, y]] = k[[x_0, y_0]]$. Además tomando x_0 transversal, es decir, de valor mínimo, se tiene

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{x_0}$$

Si $q > 0$, aplicando el Lema 2.1.11 en nuestras condiciones tenemos

$$\overbrace{(k[[x_0, y_0]])}_{x_0} = k[[x_0]] + y_0 \overbrace{(k[[x_1, y_1]])}_{x_1}$$

Si $q > 1$, el desarrollo de H-N de $\{x_1, y_1\}$ lo podemos escribir de la siguiente manera

$$y_1 = z_{s_1}^{l_1} z_{s_1+1}^{l_1} = x_1 z_{s_1+1}^{l_1}$$

$$x_1 = z_{s_1+1}^{h_{s_1+1}} z_{s_1+2}$$

.....

es decir, es el mismo desarrollo que el de $\{x_0, y_0\}$ a partir de la primera fila libre. Además si $h_{s_1} > k_1$, es decir $l_1 > 0$, será. (Vi)

$$v_i(x_1) = e_1^i = n_{s_1}^i < v_i(y_1) = \beta_2^i - \beta_1^i \text{ y } e_1^i \nmid (\beta_2^i - \beta_1^i). \text{ Si } h_{s_1} = k_1$$

$$v_i(y_1) = \beta_2^i - \beta_1^i = n_{s_1+1}^i < v_i(x_1) = e_1^i. \text{ Por lo tanto } k[[x_1, y_1]] \text{ está}$$

de nuevo en las condiciones de 2.1.8 y podemos aplicar de nuevo el Lema 2.1.11, en cuyo caso tendríamos

$$\overline{(k[[x_1, y_1]])}_{x_1} = k[[x_1]] + \overline{(k[[x_2, y_2]])}_{x_2}$$

Podemos continuar el proceso, utilizando reiteradamente el Lema 2.1.11 llegando a la siguiente situación (para q cualquiera):

CASO A (c > 0)

$$\tilde{\sigma} = k[[x]] + y_0 k[[x_1]] + \dots + y_0 \dots y_{q-1} \overline{(k[[x_q, y^*]])}_{x_q}$$

CASO B (c = 0)

$$\tilde{\sigma} = k[[x]] + y_0 k[[x_1]] + \dots + y_0 \dots y_{q-2} \overline{(k[[x_{q-1}, y_{q-1}^*]])}_{x_{q-1}}$$

La razón de la distinción se encuentra en 2.1.10 b) pues para q = 1 ó q = 0 exigimos en la construcción de y* que sea c > 0, para poder aplicar 2.1.11.

Se tiene siempre $\overline{(k[[u, v]])}_u = k[[u]] + v \overline{(k[[u, v]])}_u (v)$ pues $k[[u]] + v \overline{(k[[u, v]])}_u (v) \subseteq \overline{(k[[u, v]])}_u$ y la otra contención se deduce de $k[[u, v]] \subseteq k[[u]] + v \overline{(k[[u, v]])}_u (v)$ y de que este último anillo es saturado con respecto a u.

Aplicando lo anterior a los anillos $\sigma_{q-1} = k[[x_{q-1}, y_{q-1}]]$, $\sigma_q = k[[x_q, y^*]]$ respectivamente tendremos

$$\overline{(\sigma_{q-1})}_{x_{q-1}} = k[[x_{q-1}]] + y_{q-1} \overline{(\sigma_{q-1})}_{x_{q-1}} (y_{q-1})$$

$$\overline{(\sigma_q)}_{x_q} = k[[x_q]] + y^* \overline{(\sigma_q)}_{x_q} (y^*)$$

con lo que obtenemos para $\tilde{\sigma}$ la expresión:

$$(A): \tilde{\mathcal{O}} = k[[x]] + \dots + y_0 y_1 \dots y_{q-1} k[[x_q]] + y_0 y_1 \dots y_{q-1} y^* (\tilde{\mathcal{O}}_q)_{x_q} (y^*)$$

$$(B): \tilde{\mathcal{O}} = k[[x]] + \dots + y_0 y_1 \dots y_{q-2} k[[x_{q-1}]] + y_0 y_1 \dots y_{q-1} (\tilde{\mathcal{O}}_{q-1})_{x_{q-1}} (y_{q-1})$$

Denotaremos por \tilde{y} el elemento $y_0 y_1 \dots y_{q-1} y^*$ si estamos en el caso A ó el elemento $y_0 \dots y_{q-1}$ si estamos en el caso B. Análogamente \tilde{A} denotará el anillo $(\tilde{\mathcal{O}}_q)_{x_q} (y^*)$ ó el anillo $(\tilde{\mathcal{O}}_{q-1})_{x_{q-1}} (y_{q-1})$. Notemos que si tenemos $c = 0$ y^* es una unidad con lo que \tilde{y} no cambia en lo que se refiere a su valor. Observemos que debido a esto si demostramos que $\tilde{A} = \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y}^0)$ tenemos probado el teorema.

Probaremos ahora la desigualdad $\underline{v}(\tilde{y}) \leq \tilde{y}^0$ (*)

Se tiene (1.1.3)

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}(y_0 \dots y_{i-1}) &= (\beta_i^1, \beta_i^2, \dots, \beta_i^d) \\ \underline{v}(x_i) &= \underline{e}_i = (e_i^1, \dots, e_i^d) \end{aligned} \right\} \in L \cap \mathbb{Z}_+^d \quad \forall i \leq q$$

Sea $h \in \tilde{\mathcal{O}}$ tal que $\underline{v}(h) < \underline{v}(\tilde{y})$, si demostramos $\underline{v}(h) \in L$ hemos terminado.

Si $\underline{v}(h) < \underline{v}(y_0)$ entonces $h = x^Y \epsilon(x) (1 + y_0 h')$ (véase 2.1.11 demostración a-2) y $\underline{v}(h) = \gamma \underline{v}(x) \in L$.

Si $\underline{v}(h) \geq y_0$ entonces $h y_0^{-1} \in (\tilde{\mathcal{O}}_1)_{x_1}$ y se tiene $\underline{v}(h y_0^{-1}) < \underline{v}(y_1 \dots y_{q-1} y^*)$ con lo que se prueba el resultado por inducción sobre q teniendo en cuenta que $\underline{v}(y_0 \dots y_{i-1}) \in L \quad \forall i \leq q$.

$$\text{Veamos ahora que } \underline{\tilde{A}} \subseteq \underline{(\tilde{\mathcal{O}})_x(\tilde{y})} \subseteq \underline{(\tilde{\mathcal{O}})_x(\tilde{y}^0)} \quad (**)$$

En la demostración b) de 2.1.11 se prueba que

$$\widetilde{(\sigma_1)}_{x_1} \subseteq \widetilde{(\sigma)}_{x_1}(y),$$

aplicando este hecho q veces tendremos, por ejemplo en el caso A:

$$\begin{aligned} \widetilde{(\sigma_q)}_{x_q}(y^*) &\subseteq \widetilde{(\sigma_{q-1})}_{x_{q-1}}(y_{q-1})(y^*) = \\ &= \widetilde{(\sigma_{q-1})}_{x_{q-1}}(y_{q-1}, y^*) \subseteq \dots \subseteq \widetilde{(\sigma)}_x(y_0 y_1 \dots y_{q-1} y^*) \end{aligned}$$

de donde $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{\sigma}_x(\widetilde{y})$.

Por otra parte, puesto que $\underline{v}(\widetilde{y}) \leq \widetilde{y}^0$ y $\widetilde{\sigma}_x$ verifica la propiedad de Arf se comprueba que

$$\widetilde{\sigma}_x(\widetilde{y}) \subseteq \widetilde{\sigma}_x(\widetilde{y}^0).$$

Si se tiene $\underline{v}(\widetilde{y}) \notin L$, de la desigualdad (*) podemos deducir que $\underline{v}(\widetilde{y}) = \widetilde{y}^0$ y es inmediato entonces que

$$\widetilde{\sigma} = k[[x]] + \dots + y_0 \dots y_{q-1} k[[x_q]] + y_0 y_1 \dots y_{q-1} y^* \widetilde{\sigma}(\widetilde{y}^0)$$

por ser $\widetilde{\sigma}_x(\widetilde{y}) = \widetilde{\sigma}_x(\widetilde{y}^0)$ y $\widetilde{y} \widetilde{\sigma}_x(\widetilde{y}) \in \widetilde{\sigma}_x$ con lo que en este caso terminamos la prueba.

Veamos que $\underline{v}(\widetilde{y}) \in L \iff c \leq l_q^i \quad \forall i \in I$.

La condición suficiente es clara, pues si $c \leq l_q^i \quad \forall i \in I$ se tiene $\underline{v}(\widetilde{y}) = (\beta_q^1, \dots, \beta_q^d) + c(e_q^1, \dots, e_q^d) \in L$.

En cuanto a la necesaria, si $c = l_q^i + 1 \quad \forall i \in I$, por 1.1.3 existen $i, j \in I$ con

$$\beta_{q+1}^i \beta_0^j \neq \beta_0^i \beta_{q+1}^j$$

y puesto que $v_i(\widetilde{y}) = \beta_{q+1}^i \quad \forall i \in I$ entonces $\underline{v}(\widetilde{y}) \notin L$.

Si $c = l_q^i + 1 \leq l_q^j$ se tiene (como en 1.2.7)

$$\beta_0^i v_j(\widetilde{y}) = (\beta_q^j + c e_q^j) \beta_0^i = \beta_0^j (\beta_q^i + (l_q^i + 1) e_q^i) > \beta_0^j \beta_{q+1}^i = \beta_0^i v_i(\widetilde{y})$$

que prueba la equivalencia.

Por el comentario anterior podemos suponer $c \leq l_q^i \quad \forall i \in I$.
 Veamos que en estas condiciones \tilde{A} tiene más de un ideal maximal.

Caso B. - Podemos aplicar el Lema 2.1.9 a $(\tilde{\sigma}_{q-1})_{x_{q-1}}$ con $x = x_{q-1}$,
 $y = y_{q-1}$, $x_1 = x_q$. La expresión de v es entonces:

$$pr_i(v) = a_{s_q k_q}^i + \dots + a_{s_q h_s q}^i z_{s_q}^{l_q^i} + z_{s_q}^{l_q^i} z_{s_q+1}^{l_q^i} \quad \forall i \in I$$

y por la definición de par de contacto los coeficientes $\{a_{s_q k_q}^i\}_{i=1}^d$
 no son todos iguales.

$$x_q = \begin{cases} y_{q-1}^\tau & x_{q-1}^{-\sigma} \\ \text{ó} & x_{q-1}^\sigma & y_{q-1}^{-\tau} \\ x_{q-1} & y_{q-1} \end{cases} \Rightarrow y_{q-1} x_q = \begin{cases} y_{q-1} (y_{q-1}^\tau & x_{q-1}^{-\sigma}) \\ y_{q-1} (x_{q-1}^\sigma & y_{q-1}^{-\tau}) \end{cases} \in (\tilde{\sigma}_{q-1})_{x_{q-1}}$$

con lo que $x_q \in (\tilde{\sigma}_{q-1})_{x_{q-1}} (y_{q-1}) = \tilde{A}$. Análogamente se prueba $v \in \tilde{A}$.

Consideramos los elementos:

$$w^i = v - a_{s_q k_q}^i \in \tilde{A} \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Se tiene para ellos $v_i(w^i) > 0 \quad \forall i \in I$ y dado $i \in I$ existe
 $j \in I$ tal que $v_j(w^i) = 0$ con lo que \tilde{A} tiene al menos dos ideales
 maximales.

Caso A. - Consideramos ahora los elementos

$$w^i = y^* - (a_{s_q, k_q+c}^i + \lambda) x_q^c \in (\tilde{\sigma}_q)_{x_q} \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

(Recordemos que $c \leq l_q^i \quad \forall i \in I$). Se tiene entonces

$$v(w^i) \geq v(y^*), \text{ luego } \tilde{w}^i = w^i (y^*)^{-1} \in (\tilde{\sigma}_q)_{x_q} (y^*) = \tilde{A}, \quad \forall i.$$

De la misma forma que en el caso anterior se tiene

$v_i(\tilde{w}^i) > 0 \quad \forall i \in I$ y dado $i \in I$ existe $j \in I$ con $v_j(\tilde{w}^i) = 0$ (pues los $a_{s_q k_q}^i$ no son todos iguales). Esto prueba que \tilde{A} tiene al menos dos ideales maximales.

Puesto que teníamos $\tilde{A} \subseteq \tilde{\mathcal{O}}_x(\tilde{y}) \subseteq \tilde{\mathcal{O}}_x(\tilde{\gamma}^0)$ y \tilde{A} tiene más de un maximal se tiene necesariamente que $\tilde{\mathcal{O}}_x(\tilde{y})$ también tiene más de un maximal y por ser $\tilde{\gamma}^0$ el menor elemento de $\tilde{\mathcal{S}}$ con esta propiedad necesariamente $\underline{v}(\tilde{y}) = \tilde{\gamma}^0$.

Como en el caso $\underline{v}(\tilde{y}) \notin L$ es ya inmediato que

$$\tilde{\mathcal{O}} = k[[x]] + y_0 k[[x_1]] + \dots + y_0 \dots y_{q-1} (\epsilon_c k[[x_q]] + y^* \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0))$$

2.1.14 Notas. - a) El caso particular $d = 1$ admite un tratamiento completamente similar al utilizado en la prueba de 2.1.13, para este caso obtenemos el Teorema 2.5 de [21]:

$$\tilde{\mathcal{O}} = k[[x]] + y_0 k[[x_1]] + \dots + y_0 \dots y_{q-1} \tilde{\mathcal{O}}$$

b) Puesto que $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0) = \bigoplus_{n=1}^r \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_n}}$, donde I_1, \dots, I_r son las clases de equivalencia para $R_{\tilde{\gamma}^0}$, y es $r > 1$, el Teorema de estructura nos proporciona una expresión para $\tilde{\mathcal{O}}$ en función de anillos locales saturados con un número de ramas estrictamente menor que d . Utilizando de nuevo el Teorema para cada uno de los anillos $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_n}}$ podemos determinar por completo la estructura de $\tilde{\mathcal{O}}$ de manera inductiva.

2.1.15 Corolario. - (v. [21] 3.4) i) Sean I_1, \dots, I_r las clases de equivalencia de la relación $R_{\tilde{\gamma}^0}$ se tiene entonces

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n}} = \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n}} \quad n = 1, 2, \dots, r.$$

ii) Par un índice $1 \leq i \leq d$ se tiene $\tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{\{i\}}} = \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{\{i\}}}$.

2.2 SEMIGRUPOS SATURADOS Y SU ESTRUCTURA

2.2.0.- Los resultados anteriores sobre la estructura del anillo saturado de una curva plana \mathcal{O} tienen un reflejo en la estructura de su semigrupo de valores saturado \tilde{S} de $\tilde{\mathcal{O}}$. La mayor parte de ellos se pueden probar directamente utilizando únicamente las propiedades aritméticas del semigrupo \tilde{S} tal y como se hace en [28], en este artículo se puede ver hasta que punto están relacionados los anillos saturados de curvas con los semigrupos "saturados".

Denotaremos por $[L \cap \tilde{S}]$ el subconjunto del semigrupo \tilde{S}

$$[L \cap \tilde{S}] = \{ \gamma \in L \cap \tilde{S} / \gamma < \tilde{\gamma}^0 \}$$

2.2.1 Teorema.- ([28]). Sea \mathcal{O} el anillo local de una curva algebroide, reducida y plana con d ramas, \tilde{S} el semigrupo de valores de $\tilde{\mathcal{O}}$, I_1, \dots, I_r las clases de equivalencia para $R_{\tilde{\gamma}^0}$ y \tilde{S}_i $1 \leq i \leq r$ el semigrupo de valores del anillo $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_i}}$ $1 \leq i \leq r$. Entonces $\tilde{S}_0(\tilde{\gamma}^0) = \tilde{S}_1 \times \dots \times \tilde{S}_r$ y

$$\tilde{S} = [L \cap \tilde{S}] \cup (\tilde{\gamma}^0 + (\tilde{S}_1 \times \dots \times \tilde{S}_r))$$

La demostración es inmediata del Teorema de estructura, nótese que es también válido para curvas alabeadas utilizando 2.1.7 que también sirve en este caso [28].

Como consecuencia del Corolario 2.1.15 se tiene

2.2.2 Corolario.- a) Sean I_1, \dots, I_r las clases de equivalencia de $R_{\tilde{\gamma}^0}$. Entonces $S(\tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n}}) = \tilde{S}_{\epsilon_{I_n}}$ $n = 1, \dots, r$.

b) Sea $i \in I$, entonces $S(\widetilde{\mathcal{O}}_{e_{\{i\}}}) = \widetilde{\mathcal{S}}_{e_{\{i\}}}$.

2.2.3 Corolario.- Se tiene en $\widetilde{\mathcal{S}}$:

$$1) \quad \widetilde{\gamma}_i^0 = \begin{cases} \beta_{q+1}^i & \text{si } c = l_q^i + 1 \\ \beta_q^i + c e_q^i & \text{si } c \leq l_q^i \end{cases}$$

$$2) \quad [L \cap \widetilde{\mathcal{S}}] = \{ \widetilde{P}_n + \lambda e_n \mid n = 0, 1, \dots, q, \lambda \geq 0 \text{ con } \widetilde{P}_n + \lambda e_n < \widetilde{\gamma}^0 \}$$

donde $\widetilde{P}_n = (\beta_n^1, \dots, \beta_n^d)$, $e_n = (e_n^1, \dots, e_n^d)$. La variación de λ es, de una forma más precisa:

$$0 \leq \lambda \leq l_n \quad \text{si } n < q \quad \text{y} \quad 0 \leq \lambda < c \quad \text{si } n = q$$

$$3) \quad \widetilde{\gamma}^0 \in L \iff c \leq l_q^i \quad \forall i \in I \iff \widetilde{\gamma}^0 = \widetilde{P}_q + c e_q$$

La demostración es inmediata del Teorema 2.1.13.

2.2.4 Nota.- Supongamos $d = 1$ y denotemos por

$\langle\langle \beta_0, \dots, \beta_g \rangle\rangle$ el semigrupo de \mathbb{Z}_+ formado por las expresiones del tipo $\beta_v + \lambda e_v$ $0 \leq v \leq g$, $\lambda \geq 0$. Se tendrá entonces (2.1.14 a)) que $\widetilde{\mathcal{S}} = \langle\langle \beta_0, \dots, \beta_g \rangle\rangle$.

Además en este caso se tiene:

2.2.5 Teorema.- Sean \mathcal{C} , \mathcal{C}' dos curvas algebroides planas irreducibles, \mathcal{C} es equisingular a \mathcal{C}' si y sólo si $S(\widetilde{\mathcal{C}}) = S(\widetilde{\mathcal{C}'})$.

Demostración: La condición necesaria es evidente, pues dos curvas equisingulares tienen los mismos exponentes característicos y por 2.2.4 entonces $S(\widetilde{\mathcal{C}}) = S(\widetilde{\mathcal{C}'})$.

En cuanto a la suficiente, si \tilde{S} es el semigrupo de $\tilde{\mathcal{O}}$ consideramos los números definidos inductivamente

$$\alpha_0 = \min\{\tilde{S} - \{0\}\}; \quad e_0 = \alpha_0$$

$$\forall i > 0 \quad \alpha_i = \min\{\gamma \in \tilde{S} / \text{m.c.d.}(\gamma, e_{i-1}) < e_{i-1}\}; \quad e_i = \text{m.c.d.}(\alpha_i, e_{i-1})$$

Por 2.2.4 es claro que $\alpha_v = \beta_v \quad 0 \leq v \leq g$ y por tanto \tilde{S} determina la clase de equisingularidad de la curva \mathcal{O} .

2.2.6 Nota.- Si observamos el teorema de estructura 2.1.13, vemos que todos los datos que intervienen se pueden obtener mediante los desarrollos de H-N de las ramas. Esto nos lleva a preguntarnos si el Corolario 2.1.15 será cierto para un conjunto de índices cualquiera, es decir $\tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A} = \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A} \quad \forall A \subset I$.

Probaremos a continuación este resultado, observemos que la demostración es válida para curvas no necesariamente planas, pues se puede utilizar 2.1.7 y 2.1.15 que son válidas también en este caso. Observemos que el resultado será cierto también, como consecuencia, para la saturación de Zariski por [21] 3.6.

2.2.7 Lema.- Sea $A \subset I$ se tiene entonces

$$\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_A} = (\tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A})(\tilde{\gamma}^0_{\epsilon_A})$$

Demostración:

Si $x = z_{\epsilon_A} \in \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_A}$ con $z \in \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)$ entonces $\tilde{\gamma}z \in \tilde{\mathcal{O}}$ siendo $\tilde{\gamma}$ como en 2.1.13 tal que $\underline{v}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}^0$.

$$(\tilde{\gamma}z)_{\epsilon_A} = (\tilde{\gamma}_{\epsilon_A})(z_{\epsilon_A}) \in \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A} \implies x = z_{\epsilon_A} \in (\tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A})(\tilde{\gamma}_{\epsilon_A})$$

y tenemos $\tilde{\sigma}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_A} \subset (\tilde{\sigma}_{\epsilon_A})(\tilde{\gamma}^0_{\epsilon_A})$

Por otra parte, sea $x \in (\tilde{\sigma}_{\epsilon_A})(\tilde{\gamma}^0_{\epsilon_A})$, es decir $(\tilde{\gamma}_{\epsilon_A})x \in \tilde{\sigma}_{\epsilon_A}$ y existe entonces $z \in \tilde{\sigma}$ con $(\tilde{\gamma}_{\epsilon_A})x = z_{\epsilon_A}$. Puesto que $\underline{v}(z) \geq \underline{v}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}^0$ se tiene entonces

$$z\tilde{\gamma}^{-1} \in \tilde{\sigma}(\tilde{\gamma}^0) \quad \text{y} \quad x = (z_{\epsilon_A})(\tilde{\gamma}_{\epsilon_A})^{-1} = (z\tilde{\gamma}^{-1})_{\epsilon_A} \in \tilde{\sigma}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_A}.$$

2.2.8 Teorema.— Sea σ el anillo local de una curva algebroide y reducida con d ramas y $A \subset I = \{1, \dots, d\}$. Se tiene

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon_A} = \widetilde{\sigma}_{\epsilon_A}$$

Demostración:

a) Veamos que $\tilde{\sigma}_{\epsilon_A} \subset \widetilde{\sigma}_{\epsilon_A}$.

Se tiene que $\tilde{\sigma} = \bigcup_{n \geq 0} \sigma_n$ contruídos de la forma siguiente: $\sigma_0 = \sigma$ y $\forall n > 0$.

$$\sigma_n = \{z(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} / z \in \sigma_{n-1}, z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s \in D(\sigma_{n-1}); \\ zz_1^{-1}, zw_j^{-1}, (z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} \in \overline{\sigma}_{n-1}\}$$

Veamos que $\sigma_n \epsilon_A \subseteq (\sigma_{\epsilon_A})_n \quad \forall n \geq 0$ por inducción sobre n . Si $n = 0$ es claro pues $\sigma_{\epsilon_A} = (\sigma_{\epsilon_A})_0$.

Sea $w' = w_{\epsilon_A} \in \sigma_n \epsilon_A$, existirán $z \in \sigma_{n-1}, z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_s \in D(\sigma_{n-1})$ con las condiciones de la definición de σ_n tales que

$$w = z(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1}.$$

Puesto que $w' = (z_{\epsilon_A})(z_1 \epsilon_A) \dots (z_r \epsilon_A) [(w_1 \epsilon_A) \dots (w_s \epsilon_A)]^{-1}$

y $\sigma_{n-1} \varepsilon_A \subseteq (\sigma_{\varepsilon_A})_{n-1}$ es inmediato que $w' \in (\sigma_{\varepsilon_A})_n$.

Si $z' = z \varepsilon_A \in \tilde{\sigma}_{\varepsilon_A}$ existirá $n \in \mathbb{N}$ con $z \in \sigma_n$ y por tanto $z' = z \varepsilon_A \in \sigma_n \varepsilon_A \subseteq (\sigma_{\varepsilon_A})_n \subset \tilde{\sigma}_{\varepsilon_A}$.

b) Para demostrar la contención $\tilde{\sigma}_{\varepsilon_A} \subseteq \tilde{\sigma}_{\varepsilon_A}$ es suficiente demostrar que $\tilde{\sigma}_{\varepsilon_A}$ es saturado, ya que $\sigma_{\varepsilon_A} \subset \tilde{\sigma}_{\varepsilon_A}$ y tendremos entonces $\tilde{\sigma}_{\varepsilon_A} \subset \tilde{\sigma}_{\varepsilon_A}$.

Razonaremos por inducción sobre d . Nótese que en el caso $d = 1$ no hay nada que demostrar.

Sean $z \varepsilon_A, z_1 \varepsilon_A, \dots, z_r \varepsilon_A, w_1 \varepsilon_A, \dots, w_s \varepsilon_A$ verificando $(z \varepsilon_A)(z_1 \varepsilon_A)^{-1}, (z \varepsilon_A)(w_1 \varepsilon_A)^{-1}, (z_1 \varepsilon_A) \dots (z_r \varepsilon_A)(w_1 \varepsilon_A)^{-1} \dots (w_s \varepsilon_A)^{-1} \in \overline{\sigma}_{\varepsilon_A}$

Tenemos que demostrar que

$$w \varepsilon_A = (z(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1}) \varepsilon_A \in \tilde{\sigma}_{\varepsilon_A}$$

Caso 1. - $\underline{v}(z) < \underline{v}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}^0$.

Nótese que, puesto que $\underline{v}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}^0$ es equivalente para $x \in \tilde{\sigma}$ $\underline{v}_i(x) < \tilde{\gamma}_i^0$ ($\exists i$) y $\underline{v}(x) < \tilde{\gamma}^0$.

Puesto que $(z \varepsilon_A)(z_1 \varepsilon_A)^{-1}, (z \varepsilon_A)(w_1 \varepsilon_A)^{-1} \in \overline{\sigma}_{\varepsilon_A}$ se tendrá entonces que $\underline{v}(z_1) \leq \underline{v}(z) < \tilde{\gamma}^0$ y $\underline{v}(w_1) \leq \underline{v}(z) < \tilde{\gamma}^0$ y $\underline{v}(z_1), \underline{v}(w_1) \in L$.

También tendremos $(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1} \in \tilde{\sigma}$ pues $\underline{v}[(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1}] = \sum \underline{v}(z_i) - \sum \underline{v}(w_j) \in L$ y por ser $\underline{v}_k[(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1}] \geq 0$ necesariamente $\underline{v}[(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1}] \geq 0$.

Por ser $\tilde{\sigma}$ saturado tendremos entonces $w \in \tilde{\sigma}$ y por lo tanto $w \varepsilon_A \in \tilde{\sigma}_{\varepsilon_A}$.

Caso 2. - $\underline{v}(z) \geq \underline{v}(\tilde{y}) = \tilde{y}^0$.

$$\begin{aligned} \text{Puesto que } \underline{v}(w)_{\epsilon_A} &= \underline{v}(z)_{\epsilon_A} + \underline{v}[(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1}]_{\epsilon_A} \geq \\ &\geq \underline{v}(z)_{\epsilon_A} \geq \underline{v}(\tilde{y})_{\epsilon_A} \end{aligned}$$

se tiene que

$$w_{\epsilon_A} \in \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A} \iff (w_{\epsilon_A})(\tilde{y}_{\epsilon_A})^{-1} \in \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A}(\tilde{y}_{\epsilon_A}) = (\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y}))_{\epsilon_A}.$$

Además, puesto que $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y}) = \bigoplus_{n=1}^r \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y})_{\epsilon_{I_n}}$ se tiene

$$\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y})_{\epsilon_A} = \left[\bigoplus_{n=1}^r \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y})_{\epsilon_{I_n}} \right]_{\epsilon_A} = \bigoplus_{n=1}^r \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y})_{\epsilon_{I_n} \cap A}$$

y por lo tanto

$$(w_{\epsilon_A})(\tilde{y}_{\epsilon_A})^{-1} \in \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y})_{\epsilon_A} \iff [(w_{\epsilon_A})(\tilde{y}_{\epsilon_A})^{-1}]_{\epsilon_{I_n}} \in \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y})_{\epsilon_{I_n} \cap A} \quad \forall n = 1, \dots, r.$$

Aplicando de nuevo 2.2.7: $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y})_{\epsilon_{I_n} \cap A} = \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n} \cap A}(\tilde{y}_{\epsilon_{I_n} \cap A})$ y entonces

$$\begin{aligned} &[(w_{\epsilon_A})(\tilde{y}_{\epsilon_A})^{-1}]_{\epsilon_{I_n}} \in \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{y})_{\epsilon_{I_n} \cap A} \quad \forall n = 1, \dots, r \iff \\ \iff &(\tilde{y}_{\epsilon_{I_n} \cap A})[(w_{\epsilon_A})(\tilde{y}_{\epsilon_A})^{-1}]_{\epsilon_{I_n}} \in \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n} \cap A} \quad \forall n = 1, \dots, r \iff \\ \iff &w_{\epsilon_A \cap I_n} \in \tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n} \cap A} \quad \forall n = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Utilizando el corolario 2.1.15 este último anillo es

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n} \cap A} = (\tilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n}})_{\epsilon_{I_n} \cap A} = \widetilde{(\mathcal{O}_{\epsilon_{I_n}})}_{\epsilon_{I_n} \cap A}$$

y puesto que $\mathcal{O}_{\epsilon_{I_n}}$ es el anillo de una curva con un número de ramas menor estrictamente que d , por hipótesis de inducción tenemos

$$\widetilde{(\mathcal{O}_{\epsilon_{I_n}})}_{\epsilon_{I_n} \cap A} = \widetilde{\mathcal{O}_{\epsilon_{I_n} \cap A}} \quad \text{y basta demostrar entonces que}$$

$$w_{\epsilon_A \cap I_n} \in \widetilde{\mathcal{O}_{\epsilon_{I_n} \cap A}} = \widetilde{\mathcal{O}_{\epsilon_{I_n} \cap A}} \quad \forall n = 1, \dots, r$$

Ahora bien, tenemos

$$(z_{\epsilon_A})(z_{i \in A})^{-1}, (z_{\epsilon_A})(w_{j \in A})^{-1} \in \overline{\sigma_{\epsilon_A}} \Rightarrow (zz_1^{-1})_{\epsilon_{I_n \cap A}}, (zw_j^{-1})_{\epsilon_{I_n \cap A}} \in \overline{\sigma_{\epsilon_{I_n \cap A}}}$$

$$[(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1}]_{\epsilon_A} \in \overline{\sigma_{\epsilon_A}} \Rightarrow [(z_1 \dots z_r)(w_1 \dots w_s)^{-1}]_{\epsilon_{I_n \cap A}} \in \overline{\sigma_{\epsilon_{I_n \cap A}}}$$

y por ser $\widetilde{\sigma_{\epsilon_{I_n \cap A}}}$ saturado $w_{\epsilon_A \cap I_n} \in \widetilde{\sigma_{\epsilon_{I_n \cap A}}} \quad \forall n = 1, \dots, r$ y terminamos la prueba.

2.2.9 Corolario.-- En las condiciones del Teorema 2.2.8

se tiene

$$S(\widetilde{\sigma_{\epsilon_A}}) = \widetilde{S}_{\epsilon_A} \quad \forall A \subset I$$

2.2.10 Nota.-- Supongamos conocida la clase de equisingularidad de cada una de las d ramas que forman la curva algebroide plana C .

Si conocemos el par de contacto $(f_1 | \dots | f_d) = (q, c)$ tendremos (2.2.3)

$$\tilde{\gamma}_i^0 = \begin{cases} \beta_q^i + c e_q^i & \text{si } c \leq l_q^i \\ \beta_{q+1}^i & \text{si } c = l_q^i + 1 \end{cases}$$

Por otra parte, conocido $\tilde{\gamma}^0$ sabemos que cualquiera de sus coordenadas $\tilde{\gamma}_k^0$ se escribe de manera única como $\tilde{\gamma}_k^0 = \beta_p^k + c e_p^k$ $0 \leq c \leq l_p^k$ (2.2.4). Si $p \leq \rho$ entonces tendremos $(f_1 | \dots | f_d) = (p, c)$ y si $p = \rho + 1$ necesariamente $c = 0$ y $(f_1 | \dots | f_d) = (\rho, l_p^k + 1)$.

(ρ denota el índice de separación del tipo de equisingularidad de f_1, \dots, f_d v. 1.2.1).

Esto prueba que $\tilde{\gamma}^0$ y $(f_1 | \dots | f_d)$ son datos equivalentes

cuando conocemos los tipos de singularidad de las ramas.

2.2.11 Proposición.- Sean $i, j \in I$ y denotemos por $\tilde{\gamma}_{ij}^0$ el elemento del semigrupo $S(\widetilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{\{i,j\}}})$ definido como en 2.1.5. se tiene entonces

$$iR_{\tilde{\gamma}^0} j \iff \tilde{\gamma}_{i,j}^0 > pr_{\{i,j\}}(\tilde{\gamma}^0)$$

Demostración:

Denotamos por $\tilde{\gamma}^0(\widetilde{\mathcal{S}}_{\epsilon_A})$ ó $\tilde{\gamma}^0(\widetilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A})$ el elemento de $\widetilde{\mathcal{S}}_{\epsilon_A} = S(\widetilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_A})$ definido como en 2.1.5 para este semigrupo.

Si J es una de las clases de equivalencia para $R_{\tilde{\gamma}^0}$ y tomamos $i, j \in J$, puesto que $\widetilde{\mathcal{O}}(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_J}$ es un anillo local (2.1.13) se tiene que:

$$\tilde{\gamma}^0(\widetilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_J}) > \tilde{\gamma}^0_{\epsilon_J}$$

y por lo tanto

$$\tilde{\gamma}_{ij}^0 \geq \tilde{\gamma}^0(\widetilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_J})_{\epsilon_{\{i,j\}}} > \tilde{\gamma}^0_{\epsilon_{\{i,j\}}}$$

(Nótese que estamos utilizando ϵ_A por pr_A).

Recíprocamente si $iR_{\tilde{\gamma}^0} j$, existen $\gamma^i, \gamma^j \in \widetilde{\mathcal{S}}$ verificando

$$\gamma_i^i = \tilde{\gamma}_i^0, \quad \gamma_j^i > \tilde{\gamma}_j^0$$

$$\gamma_j^j = \tilde{\gamma}_j^0, \quad \gamma_i^j > \tilde{\gamma}_i^0$$

y por lo tanto

$$\gamma^i_{\epsilon_{\{i,j\}}} = (\gamma_i^i, \gamma_j^i) = (\tilde{\gamma}_i^0, \gamma_j^i) > (\tilde{\gamma}_i^0, \tilde{\gamma}_j^0)$$

$$\gamma^j_{\epsilon_{\{i,j\}}} = (\gamma_i^j, \gamma_j^j) = (\gamma_i^j, \tilde{\gamma}_j^0) > (\tilde{\gamma}_i^0, \tilde{\gamma}_j^0)$$

lo que prueba que $\tilde{\gamma}_{ij}^0 = \tilde{\gamma}^0 \epsilon_{\{i,j\}}$

2.2.12 Teorema.— Sean $i, j \in I$. Se tiene que $iR_{\tilde{\gamma}^0}j$ si y sólo si $iR_{\gamma^0}j$ (véase 1.2.8 para la definición de R_{γ^0}).

Demostración:

Condición necesaria

Supongamos $iR_{\tilde{\gamma}^0}j$ y sea (q,c) el par de contacto de f_1, \dots, f_d . Si $c \leq l_q^i$ entonces es $(f_i | f_j) = (q,c)$ y por lo tanto

$$\tilde{\gamma}_{ij}^0 = (\beta_q^i + c\epsilon_q^i, \beta_q^j + c\epsilon_q^j) = \tilde{\gamma}^0 \epsilon_{\{i,j\}}$$

por la proposición anterior tenemos $iR_{\tilde{\gamma}^0}j$

Si $c = l_q^i + 1$, puede ocurrir que $(f_i | f_j)$ sea (q,c) ó $(q+1,0)$.

En ambos casos es inmediato que

$$\tilde{\gamma}_{ij}^0 = \tilde{\gamma}^0 \epsilon_{\{i,j\}}$$

Obsérvese que si $c = l_q^i + 1 = l_{q+1}^j + 1$ se tiene en ambos casos que

$$\tilde{\gamma}_{ij}^0 = (\beta_{q+1}^i, \beta_{q+1}^j) = \tilde{\gamma}^0 \epsilon_{\{i,j\}}$$

Condición suficiente

Supongamos ahora $iR_{\gamma^0}j$, entonces $(f_i | f_j) > (q,c)$ y

$(f_i | f_j) > (q+1,0)$ si $c = l_q^i + 1$. El par de contacto

$(f_i | f_j) = (q',c')$ determina $\tilde{\gamma}_{ij}^0$ (2.2.10) y es un simple cálculo

demostrar que $\tilde{\gamma}_{ij}^0 > \tilde{\gamma}^0 \epsilon_{\{i,j\}}$.

2.2.13 Nota.- Si conocemos la clase de equisingularidad de las ramas que forman la curva C , el par de contacto es un dato equivalente a $\tilde{\gamma}^0$ (2.2.10) y también a γ^0 (véase 1.2.4, 1.2.6). Indirectamente sabemos ya que γ^0 y $\tilde{\gamma}^0$ son datos equivalentes, de una manera más concreta veremos la relación numérica que hay entre ambos:

2.2.14 Proposición.- Sea C una curva reducida, plana con d ramas de ecuaciones f_1, \dots, f_d y (q, c) su par de contacto. Se verifica entonces la igualdad

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 - \sum_{n=1}^q (N_n - 1) P_n$$

Donde $P_n = (\bar{\beta}_n^1, \dots, \bar{\beta}_n^d)$ (v. 1.2.11) y $N_n = N_n^i = N_n^j$ (1.2.2) para $0 \leq n \leq q$; $i, j \in I$

Demostración:

a) Supongamos $c \leq l_q^i$, se tiene entonces

$$\begin{aligned} \gamma_i^0 &= N_q \bar{\beta}_q^i + c e_q^i = (N_q - 1) \bar{\beta}_q^i + \bar{\beta}_q^i + c e_q^i = \\ &= (N_q - 1) \bar{\beta}_q^i + N_{q-1} \bar{\beta}_{q-1}^i + (\beta_q^i - \beta_{q-1}^i) + c e_q^i = \\ &= \sum_{n=1}^q (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \bar{\beta}_{q-1}^i + (\beta_q^i - \beta_{q-1}^i) + c e_q^i = \dots \\ &\dots = \sum_{n=1}^q (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \bar{\beta}_1^i + \sum_{n=2}^q (\beta_n^i - \beta_{n-1}^i) + c e_q^i = \\ &= \sum_{n=1}^q (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \bar{\beta}_1^i + \beta_q^i - \beta_1^i + c e_q^i = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^q (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \beta_q^i + c e_q^i = \\
 &= \sum_{n=1}^q (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \tilde{\gamma}_i^0
 \end{aligned}$$

b) Si tenemos $c = \underline{1}_q^i + 1$ entonces $\gamma_i^0 = \bar{\beta}_{q+1}^i$; $\tilde{\gamma}_i^0 = \beta_{q+1}^i$

y por el mismo proceso de a)

$$\begin{aligned}
 \gamma_i^0 &= \bar{\beta}_{q+1}^i = N_q \bar{\beta}_q^i + (\beta_{q+1}^i - \beta_q^i) = \dots \\
 &= \sum_{n=1}^q (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \bar{\beta}_1^i + \sum_{n=2}^q (\beta_n^i - \beta_{n-1}^i) = \\
 &= \sum_{n=1}^q (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \beta_{q+1}^i = \\
 &= \sum (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \tilde{\gamma}_i^0
 \end{aligned}$$

Tenemos por tanto demostrado que

$$\gamma_i^0 = \sum_1^q (N_n - 1) \bar{\beta}_n^i + \tilde{\gamma}_i^0$$

2.2.15 Teorema. - (v. [21]). Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos curvas algebroides, planas, reducidas, con d y d' ramas respectivamente. \mathcal{C} es equisingular a \mathcal{C}' si y sólo si $d = d'$ y para una reordenación de las ramas se tiene $S(\tilde{\mathcal{C}}) = S(\tilde{\mathcal{C}}')$.

Demostración:

C. Necesaria. - Razonamos por inducción sobre d . Para $d = 1$ es el Teorema 2.2.5.

En el caso general veamos que la clase de equisingularidad de \mathcal{C} determina $S(\tilde{\mathcal{C}})$.

Para $i, j \in I$ la multiplicidad de intersección (f_i, f_j) permite determinar $(f_i | f_j)$ (1.1.8) y por tanto podemos calcular $(f_1 | \dots | f_d)$ y $\tilde{\gamma}^0$. Puesto que $R_{\tilde{\gamma}^0} = R_{\gamma^0}$ (2.2.12) podemos también determinar $R_{\tilde{\gamma}^0}$ (1.3.4).

Por hipótesis de inducción sabemos que la clase de equisingularidad de $\sigma_{\epsilon_{I_n}}$, donde I_n es una de las clases de $R_{\tilde{\gamma}^0}$, determina $S(\widetilde{\sigma_{\epsilon_{I_n}}}) = S(\tilde{\sigma})_{\epsilon_{I_n}}$ para $n = 1, \dots, r$. Puesto que $S(\widetilde{\sigma_{\epsilon_{I_n}}})(\tilde{\gamma}^0_{\epsilon_{I_n}}) = S(\tilde{\sigma})(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_n}}$ se tiene

$$(S(\tilde{\sigma}))_0(\tilde{\gamma}^0) = \prod_{n=1}^r (S(\tilde{\sigma}))_0(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_n}} = \prod_{n=1}^r (S(\widetilde{\sigma_{\epsilon_{I_n}}}))_0(\tilde{\gamma}^0_{\epsilon_{I_n}})$$

y por hipótesis de inducción tenemos determinado $(S(\tilde{\sigma}))_0(\tilde{\gamma}^0)$.

Puesto que $\tilde{S} = [L \cap \tilde{S}] \cup (\tilde{\gamma}^0 + (S_1 \times \dots \times S_r))$ y $[L \cap \tilde{S}]$ se puede calcular con $\tilde{\gamma}^0$ y la clase de equisingularidad tenemos ya demostrada la condición necesaria.

C. Suficiente

Por 2.1.15 y 2.2.2 $S(\tilde{\sigma})_{\epsilon_{\{i\}}} = S(\widetilde{\sigma_{\epsilon_{\{i\}}})$ y por 2.2.5 $S(\widetilde{\sigma_{\epsilon_{\{i\}}})$ determina la clase de equisingularidad de la rama i -ésima para cada $i \in I$.

Podemos calcular $\tilde{\gamma}^0$ en $S(\tilde{\sigma})$ (2.1.5) y también $R_{\tilde{\gamma}^0}$ (2.1.4), esto nos permite calcular la multiplicidad de intersección de f_i y f_j siempre que $i \neq j$

$$(f_i, f_j) = \min \left\{ e_q^i(\tilde{\gamma}_j^0 + \sum_1^q (N_v - 1) \beta_v^j), e_q^j(\tilde{\gamma}_i^0 + \sum_1^q (N_v - 1) \beta_v^i) \right\}$$

(véase 1.2.9, 2.2.12, 2.2.14).

Si I_1, \dots, I_r son las clases de equivalencia para $R_{\tilde{Y}^0}$ tenemos $S(\widetilde{\mathcal{O}}_{\epsilon_{I_n}}) = S(\tilde{\mathcal{O}}) \epsilon_{I_n}$ y podemos razonar inductivamente para calcular el resto de las multiplicidades de intersección con lo que finalizamos la prueba.

2.3. ARBOL DE EXPONENTES CARACTERISTICOS DE UNA CURVA

2.3.0 Introducción.— En el epígrafe anterior hemos visto el paralelismo perfecto que hay entre los contactos principales de una curva C , que son datos del semigrupo de valores de C , y los valores del semigrupo saturado $\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_q, \tilde{\gamma}^0$. Es claro que podemos construir de una manera similar al A.C.P un árbol pesado asociado a la curva utilizando en lugar de los contactos principales los "exponentes característicos" $\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_q, \tilde{\gamma}^0$ de C .

En este epígrafe construimos dicho árbol pesado, al que llamaremos ARBOL DE EXPONENTES CARACTERISTICOS de C (A.E.C.) y que denotaremos por $D(\tilde{C})$, $D(\tilde{\mathcal{O}})$ ó \tilde{D} cuando no haya lugar a equívocos.

2.3.1 Construcción del A.E.C.— (v. 1.3.1)

Partimos de una curva algebroide, plana y reducida C de ecuación $f = f_1 f_2 \dots f_d$ donde f_1, \dots, f_d son las ecuaciones de las d ramas de $C: C_1, \dots, C_d$. Denotaremos por \mathcal{O} , como es habitual, el anillo local de C , por $\tilde{\mathcal{O}}$ el saturado de \mathcal{O} y por \tilde{S} el semigrupo de valores $S(\tilde{\mathcal{O}})$.

Podemos calcular el par de contacto $(f_1 | \dots | f_d)$ que denotaremos por (q, c) y consideramos

$$\tilde{P}_n = (\beta_n^1, \beta_n^2, \dots, \beta_n^d) \in \tilde{S} \quad 0 \leq n \leq q$$

$$\tilde{\gamma}^0 = (\tilde{\gamma}_1^0, \dots, \tilde{\gamma}_d^0) \in \tilde{S}$$

Es evidente (1.1.3) que $\tilde{P}_n \in L$, $n \leq q$, siendo L la recta que une el origen con el punto $(\beta_0^1, \dots, \beta_0^d)$.

Sean I_1, \dots, I_r las clases de equivalencia para la relación $R_{\tilde{\gamma}^0}$ y calculamos los datos anteriores para las curvas σ_{I_n} $n = 1, \dots, r$, es decir tenemos

$$\tilde{P}_0^{I_n} < \dots < \tilde{P}_q^{I_n} < \dots < \tilde{P}_{q_n}^{I_n} \leq \tilde{\gamma}_{I_n}^0$$

Nos quedamos únicamente con

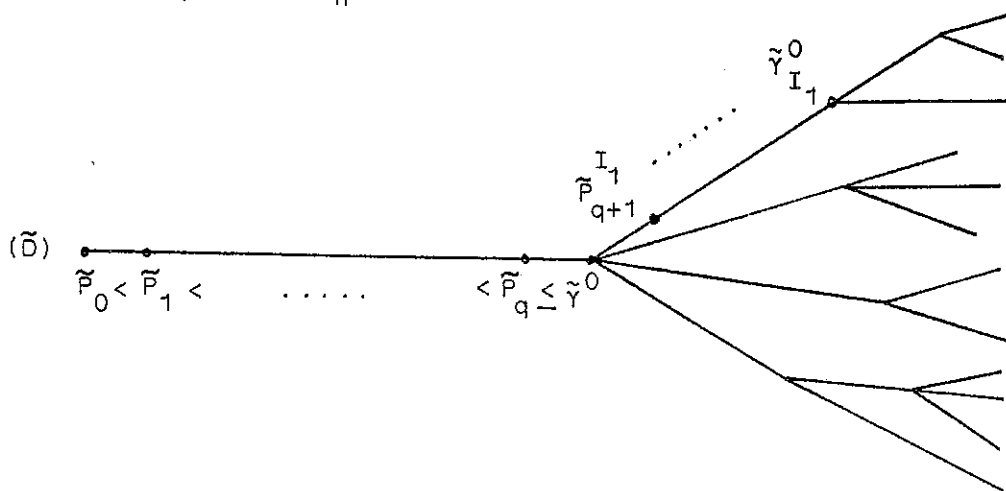
$$\tilde{P}_{q+1}^{I_n} < \dots < \tilde{P}_{q_n}^{I_n} \leq \tilde{\gamma}_{I_n}^0 \quad \forall n = 1, \dots, r.$$

Puesto que $\#I_n < d \quad \forall n$, podemos continuar este procedimiento hasta conseguir que todas las ramas queden "separadas" y que en cada una de ellas hayamos agotado los exponentes característicos.

Ordenamos los datos anteriores en un árbol de la siguiente forma:

- 1) Colocamos en su tronco los pesos $\tilde{P}_0 < \dots < \tilde{P}_q$.
- 2) Del primer nudo salen tantas ramas como clases de equivalencia hay en $R_{\tilde{\gamma}^0}$ y colocamos en él el peso $\tilde{\gamma}^0$.
- 3) En cada una de las ramas, I_n , colocamos los nuevos pesos

$$\tilde{P}_{q+1}^{I_n} < \dots < \tilde{P}_{q_n}^{I_n} \text{ siguiendo el proceso inductivamente.}$$



2.3.2 Nota.- Se puede transcribir literalmente el contenido de la Nota 1.3.2 para reducir los pesos del árbol y evitar la sobreabundancia de datos. Obsérvese que si hacemos dicha reducción obtenemos los pesos $\tilde{\beta}_n^i = \beta_n^i / \beta_0^i \quad \forall n \leq q$.

2.3.3 Teorema.- Si C y C' son dos curvas algebroides, planas y reducidas con d y d' ramas respectivamente entonces C es equisingular a C' si y solamente si $d = d'$ y para una ordenación de los índices $\{1, \dots, d\}$ se tiene $D(\tilde{C}) = D(\tilde{C}')$.

Demostración: Puesto que todos los datos empleados en 2.3.1 dependen sólo de la clase de equisingularidad de la curva (v.2.2) la condición necesaria es trivial.

En cuanto a la suficiente es también clara, pues por una parte podemos obtener $\{\beta_0^i, \dots, \beta_{g_i}^i\} \quad \forall i \in I$ y por otro lado $\tilde{\gamma}^0$ permite calcular (2.2.15) la multiplicidad de intersección de f_i y f_j siempre que $i \neq j$. La prueba continúa inductivamente.

2.3.4 Cálculo de \tilde{D} a partir de \tilde{S}

Si tomamos como punto de partida el semigrupo saturado de la curva C , \tilde{S} , el cálculo del árbol \tilde{D} es muy simple (compárese con el cálculo del A.C.P. a partir de S en el §3 CAP. 1).

$$\tilde{\gamma}^0 = \max \{ \gamma \in \tilde{S} / \tilde{S} \subset L \cup \tilde{S}(\gamma) \} \quad (2.1.5)$$

$$i \neq j \iff (\forall \delta \in \tilde{S}, \delta \geq \gamma; \delta_i = \gamma_i \iff \delta_j = \gamma_j) \quad (2.1.4)$$

Además si consideramos

$$(L \cap \tilde{S}) = \{ \gamma \in L \cap \tilde{S} / \gamma \leq \tilde{\gamma}^0 \}$$

ses de equivalencia para $R_{\tilde{\gamma}^0}$, y por S_i el semigrupo $\tilde{S}_{\epsilon_{I_i}}$. Se tiene entonces (2.2.2)

$$\tilde{S}_i = (S_i)_0 (\tilde{\gamma}^0 \epsilon_{I_i})$$

y tenemos la cadena de biyecciones

$$\tilde{S}(\tilde{\gamma}^0) \longleftrightarrow \tilde{S}_0(\tilde{\gamma}^0) = \prod_1^r \tilde{S}_0(\tilde{\gamma}^0)_{\epsilon_{I_n}} = \prod_1^r (S_n)_0(\tilde{\gamma}^0 \epsilon_{I_n}) \longleftrightarrow \prod_1^r S_n(\tilde{\gamma}^0 \epsilon_{I_n})$$

y como consecuencia podemos afirmar

$$\gamma \in \tilde{S}(\tilde{\gamma}^0) \iff \gamma \epsilon_{I_n} \in S_n(\tilde{\gamma}^0 \epsilon_{I_n})$$

2.3.6 Cálculo explícito de \tilde{S}

Procedamos por inducción sobre el número de ramas d . El caso $d = 1$ es 2.2.4.

En el caso general, suponemos conocidos S_1, \dots, S_r por hipótesis de inducción, se tiene en primer lugar

$$\tilde{S}(\tilde{\gamma}^0) = S_1(\tilde{\gamma}^0 \epsilon_{I_1}) \times \dots \times S_r(\tilde{\gamma}^0 \epsilon_{I_r})$$

Podemos escribir el Teorema 2.2.1 también como

$$\tilde{S} = [L \cap \tilde{S}] \cup \tilde{S}(\tilde{\gamma}^0)$$

y tendremos

$$[L \cap \tilde{S}] = \{ \tilde{P}_v + \lambda e_v \mid 0 \leq v \leq q, \lambda \geq 0, \tilde{P}_v + \lambda e_v < \tilde{\gamma}^0 \}$$

con lo que finalizamos el cálculo de \tilde{S} .

Nótese que el A.E.C. de las curvas $\mathcal{C}_{\epsilon_{I_i}}$ se puede obtener a partir de $D(\tilde{\mathcal{C}})$ simplemente multiplicando todos sus datos por ϵ_{I_i} y prescindiendo de todos los que se anulan. (Es lo mismo que quitar todas las ramas de las clases I_j , $j \neq i$, y proyectar los pesos que aparecen en el pie del árbol).

se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= P_0 = \min(\tilde{S} - \{0\}), \quad e_0 = \tilde{P}_0 \\ \forall v > 0 \quad \tilde{P}_v &= \min\{ \gamma \in (L \cap \tilde{S}) / \text{m.c.d}(\gamma, e_{v-1}) < e_{v-1} \} \\ e_v &= \text{m.c.d}(\tilde{P}_v, e_{v-1}) \in L \cap \mathbb{Z}_+^d \end{aligned}$$

Puesto que conocemos las clases de equivalencia para $R_{\tilde{Y}^0}$, I_1, \dots, I_r podemos continuar la construcción inductivamente en cada uno de los semigrupos $\tilde{S}_{e_{I_n}}$ $n = 1, \dots, r$ hasta completar \tilde{D} .

2.3.5 Nota

a) La ventaja esencial de trabajar con los semigrupos saturados de curvas es que estos se determinan con mucha mayor facilidad que los semigrupos de las curvas y simplifican notablemente los cálculos. Más concretamente, el semigrupo de valores, S , de la curva C es un dato equivalente al tipo de equisingularidad de la curva; sin embargo no se conocen algoritmos para su cálculo conocidas las clases de equisingularidad de las ramas y las multiplicidades de intersección. Sin embargo el Teorema de estructura 2.2.1 para el semigrupo saturado \tilde{S} de C nos permite calcular explícitamente \tilde{S} de una manera muy simple partiendo por ejemplo de \tilde{D} .

b) Como en 2.1.5 consideramos

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\gamma) &= \{ \delta \in \tilde{S} / \delta \geq \gamma \} \\ \tilde{S}_0(\gamma) &= \{ \delta \in \mathbb{Z}_+^d / \delta + \gamma \in \tilde{S} \} \end{aligned}$$

Se tiene una biyección $\tilde{S}(\gamma) \longrightarrow \tilde{S}_0(\gamma)$

$$\delta \longrightarrow \delta - \gamma$$

Denotamos por \tilde{S}_i el semigrupo $\tilde{S}_0(\tilde{Y}^0)_{e_{I_i}}$, siendo I_1, \dots, I_r las cla-

2.3.7 Nota.- Si $A \subset I$ y consideramos la curva C_A que tiene por ecuación $f_A = \prod_{i \in A} f_i$ el cálculo de $D(C_A)$ y $D(\tilde{C}_A)$ es muy simple partiendo de D y \tilde{D} , basta quedarse con las ramas correspondientes a los índices del conjunto A , prescindiendo del resto, y proyectar los pesos sobre $A \subset I$. Llamaremos $D\varepsilon_A$ y $\tilde{D}\varepsilon_A$ a los A.C.P. y A.E.C. respectivamente de C_A . Denotamos los contactos principales de $D\varepsilon_A$ (respectivamente los "exponentes característicos" de $\tilde{D}\varepsilon_A$) como $P_0\varepsilon_A, \dots, P_{q_A}\varepsilon_A, \gamma_A^0$ (resp. $\tilde{P}_0\varepsilon_A, \dots, \tilde{P}_{q_A}\varepsilon_A, \tilde{\gamma}_A^0$).

Entre ambos conjuntos de datos se tienen las siguientes relaciones numéricas

$$P_0\varepsilon_A = \tilde{P}_0\varepsilon_A$$

$$P_{v+1}\varepsilon_A = N_v(A)(P_v\varepsilon_A) + \tilde{P}_{v+1}\varepsilon_A - \tilde{P}_v\varepsilon_A \quad \forall v < q_A$$

$$e_v\varepsilon_A = \text{m.c.d.}(P_v\varepsilon_A, e_{v-1}\varepsilon_A) = \text{m.c.d.}(\tilde{P}_v\varepsilon_A, e_{v-1}\varepsilon_A), \quad v \leq q_A$$

$$N_v(A) = \frac{e_{v-1}\varepsilon_A}{e_v\varepsilon_A} = \frac{e_{v-1}^i}{e_v^i} \quad \forall i \in A, \quad v \leq q_A$$

$$\tilde{\gamma}_A^0 = \gamma_A^0 - \sum_{v=1}^{q_A} (N_v(A) - 1)P_v\varepsilon_A$$

Puesto que además $R_{\gamma_A^0} = R_{\tilde{\gamma}_A^0} \quad \forall A \subset I$, es claro que las relaciones numéricas anteriores proporcionan el algoritmo de paso de D a \tilde{D} y viceversa.

Nótese que en particular si $A = I$ tenemos

$$P_0 = \tilde{P}_0$$

$$P_{n+1} = N_n P_n + \tilde{P}_{n+1} - \tilde{P}_n \quad \forall n < q$$

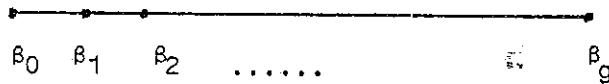
$$e_n = \text{m.c.d.}(P_n, e_{n-1}) = \text{m.c.d.}(\tilde{P}_n, e_{n-1})$$

$$\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 + \sum_{n=1}^q (N_n - 1)P_n$$

2.3.8 Ejemplos

Repetiremos los ejemplos que ya utilizamos en 1.3.12 para poner de manifiesto la analogía entre D y \tilde{D} .

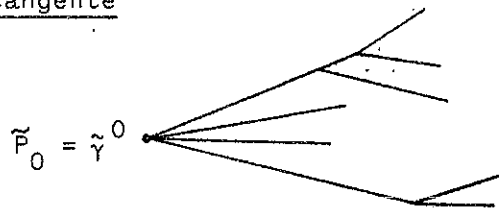
A) Caso irreducible



B) Caso diagonal



C) Caso multitangente



D) Tomamos f_1, f_2, f_3, f_4 igual que en 1.3.12 D)

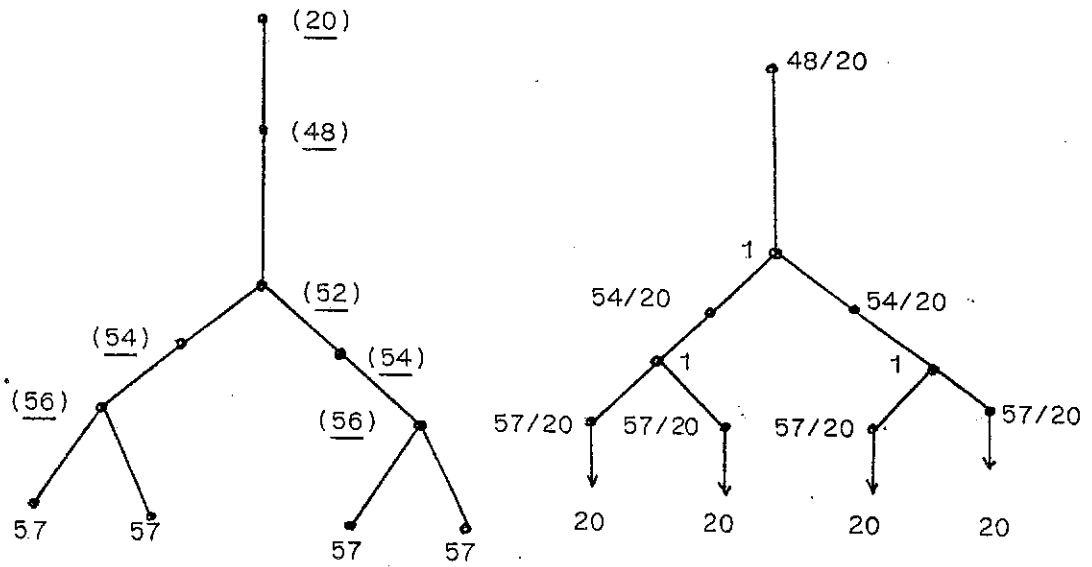
$$\beta_0^i = 20, \quad \beta_1^i = 48, \quad \beta_2^i = 54, \quad \beta_3^i = 57$$

$$\tilde{\gamma}^0 = (52, 52, 52, 52) \quad \tilde{\gamma}_{I_1}^0 = (56, 56) = \tilde{\gamma}_{I_2}^0$$

Reproduciendo los árboles de 1.3.12 D) tenemos

$$\tilde{P}_0 = (20, 20, 20, 20) = \underline{(20)}, \quad \tilde{P}_1 = (48, 48, 48, 48) = \underline{(48)},$$

$$\tilde{\gamma}^0 = (52, 52, 52, 52) = \underline{(52)}, \quad \tilde{P}_2^{I_1} = \tilde{P}_2^{I_2} = (54, 54) = \underline{(54)}$$



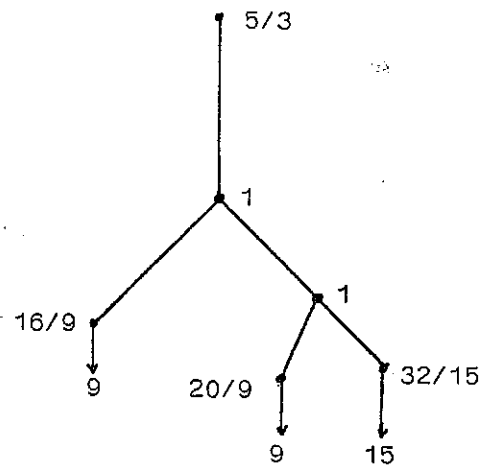
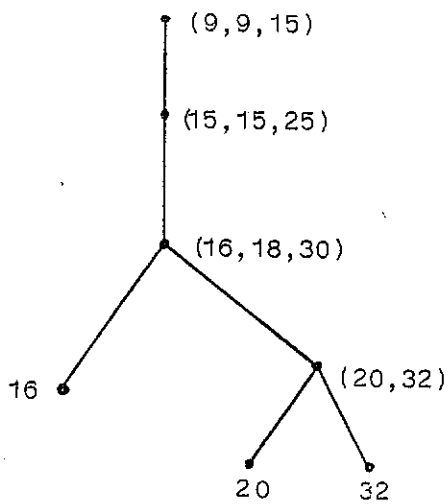
E) Para las curvas f_1, f_2, f_3 de 1.3.12 E) setiene:

$$\beta_0^1 = 9, \quad \beta_1^1 = 15, \quad \beta_2^1 = 16$$

$$\beta_0^2 = 9, \quad \beta_1^2 = 15, \quad \beta_2^2 = 20$$

$$\beta_0^3 = 15, \quad \beta_1^3 = 25, \quad \beta_2^3 = 32$$

$$\tilde{\gamma}^0 = (16, 18, 30) \quad \tilde{\gamma}_{I_2}^0 = (20, 32)$$



2.4 DESARROLLOS DE PUISEUX

2.4.0.- Cuando la característica del cuerpo base es cero la herramienta usual para estudiar las curvas planas son los desarrollos de Puiseux. Parece lógico por tanto estudiar en este caso los árboles $D(C)$ y $D(\tilde{C})$ utilizando desarrollos de Puiseux. Por otra parte O. Zariski en su serie de artículos "General Theory of Saturation and Saturated Local Rings" introduce los anillos saturados de curvas planas poniendo de relieve la simplicidad de los cálculos utilizando los exponentes característicos de los desarrollos de Puiseux. Puesto que cuando la característica de k es cero la saturación de Zariski es la misma que la que hemos usado aquí (ver [21]), estudiaremos también la relación que existe entre los invariantes comunmente usados por Zariski y los utilizados por nosotros en el diagrama \tilde{D} .

Haremos continuas referencias al artículo de O. Zariski "General Theory of Saturation and of Saturated Local Rings II. (Saturated Local Rings of dimension 1)" ([81]) citando la referencia exacta en él de los resultados utilizados.

2.4.1 Notaciones

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y $f_1, f_2 \in k[[X, Y]]$ dos series irreducibles, sea \mathcal{O} el anillo local de la curva algebroide de ecuación $f = f_1 f_2$, $\mathcal{O} = k[[X, Y]] / (f)$ y supongamos que $x = X + (f)$ es transversal a ambas curvas f_1 y f_2 .

Podemos tomar los desarrollos de Puiseux de f_1 y f_2 .

$$(f_1): \begin{cases} x = t_1^{n_1} \\ y = \sum_{i \geq n_1} a_i^1 t_1^i \end{cases} \quad (f_2): \begin{cases} x = t_2^{n_2} \\ y = \sum_{i \geq n_2} a_i^2 t_2^i \end{cases}$$

donde $n_1 = \bar{\beta}_0^1 = \beta_0^1$ es la multiplicidad de f_1 y $n_2 = \bar{\beta}_0^2 = \beta_0^2$ es la multiplicidad de f_2 .

Podemos también escribir los desarrollos de Puiseux en los cuerpos $k((x^{1/n_1}))$ y $k((x^{1/n_2}))$ respectivamente como

$$(*) \begin{cases} (f_1): y_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1 x^{i/n_1} \\ (f_2): y_2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 x^{i/n_2} \end{cases}$$

Usaremos, en la mayor parte del epígrafe, los desarrollos de Puiseux escritos en la forma

$$y_1 = x^{\beta_1^1/n_1} + \sum_{j=1}^{l_1^1} a_{1j}^1 x^{(\beta_1^1 + j e_1^1)/n_1} + \sum_{j=0}^{l_2^1} a_{2j}^1 x^{(\beta_2^1 + j e_2^1)/n_1} + \dots +$$

$$(**) \quad \dots + \sum_{j=0}^{\infty} a_{g_1 j}^1 x^{(\beta_{g_1}^1 + j)/n_1}$$

donde $l_i^1 = h_{s_i}^1 - k_i^1, i = 1, 2, \dots, g_1 - 1$

$$y_2 = x^{\beta_1^2/n_2} + \sum_{j=1}^{l_1^2} a_{1j}^2 x^{(\beta_1^2 + j e_1^2)/n_2} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} a_{g_2 j}^2 x^{(\beta_{g_2}^2 + j)/n_2}$$

$$(**) \quad l_i^2 = h_{s_i}^2 - k_i^2, \forall i = 1, 2, \dots, g_2 - 1$$

Sea w_1 (resp. w_2) una raíz primitiva n_1 -ésima (res. n_2 -ésima) de la unidad, los n_1 (resp. n_2) desarrollos de Puiseux conjugados de y_1 (resp. y_2) se obtienen entonces como

$$y_1^n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1 w_1^{ni} x^{i/n_1}; \quad n = 1, 2, \dots, n_1$$

(resp. $y_2^m = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 w_2^{mi} x^{i/n_2}; \quad m = 1, 2, \dots, n_2$).

Denotaremos por v la valoración natural del cuerpo $k((x^{1/n_1 n_2}))$ con $v(x) = 1$. Nótese que en este cuerpo tienen sentido los desarrollos de Puiseux de f_1 y f_2 simultáneamente.

2.4.2 Definición.- Llamaremos exponente de contacto de f_1 y f_2 al número

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{12} &= \max\{v(y_1^n - y_2^m) / 1 \leq n \leq n_1, 1 \leq m \leq n_2\} \\ &= \max\{v(y_1 - y_2^m) / 1 \leq m \leq n_2\} \\ &= \max\{v(y_1^n - y_2) / 1 \leq n \leq n_1\} \end{aligned}$$

2.4.3 Nota.- (v. [81] § 6)

Podemos definir el entero q por la condición siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &> \min\left\{\frac{\beta_1^1}{n_1}, \frac{\beta_2^2}{n_2}\right\} \\ \tilde{\gamma} &\leq \min\left\{\frac{1}{n_1}, \frac{\beta_{q+1}^2}{n_2}\right\} \end{aligned}$$

El número $\tilde{\gamma}$ nos dice que, para una cierta elección del entero m , los desarrollos de Puiseux y_1, y_2^m difieren únicamente en términos de orden mayor o igual que $\tilde{\gamma}$. Cambiando la parametrización si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\tilde{\gamma} = v(y_1 - y_2)$.

Se tiene entonces que, si $i/n_1 < \tilde{\gamma}$ y $a_i^1 \neq 0$ (resp. $j/n_2 < \tilde{\gamma}$ y $a_j^2 \neq 0$) existe j (resp. existe i) con $i/n_1 = j/n_2$ y además $a_i^1 = a_j^2$. Concretando un poco más, si observamos la expresión (**) para los desarrollos de Puiseux, se tiene

$$\beta_i^1 / n_1 = \beta_i^2 / n_2 \quad \forall i \leq q$$

$$l_i^1 = l_i^2 = l_i, \quad \frac{\beta_{i+ce}^1}{n_1} = \frac{\beta_{i+ce}^2}{n_2}, \quad a_{ic}^1 = a_{ic}^2; \quad i=1, \dots, q-1, \quad 0 \leq c \leq l_i$$

$$\frac{\beta_{q+ce}^1}{n_1} = \frac{\beta_{q+ce}^2}{n_2}, \quad 0 \leq c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}$$

Si $\frac{\beta_{q+ce}^1}{n_1} < \tilde{\gamma}$ entonces $a_{qc}^1 = a_{qc}^2$

2.4.4 Lema.- Con las notaciones usuales, sea

$$A = \left\{ \frac{\beta_{q+ce}^1}{n_1} = \frac{\beta_{q+ce}^2}{n_2}; \quad 0 \leq c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\} \right\}$$

Se verifica entonces que, o bien $\tilde{\gamma} \in A$ o bien

$$\tilde{\gamma} = \min\{\beta_{q+1}^1 / n_1, \beta_{q+1}^2 / n_2\}$$

Demostración

a) Supongamos $\tilde{\gamma} < \min\{\beta_{q+1}^1 / n_1, \beta_{q+1}^2 / n_2\}$, existirá entonces un único c con $0 < c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}$ de manera que

$$\tilde{\gamma} = \frac{\beta_q^1 + ce^1}{n_1} = \frac{\beta_q^2 + ce^2}{n_2} \quad (\text{v. 2.4.3})$$

observemos que necesariamente $a_{q,c}^1 \neq a_{q,c}^2$.

b) En caso contrario, la misma definición de $\tilde{\gamma}$ es

$$\tilde{\gamma} = \min\{\beta_{q+1}^1 / n_1, \beta_{q+1}^2 / n_2\}.$$

2.4.5 Nota.— Asociado a $\tilde{\gamma}$ podemos definir un par de números enteros que denotaremos por $|\tilde{\gamma}|$ de la forma siguiente:

a) Si $\tilde{\gamma} = \frac{\beta_q^1 + c e_q^1}{n_1}$ con $c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}$ será $|\tilde{\gamma}| = (q, c)$.

b) Si $\tilde{\gamma} = \min\{\beta_{q+1}^1 / n_1, \beta_{q+1}^2 / n_2\}$ tendremos

$$|\tilde{\gamma}| = \begin{cases} (b-1) = (q, l_q^1 + 1) & \text{si } \beta_{q+1}^1 n_2 < \beta_{q+1}^2 n_1 \\ (b-2) = (q, l_q^2 + 1) & \text{si } \beta_{q+1}^1 n_2 > \beta_{q+1}^2 n_1 \\ (b-3) = (q+1, 0) & \text{si } \beta_{q+1}^1 n_2 = \beta_{q+1}^2 n_1 \end{cases}$$

Obsérvese que si $\beta_{q+1}^1 n_2 \neq \beta_{q+1}^2 n_1$ necesariamente q es el índice de separación del tipo de equisingularidad (v. 1.1.1) y podemos definir, cuando esto ocurra y además $\tilde{\gamma} = \min\{\beta_{q+1}^1 / n_1, \beta_{q+1}^2 / n_2\}$

$$|\tilde{\gamma}| = (q, \min\{l_q^1 + 1, l_q^2 + 1\})$$

puesto que $l_q^1 < l_q^2 \implies \beta_{q+1}^1 n_2 < \beta_{q+1}^2 n_1$ y

$$l_q^2 < l_q^1 \implies \beta_{q+1}^2 n_1 < \beta_{q+1}^1 n_2$$

2.4.6 Teorema.— Si f_1, f_2 son las ecuaciones de curvas irreducibles planas y (f_1, f_2) denota su multiplicidad de intersección entonces:

i) Si $\tilde{\gamma} \in A$, $(f_1, f_2) = e_{q-1}^2 \bar{\beta}_q^1 + c e_q^2 e_q^1 = e_{q-1}^1 \bar{\beta}_q^2 + c e_q^1 e_q^2$

ii) Si $\tilde{\gamma} \notin A$, $(f_1, f_2) = \min\{e_{q+1}^{1-2}, e_{q+1}^{2-1}\}$

Observemos que, puesto que $e_{q+1}^1 n_2 = e_{q+1}^2 n_1$, se tiene

$$\beta_{q+1}^1 n_2 > \beta_{q+1}^2 n_1 \iff e_{q+1}^{2-1} > e_{q+1}^{1-2} \iff e_{q+1}^2 \bar{\beta}_{q+1}^{-1} > e_{q+1}^1 \bar{\beta}_{q+1}^2$$

(véase 1.1.2 demost.).

Demostración:

Usando la Proposición 6.1 de [81] se tiene

$$(f_1, f_2) = \beta_1^1(e_0^2 - e_1^2) + \beta_2^1(e_1^2 - e_2^2) + \dots + \beta_q^1(e_{q-1}^2 - e_q^2) + \tilde{\gamma} n_1 e_q^2$$

$$(f_1, f_2) = \beta_1^2(e_0^1 - e_1^1) + \beta_2^2(e_1^1 - e_2^1) + \dots + \beta_q^2(e_{q-1}^1 - e_q^1) + \tilde{\gamma} n_2 e_q^1$$

Se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^q \beta_n^1 (e_{n-1}^2 - e_n^2) &= \sum_{n=1}^q \beta_n^1 e_{n-1}^2 - \sum_{n=1}^q \beta_n^1 e_n^2 = \\ &= \beta_1^1 e_0^2 - \beta_q^1 e_q^2 + \sum_{n=1}^{q-1} (\beta_{n+1}^1 - \beta_n^1) e_n^2 = \\ &= \beta_1^1 e_0^2 - \beta_q^1 e_q^2 + \sum_{n=1}^{q-1} (\bar{\beta}_{n+1}^{-1} - N_n^1 \bar{\beta}_n^{-1}) e_n^2 = \\ &= \beta_1^1 e_0^2 - \beta_q^1 e_q^2 + \sum_{n=1}^{q-1} (\bar{\beta}_{n+1}^{-1} - N_n^2 \bar{\beta}_n^{-1}) e_n^2 = \\ &= \beta_1^1 e_0^2 - \beta_q^1 e_q^2 + \sum_{n=1}^{q-1} (\bar{\beta}_{n+1}^{-1} e_n^2 - e_{n-1}^2 \bar{\beta}_n^{-1}) = \\ &= \beta_1^1 e_0^2 - \beta_q^1 e_q^2 + \bar{\beta}_q^{-1} e_{q-1}^2 - e_0^2 \bar{\beta}_1^{-1} = \\ &= \bar{\beta}_q^{-1} e_{q-1}^2 - \beta_q^1 e_q^2. \end{aligned}$$

Análogamente $\sum_{n=1}^q \beta_n^2 (e_{n-1}^1 - e_n^1) = \bar{\beta}_q^2 e_{q-1}^1 - \beta_q^2 e_q^1.$

En el caso i) tenemos $\tilde{\gamma} = \frac{\beta_q^1 + ce_q^1}{n_1}$ y entonces

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= \beta_q^{-1} e_{q-1}^2 - \beta_q^1 e_q^2 + \tilde{\gamma} n_1 e_q^2 = \\ &= \beta_q^{-1} e_{q-1}^2 - \beta_q^1 e_q^2 + \beta_q^1 e_q^2 + ce_q^1 e_q^2 = \\ &= \beta_q^{-1} e_{q-1}^2 + ce_q^1 e_q^2 \end{aligned}$$

En el caso ii), supongamos $\tilde{\gamma} = \beta_{q+1}^1 / n_1$ y tenemos

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= \beta_q^{-1} e_{q-1}^2 - \beta_q^1 e_q^2 + \beta_{q+1}^1 e_q^2 = \\ &= e_q^2 [N_q^2 \beta_q^{-1} - \beta_q^1 + \beta_{q+1}^1] = \\ &= e_q^2 \beta_{q+1}^{-1} \end{aligned}$$

Si se tiene $\tilde{\gamma} = \beta_{q+1}^2 / n_2$ podemos utilizar la segunda expresión para la multiplicidad de intersección y obtenemos

$$(f_1, f_2) = e_q^1 \beta_{q+1}^{-2}$$

La observación previa a la demostración nos dice que el Teorema queda así demostrado.

2.4.7 Corolario.- El par de números enteros $|\tilde{\gamma}|$ definido en 2.4.5 coincide con el par de contacto de f_1 y f_2 , $(f_1|f_2)$.

La demostración es evidente utilizando el Teorema anterior y 1.1.7, 1.1.8 y 1.1.9.

2.4.8 Corolario.- Conocidas las clases de equisingularidad de f_1 y f_2 son datos equivalentes: $(f_1|f_2)$, (f_1, f_2) , $\tilde{\gamma}$, γ^0 , $\tilde{\gamma}^0$.

Es inmediato después de lo anterior y de las fórmulas para

$\tilde{\gamma}$ en 2.4.4.

2.4.9 Nota

a) Supongamos $(q, c) = (f_1 | f_2)$ por 2.2.3 la expresión $\tilde{\gamma}^0$ es

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_i^0 &= \beta_q^i + c e_q^i & \text{si } c \leq l_q^i \\ \tilde{\gamma}_i^0 &= \beta_{q+1}^i & \text{si } c = l_q^i + 1 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Se tiene entonces $\tilde{\gamma} = \min\{\tilde{\gamma}_1^0 / n_1, \tilde{\gamma}_2^0 / n_2\}$

b) Consideremos $y_1^* = \sum_{i/n_1 < \tilde{\gamma}} a_i^1 x^{i/n_1}$, $y_2^* = \sum_{i/n_2 < \tilde{\gamma}} a_i^2 x^{i/n_2}$

(nótese que $y_1^* = y_2^*$) e $y_1 - y_1^*$, $y_2 - y_2^*$, escritos estos desarrollos en la forma (**) de 2.4.1. Sean

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min\{(\beta_i^1 + c e_i^1) / n_1 / (\beta_i^1 + c e_i^1) \geq \tilde{\gamma} n_1, 1 \leq i \leq g_1, 0 \leq c \leq l_i^1\} \\ \alpha_2 &= \min\{(\beta_i^2 + c e_i^2) / n_2 / (\beta_i^2 + c e_i^2) \geq \tilde{\gamma} n_2, 1 \leq i \leq g_2, 0 \leq c \leq l_i^2\} \end{aligned}$$

se tiene entonces

$$y_k - y_k^* = a^k x^k + \dots \text{ (términos de o. sup.)}; \quad k = 1, 2$$

donde no necesariamente a^k es diferente de cero.

Se verifica que:

$$\tilde{\gamma}^0 = (n_1 \alpha_1, n_2 \alpha_2)$$

La comprobación es inmediata utilizando de nuevo la expresión de $\tilde{\gamma}^0$ dada en 2.2.10 ó 2.2.3 y los comentarios anteriores.

2.4.10 Notaciones. - Sea ahora \mathcal{O} el anillo local de una curva algebroide, plana y reducida C con d ramas de ecuación $f = f_1 f_2 \dots f_d$.

De la misma forma que en 2.4.1 denotamos el desarrollo de Puiseux de la rama i -ésima f_i como

$$(*) \quad y_i = \sum_{j > 0} a_j^i x^{j/n_i}$$

$$(**) \quad y_i = \sum_{j=0}^{l_1^i} a_{1j}^i x^{(\beta_{1j}^i + j e_1^i)/n_i} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} a_{g_{ij}}^i x^{(\beta_{g_{ij}}^i + j)/n_i}$$

donde n_i es la multiplicidad de la rama f_i .

Sea n el mínimo común múltiplo de las multiplicidades n_1, n_2, \dots, n_d . En el cuerpo $k((x^{1/n}))$ tiene sentido considerar todos los desarrollos de Puiseux de las ramas f_1, \dots, f_d . En este cuerpo consideramos dos valoraciones equivalentes v y \tilde{v} , ambas con anillo de valoración $k[[x^{1/n}]]$ y normalizadas respectivamente por las condiciones $v(x) = n$, $\tilde{v}(x) = 1$. El semigrupo de valores de v es \mathbb{Z} y el de \tilde{v} es $(1/n) \cdot \mathbb{Z}$ y además $v(z) = n\tilde{v}(z)$ para todo z de $k((x^{1/n}))$.

Conservando las notaciones de 2.4.2 sean $i, j \in I = \{1, 2, \dots, d\}$ y $\tilde{\gamma}_{ij}$, γ_{ij} dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{ij} &= \max\{\tilde{v}(y_i^n - y_j^m) / 1 \leq n \leq n_i, 1 \leq m \leq n_j\} \\ &= \frac{1}{n} \max\{v(y_i^n - y_j^m) / 1 \leq n \leq n_i, 1 \leq m \leq n_j\} = \frac{1}{n} \gamma_{ij} \end{aligned}$$

2.4.11 Definición.- Llamaremos exponente de contacto de f_1, f_2, \dots, f_d al número

$$\tilde{\gamma} = \min_{1 \leq i < j \leq d} \{\tilde{\gamma}_{ij}\} = \frac{1}{n} \min_{1 \leq i < j \leq d} \{\gamma_{ij}\} = \frac{1}{n} \gamma$$

2.4.12 Nota.- El entero positivo γ coincide con el definido por O. Zariski en [81] § 2. (3). Como se pone de manifiesto en [81] § 6

se puede utilizar $\tilde{\gamma}$ ó γ en la mayoría de los desarrollos modifican-
do adecuadamente los invariantes, por ejemplo utilizando los "expo-
nentes característicos modificados" $\{\hat{\beta}_0^i, \dots, \hat{\beta}_{g_i}^i\}$ definidos por
 $\hat{\beta}_n^i = (n/n_i)\beta_n^i$ en lugar de los exponentes característicos habituales.

Indicaremos también la conveniencia de comparar las defini-
ciones anteriores con las de [60].

Finalmente consideramos la "relación de saturación", R ,
definida por Zariski ([81] § 6(40)), sobre el conjunto $I = \{1, 2, \dots, d\}$
dada por

$$iR_j \iff \gamma_{ij} > \gamma \iff \tilde{\gamma}_{ij} > \tilde{\gamma}.$$

2.4.13 Proposición. - Sea C una curva reducida con d ramas, $\tilde{\gamma}$
su exponente de contacto y $\tilde{\gamma}^0 \in \tilde{S}$ (v. 2.1.6) entonces

$$\tilde{\gamma} = \min_{1 \leq i \leq d} \{ \tilde{\gamma}_i^0 / n_i \}$$

Demostración:

Denotaremos por $\tilde{\gamma}_{ij}^0 \in \mathbb{Z}_+^2$ el elemento definido en 2.1.6
para el anillo local de las ramas f_i, f_j , ó equivalentemente (2.2.9)
para el semigrupo $\tilde{S}_{\{i,j\}}$ (ver también 2.2.11). Por 2.4.9 se tiene

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \min_{i,j} \left\{ \frac{\text{pr}_i(\tilde{\gamma}_{ij}^0)}{n_i}, \frac{\text{pr}_j(\tilde{\gamma}_{ij}^0)}{n_j} \right\}.$$

$$\text{Supongamos para fijar ideas } \min \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i} \right\} = \frac{\tilde{\gamma}_1^0}{n_1}.$$

$$\text{Se tiene que } iR_{\tilde{\gamma}_1^0} j \implies \tilde{\gamma}_{ij} > \tilde{\gamma}$$

pues si es $iR_{\tilde{\gamma}_1^0} j$, entonces $\tilde{\gamma}_{ij} > \text{pr}_{\{i,j\}}(\tilde{\gamma}_1^0)$ (2.2.11) y además

$pr_{\{i,j\}}(\tilde{\gamma}^0) = (\tilde{\gamma}_i^0, \tilde{\gamma}_j^0) \in pr_{\{i,j\}}(L)$, es decir $\tilde{\gamma}_i^0 \cdot n_j = \tilde{\gamma}_j^0 \cdot n_i$. Por

lo tanto

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \min \left\{ \frac{pr_i(\tilde{\gamma}_{ij}^0)}{n_i}, \frac{pr_j(\tilde{\gamma}_{ij}^0)}{n_j} \right\} > \frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i} \geq \min \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_k^0}{n_k} \right\}$$

Por otra parte, existe $k \in I$ de manera que $k \not\sim_{\tilde{\gamma}^0} 1$ y por lo tanto $\tilde{\gamma}_{1k}^0 = pr_{\{1,k\}}(\tilde{\gamma}^0)$, como consecuencia

$$\tilde{\gamma} \leq \tilde{\gamma}_{1k} = \min \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_1^0}{n_1}, \frac{\tilde{\gamma}_k^0}{n_k} \right\} = \frac{\tilde{\gamma}_1^0}{n_1} \quad (*)$$

y tenemos, uniéndolo a la desigualdad anterior

$$iR_{\tilde{\gamma}^0} j \implies \tilde{\gamma}_{ij} > \tilde{\gamma}$$

Sean $i, j \in I$ tales que $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{ij}$, entonces es necesariamente $i \not\sim_{\tilde{\gamma}^0} j$ y por lo tanto se tiene $\tilde{\gamma}_{ij}^0 = pr_{\{i,j\}}(\tilde{\gamma}^0)$, entonces

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{ij} = \min \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i}, \frac{\tilde{\gamma}_j^0}{n_j} \right\} \geq \frac{\tilde{\gamma}_1^0}{n_1}$$

Esto unido a la desigualdad (*) nos dice ya que

$$\tilde{\gamma} = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i} \right\}$$

2.4.14 Nota

a) En la demostración anterior hemos visto que la relación de equivalencia $R_{\tilde{\gamma}^0}$ es más fina que la relación de saturación R , más tarde veremos que en general es estrictamente más fina. También estudiaremos algunas condiciones bajo las cuales ambas coinciden.

b) Sea $i_0 \in I$ un índice fijo y supongamos para simplificar que $\min \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i} \right\} = \frac{\tilde{\gamma}_1^0}{n_1}$. Si se tiene $\frac{\tilde{\gamma}_{i_0}^0}{n_{i_0}} = \frac{\tilde{\gamma}_1^0}{n_1}$, un razona

miento similar al empleado en la Proposición anterior nos permite asegurar que existe un índice $i \in I$ con la única condición $i \neq i_0$ de manera que $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{i_0 i}$. Si es $\tilde{\gamma}_{i_0}^0 / n_{i_0} > \tilde{\gamma}_1^0 / n_1$ claramente se tiene $\tilde{\gamma}_{i_0}^0$ y como antes tendremos $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{i_0 i}$. Así pues podemos concluir que $\tilde{\gamma} = \min \{ \tilde{\gamma}_{i_0 j} / j \in I, j \neq i_0 \}$

Es decir, para el cálculo de $\tilde{\gamma}$ basta fijar uno cualquiera de los desarrollos de Puiseux en una de las ramas y comparar los del resto con él, así pues

$$\tilde{\gamma} = \min \left(\max_{i \neq i_0} \left(\tilde{\gamma}(y_{i_0} - y_i^{k_i}) \right) \right)$$

2.4.15 Nota. - Hemos visto en 2.4.7 que el par de números naturales $|\tilde{\gamma}_{i_j}|$ es precisamente $(f_i | f_j)$, es claro entonces que podemos calcular

$$(f_1 | f_2 | \dots | f_d) = \min \{ |\tilde{\gamma}_{i_j}| / 1 \leq i < j \leq d \}$$

Puesto que conocemos los pares de contacto $(f_i | f_j)$ podemos también determinar $R_{\tilde{\gamma}_0}$ (1.2.8) y calcular entonces el árbol de exponentes característicos, \tilde{D} ó el árbol de contactos principales, D , usando para ello los desarrollos de Puiseux.

Los resultados que siguen son una nueva profundización en estos hechos, dando métodos más simples de cálculo.

Sea q el entero definido por

$$\tilde{\gamma} > \min \{ \beta_q^i / n_i ; i = 1, \dots, d \}$$

$$\tilde{\gamma} \leq \min \{ \beta_{q+1}^i / n_i ; i = 1, \dots, d \}$$

es claro que se tienen las mismas igualdades de 2.4.3 para todos los índices de I. Utilizando las mismas notaciones (2.4.3) tenemos:

2.4.16 Proposición.- Consideramos el conjunto

$$A = \left\{ \frac{\beta_q^i + c e_q^i}{n_i} ; 0 < c \leq \min\{l_q^i ; i \in I\} \right\}$$

Se tiene entonces una de las posibilidades siguientes:

i) $\tilde{\gamma} \in A$ y si $\tilde{\gamma} = (\beta_q^i + c e_q^i) / n_i$ entonces es $(f_1 | \dots | f_d) = (q, c)$

ii) $\tilde{\gamma} = \min\{\beta_{q+1}^i / n_i ; i \in I\}$ y entonces

$$(f_1 | \dots | f_d) = \begin{cases} (q+1, 0) & \text{si } \beta_{q+1}^i n_j = n_i \beta_{q+1}^j, \forall i, j \in I \\ (q, l_{q+1}^{i_0}) & \text{siendo } \beta_{q+1}^{i_0} = n_{i_0} \cdot \min\{\beta_{q+1}^i / n_i\} \\ \text{en caso contrario} & \end{cases}$$

La demostración es evidente después de todo lo anterior.

2.4.17 Nota.- De manera similar a 2.4.9, sea, para $i \in I$,

$$\alpha_i = \min\left\{ \frac{\beta_k^i + c e_k^i}{n_i} / \frac{\beta_k^i + c e_k^i}{n_i} \geq \tilde{\gamma} ; 1 \leq k \leq g_i, 0 \leq c \leq l_k^i \right\}$$

se tiene entonces

$$\tilde{\gamma}^0 = (n_1 \alpha_1, n_2 \alpha_2, \dots, n_d \alpha_d).$$

2.4.18 Corolario.- Conocidas las clases de equisingularidad de las ramas f_1, \dots, f_d son datos equivalentes $(f_1 | \dots | f_d), \tilde{\gamma}^0, \gamma^0, \tilde{\gamma}, \gamma$.

La conexión que existe entre las relaciones de equivalencia

R y R_{γ^0} viene dada por

2.4.19 Proposición.- Sean $i, j \in I$

a) $iR_{\gamma^0} j \iff \tilde{\gamma}_{ij} > \tilde{\gamma}_i^0/n_i$

b) $iR_j \iff \begin{cases} \min\{\tilde{\gamma}_i^0/n_i, \tilde{\gamma}_j^0/n_j\} > \min\{\tilde{\gamma}_k^0/n_k; k \in I\} \\ \text{ó} \\ \min\{\tilde{\gamma}_i^0/n_i, \tilde{\gamma}_j^0/n_j\} = \min\{\tilde{\gamma}_k^0/n_k; k \in I\} \text{ e } iR_{\gamma^0} j \end{cases}$

Demostración:

a) Puesto que $pr_{\{ij\}}(\tilde{\gamma}^0) \in \tilde{S}_{\{i,j\}}$ se tiene que

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \min\left\{\frac{pr_i(\tilde{\gamma}_{ij}^0)}{n_i}, \frac{pr_j(\tilde{\gamma}_{ij}^0)}{n_j}\right\} > \frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i} \iff$$

$$\iff \tilde{\gamma}_{ij}^0 > pr_{\{ij\}}(\tilde{\gamma}^0) \iff iR_{\gamma^0} j$$

b) Si se tiene $\min\{\frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i}, \frac{\tilde{\gamma}_j^0}{n_j}\} > \min\{\frac{\tilde{\gamma}_k^0}{n_k}; k \in I\}$ se tiene entonces

$$\tilde{\gamma}_{ij} \geq \min\left\{\frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i}, \frac{\tilde{\gamma}_j^0}{n_j}\right\} > \tilde{\gamma}$$

Por otra parte si se da la igualdad $\min\{\frac{\tilde{\gamma}_i^0}{n_i}, \frac{\tilde{\gamma}_j^0}{n_j}\} = \tilde{\gamma}$

es clara la equivalencia:

$$\tilde{\gamma}_{ij} > \tilde{\gamma} \iff \tilde{\gamma}_{ij}^0 > pr_{\{ij\}}(\tilde{\gamma}^0).$$

2.4.20 Nota.- Hay casos en que las dos relaciones de equivalencia coinciden. Por ejemplo si $\tilde{\gamma}^0 \in L$, es decir $\tilde{\gamma}_i^0 n_j = \tilde{\gamma}_j^0 n_i$

(ó $\gamma^0 \in L$) $\forall i, j \in I$ es claro que

$$iR_j \iff iR_{\gamma^0_j}$$

De hecho una condición suficiente para que ambas relaciones coincidan es que la igualdad $\tilde{\gamma}_i^0 n_j = \tilde{\gamma}_j^0 n_i$ se verifique en todos los índices excepto, a lo sumo, para uno.

En general R_{γ^0} es estrictamente más fina que R , por ejemplo si tenemos las curvas de desarrollo de Hamburger-Noether:

$$f_1 \begin{cases} y = xz_1 \\ x = z_1^2 \end{cases} \quad f_2 \begin{cases} y = xz_1 \\ x = z_1^3 \end{cases} \quad f_3: \{y = x^2\}$$

se tiene $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 1$. Los desarrollos de Puiseux son

$$f_1: \{y = x^{3/2}\}; f_2: \{y = x^{4/3}\}; f_3: \{y = x^2\}.$$

$$\tilde{\gamma}^0 = (3, 4, 2); \quad \tilde{\gamma}_{12} = 4/3; \quad \tilde{\gamma}_{13} = 3/2; \quad \tilde{\gamma}_{23} = 4/3$$

de donde $\tilde{\gamma} = 4/3$. Puesto que $\tilde{\gamma}_{13} > \tilde{\gamma}$ se tiene $1R_3$ y las clases de equivalencia para la relación de saturación de Zariski son $\{1, 3\}, \{2\}$

Por otra parte $\tilde{\gamma}_{12}^0 = (3, 4)$; $\tilde{\gamma}_{13}^0 = (3, 2)$; $\tilde{\gamma}_{2,3}^0 = (4, 2)$ con lo que las clases para R_{γ^0} son $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

2.4.21 Nota. - El árbol D se puede calcular directamente en términos de desarrollos de Puiseux, observemos por ejemplo que si $n \leq q-1$

$$y_n = \sum_{i=0}^{1} a_{1i} x^{(\beta_1^1 + i e_1^1) / n_1} + \dots + \sum_{i=0}^{1} a_{ni} x^{(\beta_n^1 + i e_n^1) / n_1}$$

define una curva de ecuación $f^{(n)}(X, Y) \in k[[X, Y]]$ y multiplicidad $n_1/e_n^1 = n_2/e_n^2 = \dots = n_d/e_n^d$, $f^{(n)}$ tiene además contacto maximal de

género n con todas las ramas de la curva, es decir:

$$\underline{v}(f^{(n)}) = ((f^{(n)}, f_1), \dots, (f^{(n)}, f_d)) = (\bar{\beta}_{n+1}^1, \dots, \bar{\beta}_{n+1}^d)$$

Por otra parte el desarrollo de Puiseux

$$y_0 = \sum_{i=0}^{1_1} a_{1i} x^{(\beta_1^1 + i e_1^1)/n_1} + \dots + \sum_{i=0}^{c-1} a_{qi} x^{(\beta_q^1 + i e_q^1)/n_1} + \lambda x^{(\beta_q^1 + c e_q^1)/n_1}$$

donde $(q, c) = (f_1 | \dots | f_d)$ y $\lambda \in k$ suficientemente general, define una curva irreducible $h \in k[[X, Y]]$ de multiplicidad $n_1/e_q^1 = \dots = n_d/e_q^d$ y género q que verifica $\underline{v}(h) = \gamma^0$.

Si observamos 1.2.3 y 1.2.4 es claro que las curvas aquí definidas son equivalentes a las definidas allí mediante desarrollos de $H - N$.

2.4.22 Nota. - Las relaciones analizadas en este epígrafe entre los invariantes del árbol \tilde{D} y los desarrollos de Puiseux se pueden hacer de una forma más general utilizando básicamente la monomialidad del anillo saturado $\tilde{\mathcal{O}}$ (véase [28]). Este análisis permite además sacar importantes consecuencias mediante el uso de los anillos saturados, se puede ver todo esto en [66].

CAPITULO III: EL SEMIGRUPO DE VALORES



CAPITULO III

EL SEMIGRUPO DE VALORES

3.1 GENERACION DE UN SEMIGRUPO A PARTIR DE SUS PROYECCIONES

3.1,0 Introducción.— Suponemos $d \geq 2$ y \mathbb{Z}_+^d ordenado por la relación de orden producto (1.0.2) y denotaremos por $S \subset \mathbb{Z}_+^d$ un sub-semigrupo aditivo de \mathbb{Z}_+^d verificando las propiedades siguientes:

P1) $\underline{0} \in S$ y existe $\min(S - \{\underline{0}\}) \in S$.

P2) Dados $\alpha, \beta \in S$ entonces

$$\inf(\alpha, \beta) = (\min(\alpha_1, \beta_1), \dots, \min(\alpha_d, \beta_d)) \in S$$

P3) S posee conductor, es decir existe $\delta \in S$ tal que si

$\gamma \in \mathbb{Z}_+^d$, $\gamma \geq \delta$ entonces $\gamma \in S$ y δ es mínimo con esta propiedad.

P4) Dados $\alpha, \beta \in S$ tales que $\exists i_0 \in I = \{1, \dots, d\}$ con

$\alpha_{i_0} = \beta_{i_0}$ entonces existe $\gamma \in S$ verificando

$$\gamma_k \geq \min\{\alpha_k, \beta_k\} \quad \forall k \in I, \quad \gamma_r = \min\{\alpha_r, \beta_r\} \quad \text{si } \alpha_r \neq \beta_r$$

$$\text{y } \gamma_{i_0} > \alpha_{i_0} = \beta_{i_0}.$$

Nuestro propósito en este epígrafe es estudiar la forma en que el semigrupo S se puede determinar a partir de sus proyecciones. Veremos también que este tipo de semigrupos engloban como caso particular los semigrupos de valores de curvas no necesariamente planas (véase 1.0).

Algunas de las notaciones y definiciones de este epígrafe no se utilizarán hasta el epígrafe siguiente, a pesar de ello nos ha parecido más coherente incluirlas aquí.

3.1.1 Notaciones.— Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $J \subset I$.

$J = \{i_1, \dots, i_n\}$ y $k \in I - J$. Consideremos los conjuntos

$$\bar{\Delta}_J(\alpha) = \bar{\Delta}_{i_1, \dots, i_n}(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{Z}_+^d / \beta_i = \alpha_i \quad \forall i \in J, \beta_r > \alpha_r \quad \forall r \notin J\}$$

$$\bar{\Delta}_J^k(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{Z}_+^d / \beta_i = \alpha_i \quad \forall i \in J; \beta_s \geq \alpha_s \quad \forall s \notin J, s \leq k; \beta_r > \alpha_r, \forall r > k, r \notin J\}$$

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \bigcup_{i=1}^d \bar{\Delta}_i(\alpha). \quad \Delta_J(\alpha) = \bar{\Delta}_J(\alpha) \cap S, \quad \Delta_J^k(\alpha) = \bar{\Delta}_J^k(\alpha) \cap S, \quad \Delta(\alpha) = \bar{\Delta}(\alpha) \cap S$$

Si pr_J es la proyección sobre los índices J de \mathbb{Z}_+^d en $\mathbb{Z}_+^{\#J}$

usaremos también las siguientes notaciones

$$S_{i_1 \dots i_n} = S_J := pr_J(S) = \{pr_J(\alpha) / \alpha \in S\}$$

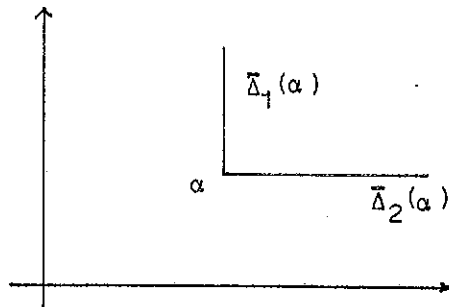
$$S_{i_1 \dots i_n}^J = S^J := pr_{(I-J)}(S)$$

3.1.2 Definición.— Sea $\alpha \in S$, diremos que α es un maximal de S si $\Delta(\alpha) = \emptyset$.

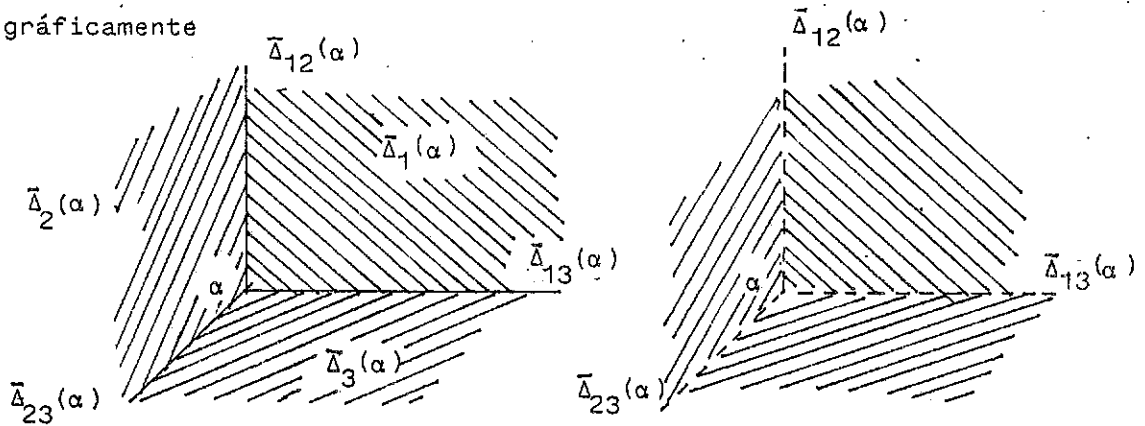
Si se tiene además que $\forall J \subsetneq I, \Delta_J(\alpha) = \emptyset$ diremos que α es un maximal absoluto.

Si α es maximal y se tiene $\Delta_J(\alpha) \neq \emptyset$ para todo $J \subset I, J \neq I$ con $\#J \geq 2$ diremos que α es un maximal relativo de S .

3.1.3 Nota.- Si tenemos $d = 2$ es lo mismo α maximal, maximal absoluto y maximal relativo, además los maximales de S son los puntos del semigrupo para los cuales no hay puntos a la "derecha" ni "encima".



En $d = 3$, se puede ver sin dificultad que los únicos maximales de S son los maximales absolutos y los maximales relativos, gráficamente



En las zonas rayadas, $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Delta}_3$ no hay puntos del semigrupo. La línea de puntos en $\bar{\Delta}_{12}, \bar{\Delta}_{13}, \bar{\Delta}_{23}$ quiere decir que necesariamente hay puntos de S en esa región mientras la línea continua señala $\Delta_{ij} = \emptyset$.

3.1.4 Lema.- Sea $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ y supongamos que $\beta \notin S$, entonces existe un índice $i \in I$ de manera que $\Delta_i^d(\beta) = \emptyset$.

Demostración.- Supongamos que para todo índice $k \in I$ existe $\beta^k \in \Delta_k^d(\beta)$, por la definición de $\Delta_k^d(\beta)$ se tiene

$$\beta^k = \beta_k ; \beta_i^k \geq \beta_i \quad \forall i \in I$$

y entonces $\beta = \inf\{\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^d\} \in S$ (por P2), 3.1.0) que es absurdo.

3.1.5 Lema.- Sea $\alpha \in Z_+^d$ verificando las dos condiciones siguientes: 1) $\exists i \in I$ tal que $\Delta_i(\alpha) = \emptyset$.

$$2) \forall j \in I, j \neq i \text{ es } \Delta_{ij}(\alpha) \neq \emptyset.$$

En estas condiciones $\alpha \in S$ y α es un maximal relativo de S .

Demostración:

Por hipótesis existe $\alpha^j \in \Delta_{ij}(\alpha)$, $\forall j \in I, j \neq i$; puesto que $pr_k(\alpha^j) = \alpha_k^j > \alpha_k = pr_k(\alpha)$, $\forall k \in I - \{i, j\}$ se tiene que

$$\alpha = \inf\{\alpha^j / j \neq i\} \in S \quad (P2)$$

Supongamos que existe $k \in I$ y $\gamma \in \Delta_k(\alpha)$. Necesariamente es $k \neq i$ por 1) y existe $\alpha^k \in \Delta_{i,k}(\alpha)$. Puesto que $pr_k(\alpha^k) = pr_k(\gamma) = \alpha_k$, aplicando P4, existe $\beta \in S$ con las condiciones siguientes:

- $\beta_k > \alpha_k = \gamma_k$
- $\beta_i = \alpha_i$; pues $\gamma_i > \alpha_i \implies \beta_i = \min\{\alpha_i^k, \gamma_i\} = \alpha_i$
- $\beta_j \geq \min\{\gamma_j, \alpha_j^k\} > \alpha_j \quad \forall j \in I, j \neq i, k.$

Es decir $\beta \in \Delta_i(\alpha)$ lo que contradice i) y por tanto debe ser $\Delta_k(\alpha) = \emptyset$ $\forall k \in I$ y α es maximal.

Sean $k, l \in I - \{i\}$, consideramos $\alpha^k \in \Delta_{i,k}(\alpha), \alpha^l \in \Delta_{i,l}(\alpha)$.

Puesto que $\alpha_i^k = \alpha_i^l = \alpha_i$ aplicando P4) a α^k y α^l obtenemos $\beta \in S$ de

manera que

- $\beta_k = \alpha_k, \beta_1 = \alpha_1$
- $\beta_j > \alpha_j, \forall j \in I - \{k, 1\}$

es decir $\beta \in \Delta_{k,1}(\alpha)$ y por tanto $\Delta_{k,1}(\alpha) \neq \emptyset$. Tenemos ya demostrado que $\forall J \subset I$ con $\#J = 2$ es $\Delta_J(\alpha) \neq \emptyset$.

Sea $J \subset I$ con $\#J \geq 2, J \neq I$; podemos escribir $J = J_1 \cup \dots \cup J_t$ donde $\#J_i = 2, i = 1, 2, \dots, t$ y consideramos $\gamma^i \in \Delta_{J_i}(\alpha), 1 \leq i \leq t$. Es inmediato entonces que:

$$\gamma = \inf\{\gamma^1, \dots, \gamma^t\} \in \Delta_J(\alpha)$$

y por lo tanto α es maximal relativo.

3.1.6 Nota.- Si α es un maximal relativo de S , se prueba sin dificultad, utilizando P2 y P3 que $\alpha \leq \delta$ siendo δ el conductor de S . Como consecuencia de este hecho el conjunto de maximales relativos, MR, del semigrupo S es finito.

3.1.7 Teorema.- Sea $MR = \{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ el conjunto de maximales relativos de S . Sea $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ verificando que para cada $J \subset I$ con $\#J = d-1, pr_J(\beta) \in S_J$. Entonces se verifica que $\beta \in S$ si y sóloamente si $\beta \notin \bar{\Delta}(\alpha^i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración: La condición necesaria es evidente. Para demostrar la suficiente sea $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ en las hipótesis del teorema y supongamos que $\beta \notin S$.

Por el Lema 3.1.4 existe $i \in I$ de manera que $\Delta_i^d(\alpha) = \emptyset$. Supongamos para simplificar $i=1$ y consideremos $\beta_0 = (\beta_1, \dots, \beta_{d-1}, 0) \in \mathbb{Z}_+^d$.

El conjunto $\Delta_1^d(\beta_0)$ es no vacío, pues $(\beta_1, \dots, \beta_{d-1}) \in S^d$ y existe entonces $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(\beta_1, \dots, \beta_{d-1}, n) \in S$. Si $\alpha \in \Delta_1^d(\beta_0)$ necesariamente $\text{pr}_d(\alpha) = \alpha_d < \beta_d$, pues si $\alpha_d \geq \beta_d$ entonces $\alpha \in \Delta_1^d(\beta) = \emptyset$.

Sea $\tilde{\beta}_d = \sup\{\text{pr}_d(\alpha) / \alpha \in \Delta_1^d(\beta_0)\} < \beta_d$ y $\gamma^d \in \Delta_1^d(\beta_0)$ con $\text{pr}_d(\gamma^d) = \tilde{\beta}_d$.

Denotamos por $\beta^d = (\beta_1, \dots, \beta_{d-1}, \tilde{\beta}_d) \in \mathbb{Z}_+^d$. Por la construcción de $\tilde{\beta}_d$ se tiene necesariamente que $\Delta_1^{d-1}(\beta^d) = \emptyset$.

Supongamos contruidos $\tilde{\beta}_{i+1}, \dots, \tilde{\beta}_d \in \mathbb{Z}_+$ y los puntos $\gamma^d, \gamma^{d-1}, \dots, \gamma^{i+1} \in S$ tales que si $\beta^{i+1} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \tilde{\beta}_{i+1}, \dots, \tilde{\beta}_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ se tiene:

- i) $\tilde{\beta}_k < \beta_k$ y $\gamma^k \in \Delta_{1,k}^i(\beta^{i+1})$; $k = i+1, \dots, d$.
- ii) $\Delta_1^i(\beta^{i+1}) = \emptyset$.

Consideramos $\beta_0^{i+1} = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, 0, \tilde{\beta}_{i+1}, \dots, \tilde{\beta}_d) \in \mathbb{Z}_+^d$. El conjunto $\Delta_1^i(\beta_0^{i+1})$ es no vacío, pues el punto $(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_d) \in S^i$ y existe entonces $n \in \mathbb{Z}_+$ de manera que $(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, n, \beta_{i+1}, \dots, \beta_d) \in \Delta_1^i(\beta_0^{i+1})$. Además si $\alpha \in \Delta_1^i(\beta_0^{i+1})$ y tenemos $\alpha_i \geq \beta_i$ entonces es $\alpha \in \Delta_1^i(\beta^{i+1}) = \emptyset$; por lo tanto debe ser $\alpha_i < \beta_i$.

Sea $\tilde{\beta}_i = \sup\{\text{pr}_i(\alpha) / \alpha \in \Delta_1^i(\beta_0^{i+1})\} < \beta_i$ y $\gamma^i \in \Delta_1^i(\beta_0^{i+1})$ con $\text{pr}_i(\gamma^i) = \tilde{\beta}_i$.

Consideramos entonces $\beta^i = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \tilde{\beta}_i, \dots, \tilde{\beta}_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ y se tiene:

- $\tilde{\beta}_k < \beta_k$, $\forall k = i, \dots, d$.
- Si $k = i+1, \dots, d$; $\gamma^k \in \Delta_{1,k}^i(\beta^{i+1})$ y puesto que

$pr_i(\gamma^k) \geq pr_i(\beta^{i+1}) = \beta_i > \tilde{\beta}_i$ se tendrá que $\gamma^k \in \Delta_{1,k}^{i-1}(\beta^i)$.

Además la construcción de γ^i nos dice que $\gamma^i \in \Delta_{1,i}^{i-1}(\beta^i)$.

- $\Delta_1^{i-1}(\beta^i) = \emptyset$ por la construcción de $\tilde{\beta}_i$.

En vista de que la construcción anterior es inductiva, es claro que podemos continuar el proceso hasta construir:

$\tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_d \in \mathbb{Z}_+$ y $\gamma^2, \dots, \gamma^d \in S$ de manera que, si $\tilde{\beta} = (\beta_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_d)$, se tiene:

- $\tilde{\beta}_i < \beta_i ; i = 2, \dots, d$

- $\gamma^i \in \Delta_{1,i}(\tilde{\beta}) ; i = 2, \dots, d$

- $\Delta_1(\tilde{\beta}) = \emptyset$.

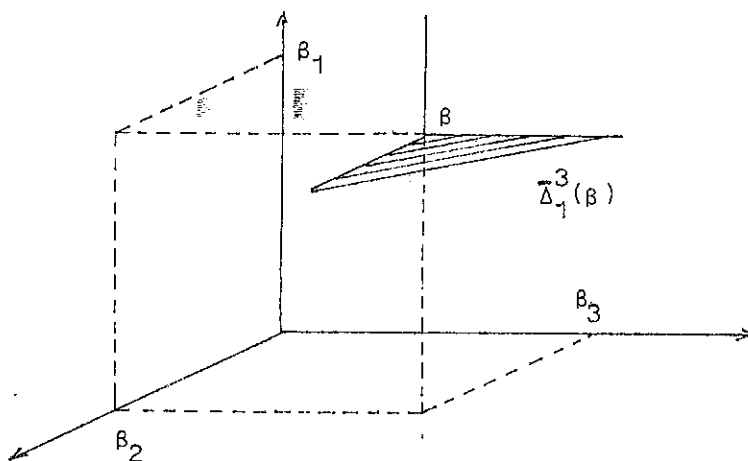
Las dos últimas propiedades nos dicen (por el Lema 3.1.5) que $\tilde{\beta}$ es un maximal relativo de S . La primera nos permite afirmar que $\beta \in \bar{\Delta}_1(\tilde{\beta})$ y esto finaliza la prueba del Teorema.

3.1.8 Nota.- 1) La demostración del Teorema nos dice, precisando un poco más, que si $pr_j(\beta) \in S_j$ y se tiene $\Delta_1^d(\beta) = \emptyset$ existe un maximal relativo $\tilde{\beta} \in S$ de manera que $\beta \in \bar{\Delta}_1(\tilde{\beta})$. Utilizaremos frecuentemente el Teorema anterior en esta forma en posteriores resultados.

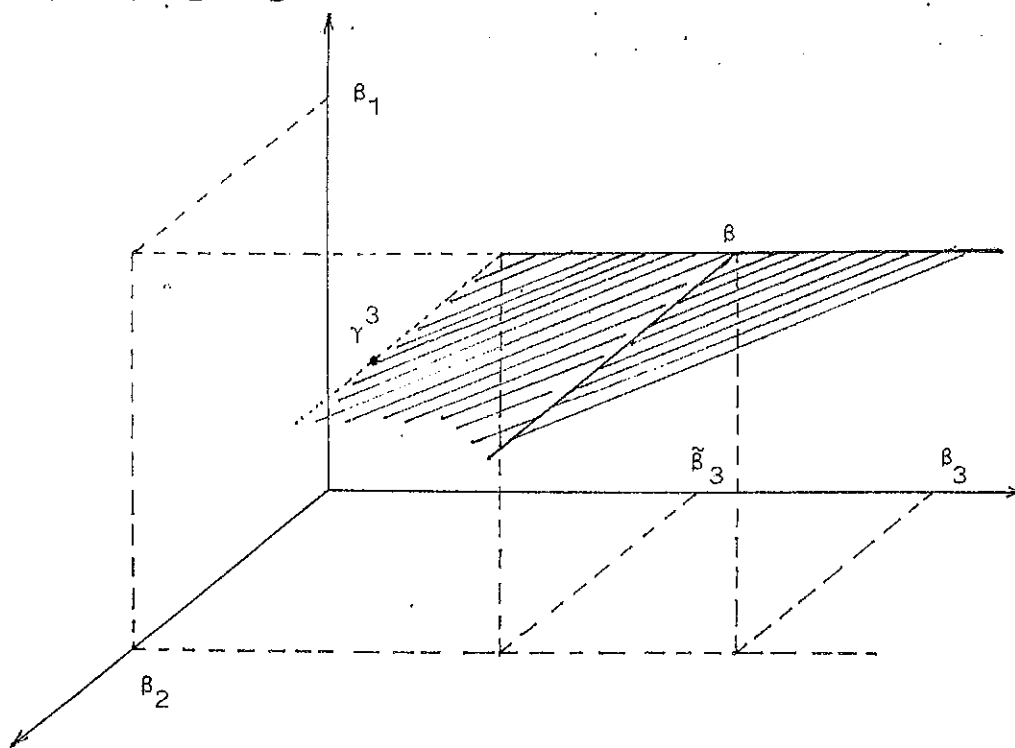
2) En la demostración del Teorema, hemos comenzado la búsqueda del maximal relativo $\tilde{\beta}$ modificando las coordenadas en orden inverso. Claramente se puede alterar el orden en que modificamos las coordenadas $\{2, \dots, d\}$ sin que la demostración se altere. Es necesario sin embargo indicar que el maximal relativo que resulta no es el mismo en general, puede ocurrir que para cada orden obtengamos uno diferente.

3.1.9 Nota.- La prueba del Teorema se visualiza con facilidad en \mathbb{Z}_+^3 olvidándonos de la notación que hemos utilizado.

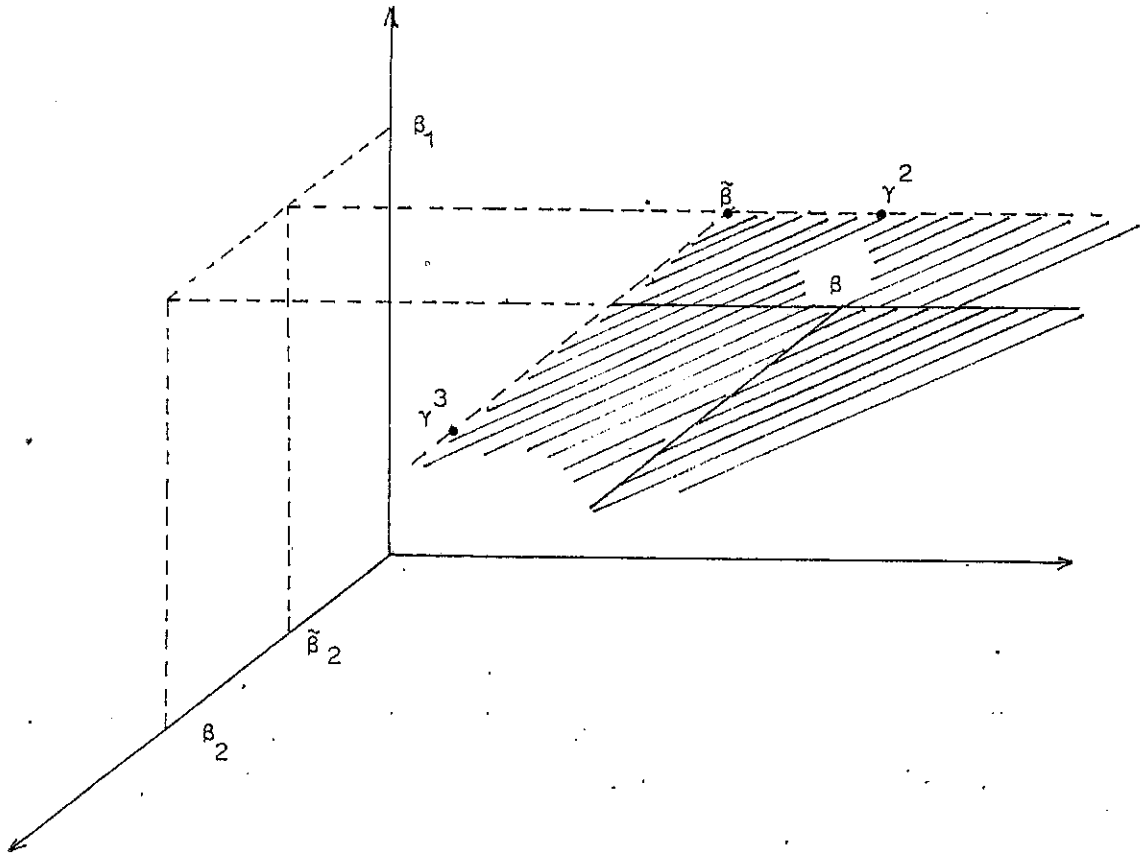
El Lema 3.1.4 nos dice que si $\beta \notin S$ existe $i \in I$ tal que $\Delta_1^d(\beta) = \emptyset$. El conjunto $\Delta_1^3(\beta)$ es la intersección de S con el cuadrante cerrado en β de coordenada i -ésima β_i :



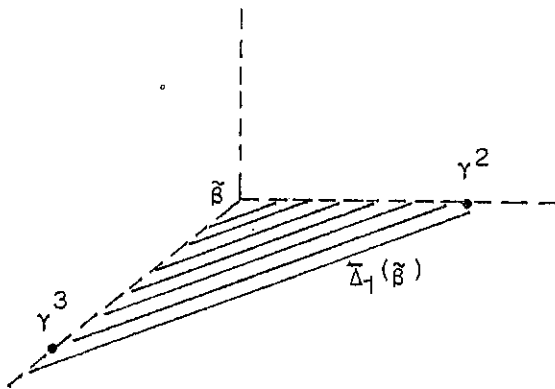
En una primera etapa deslizamos el cuadrante $\Delta_1^3(\beta)$ por el eje $x_1 = \beta_1$, $x_2 = \beta_2$ hasta encontrarnos con algún punto del semigrupo:



Después deslizamos el nuevo cuadrante, "abierto" ya por uno de los ejes, a lo largo del eje $x_1 = \beta_1$, $x_3 = \tilde{\beta}_3$ hasta encontrar de nuevo puntos del semigrupo:



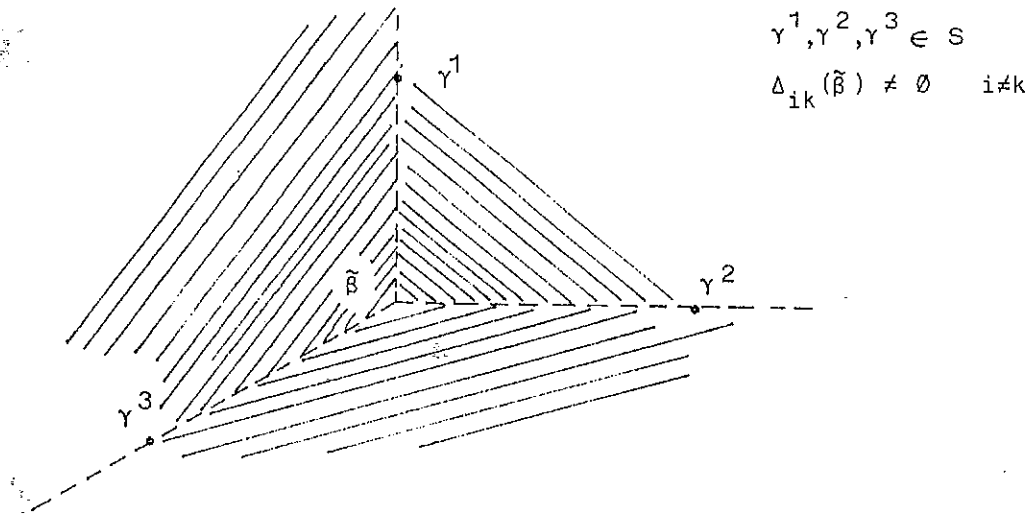
El lema 3.1.5 nos asegura que en una configuración del tipo :



con: $\gamma^2, \gamma^3 \in S$
 $\Delta_1(\tilde{\beta}) = \emptyset$

necesariamente $\tilde{\beta}$ es maximal relativo, (pues $\tilde{\beta} = \inf(\gamma^2, \gamma^3) \in S$, "pivotando" en γ^2 vemos que $\Delta_2(\tilde{\beta}) = \emptyset$ y haciendo lo mismo con γ^3 vemos que $\Delta_3(\tilde{\beta}) = \emptyset$. Aplicando P4) a γ^2 y γ^3 vemos que existe γ^1 en

$\Delta_{23}(\tilde{\beta})$). Es decir, realmente la configuración es:



$$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3 \in S$$

$$\Delta_{ik}(\tilde{\beta}) \neq \emptyset \quad i \neq k$$

3.1.10 Nota.- Se puede comprobar sin dificultades que si S es un semigrupo de \mathbb{Z}_+^d verificando P1) a P4) y $J \subset I$, el semigrupo proyección S_J sobre el conjunto de índices J verifica también las propiedades P1) a P4).

Esto nos permite asegurar que, si conocemos los máximos relativos de S y los de todas sus proyecciones podemos determinar el semigrupo S a partir de sus componentes S_1, \dots, S_d inductivamente.

Para $d = 2$ el teorema es conocido (véase [34]) ya que en el resultado que obtiene García no influye para nada que el semigrupo sea de una curva plana, sólo se utilizan las propiedades P1) a P4) descritas al comienzo del capítulo.

3.1.11 Proposición.- Sea C una curva algebroide reducida (no necesariamente plana) con d ramas y $S(C)$ su semigrupo de valores (v.1.0), $S(C)$ verifica las propiedades P1) a P4) descritas en 3.1.0.

Demostración:

P-1) Si $\lambda \in k$, es claro que $\underline{v}(\lambda) = \underline{0}$ y por ser el anillo \mathcal{O} de la curva C local, (usando P2), se tiene que $\min(S - \{0\})$ existe.

P-2) Si tenemos $\alpha = \underline{v}(x)$, $\beta = \underline{v}(y)$ con $x, y \in D(\mathcal{O})$, es conocido que para $\lambda \in k$ genérico se tiene que $v_i(x+\lambda y) = \min\{v_i(x), v_i(y)\}$, de donde $\underline{v}(x+\lambda y) = \inf\{\underline{v}(x), \underline{v}(y)\} \in S$.

P-3) La extensión de anillos $\mathcal{O} \subset k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]] = A$ tiene conductor no nulo, si $\mathfrak{p}(A/\mathcal{O}) = (t_1^{\delta_1}, \dots, t_d^{\delta_d})$ se tiene que $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in S$ es el conductor de S .

P-4) Si $\alpha = \underline{v}(x)$, $\beta = \underline{v}(y)$ verifican $v_i(x) = v_i(y)$; entonces, puesto que $x_i, y_i \in k[[t_i]]$ y v_i viene dada por el orden, existe $\lambda \in k$ tal que $v_i(x_i + \lambda y_i) > v_i(x_i) = v_i(y_i)$.

El elemento $\gamma = \underline{v}(x+\lambda y)$ verifica entonces que

$\gamma_k = v_k(x_k + \lambda y_k) \geq \min\{v_k(x), v_k(y)\} = \min\{\alpha_k, \beta_k\} \quad \forall k \in I$ y puesto que $\gamma_i > \alpha_i = \beta_i$ y $\gamma_k = \min\{\alpha_k, \beta_k\}$ si $\alpha_k \neq \beta_k$, γ prueba la propiedad P-4) para α y β .

3.1.12 Nota.- El Teorema 3.1.7 engloba entonces como caso particular el caso de semigrupos de valores de curvas reducidas no necesariamente planas. Cuando la curva en cuestión es además plana veremos más adelante que se pueden añadir bastantes propiedades más.

3.2 LA SIMETRIA DE LOS MAXIMALES

3.2.0 Introducción y notaciones.— En este epígrafe retornaremos a la situación descrita en 1.0, es decir S es el semigrupo de valores de la curva algebroide plana y reducida $C = \text{Spec}(\mathcal{O}) = \text{Spec}(k[[X, Y]] / (f))$, $f = \prod_{i=1}^d f_i$ es la descomposición en factores irreducibles de f en $k[[X, Y]]$, en particular f_i proporciona una ecuación para la rama i -ésima, C_i , de C . Utilizaremos también en este epígrafe el semigrupo completado de S que describiremos a continuación.

Si denotamos por $\bar{\mathbb{Z}}_+$ el conjunto $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, las valoraciones v_1, \dots, v_d asociadas a los anillos $\mathcal{O}_i = k[[X, Y]] / (f_i)$; $i = 1, \dots, d$ se pueden extender mediante $v_i(0) = \infty$. De esta manera podemos considerar $\underline{v}: \mathcal{O} \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}_+^d$ definido, como en 1.0, por $\underline{v}(x) = (v_1(x_1), \dots, v_d(x_d))$. (Nótese que $x \in \mathcal{O}$ es un divisor de cero si y sólo si existe $i \in I$ tal que $x_i = x + (f_i) = 0$, es decir si y sólo si $v_i(x) = \infty$).

Al conjunto $\underline{v}(\mathcal{O})$ le llamaremos semigrupo de valores completado de la curva C y lo denotaremos por $\bar{S}(C)$, $\bar{S}(\mathcal{O})$ ó simplemente \bar{S} si no da lugar a equívocos. (v. [19]). Es conocido ([19]) que \bar{S} y S son de hecho datos equivalentes, pues \bar{S} se puede obtener como el cierre de S en el espacio topológico producto $\bar{\mathbb{Z}}_+^d$ y evidentemente $S = \bar{S} \cap \mathbb{Z}_+^d$. Como consecuencia \bar{S} es también un dato equivalente a la clase de equisingularidad de la curva C .

3.2.1 Definición.— Llamaremos base de Apery de S con respecto a un elemento $\gamma \in S$ al conjunto:

$$A_\gamma(S) = \{\alpha \in S \mid \alpha - \gamma \notin S\}.$$

3.2.2 Nota.- Si C es irreducible, se denomina base de Apery al conjunto $A_\gamma(S)$ ordenado en orden creciente. Si $A_\gamma(S) = \{a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_r\}$, se tiene necesariamente $r = \gamma - 1$, es decir $\#A_\gamma(S) = \gamma$, y también $a_{\gamma-1} = c + \gamma - 1$ siendo c el conductor del semigrupo S . ([7]). El anillo estructural, \mathcal{O} , de C , por ser plana, es un anillo de Gorenstein ([36], [43]) y es conocida entonces la siguiente propiedad de simetría (v. [43]).

$$\text{Si } \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \mid \alpha + \beta = c - 1 \text{ entonces } \alpha \in S \iff \beta \notin S.$$

De este hecho se desprende que si $\alpha \in S$ entonces

$$\alpha \in A_\gamma(S) \iff (c + \gamma - 1) - \alpha \in S \text{ (pues si } \alpha' = (c + \gamma - 1) - \alpha \text{ entonces } \alpha + \alpha' - \gamma = c - 1 \text{ y se tiene } \alpha - \gamma \notin S \iff \alpha' \in S) \text{ y podemos calcular } A_\gamma(S) \text{ como los elementos } \alpha, \alpha' \in S \text{ tales que } \alpha + \alpha' = c + \gamma - 1.$$

Supondremos en lo sucesivo que $d \geq 2$.

3.2.3 Definición.- Llamaremos nudo de Apery de S con respecto a γ , ó simplemente nudo de $A_\gamma(S)$, a un elemento $\alpha \in S$ tal que $\Delta(\alpha) \subset A_\gamma(S)$.

Si α es un nudo de $A_\gamma(S)$, diremos que α es un vértice de $A_\gamma(S)$ si $\alpha \notin A_\gamma(S)$, es decir si $\alpha - \gamma \in S$.

3.2.4 Lema.- α es un vértice de $A_\gamma(S)$ si y sólo si $\alpha - \gamma$ es un maximal de S .

Demostración: Puesto que se tiene la equivalencia

$$\beta \in \Delta(\alpha - \gamma) \iff \beta + \gamma \in \Delta(\alpha)$$

tenemos:

α vértice $\iff \alpha - \gamma \in S$ y $\Delta(\alpha) \subset A_\gamma(S) \iff \Delta(\alpha - \gamma) = \emptyset$, $\alpha - \gamma \in S \iff$
 $\iff \alpha - \gamma$ maximal.

3.2.5 Nota.- a) El Lema anterior permita trasladar algunas de las propiedades de los puntos maximales a los nudos, más concretamente a los vértices. Así, diremos que α es un vértice relativo (resp. absoluto) si $\alpha - \gamma$ es un maximal relativo (resp. absoluto); se tiene de esta forma

α vértice absoluto $\iff \forall J \not\subseteq I \quad \Delta_J(\alpha) \subset A_\gamma(S)$ y $\alpha \notin A_\gamma(S)$

α vértice relativo $\iff \Delta(\alpha) \subset A_\gamma(S)$, $\forall J \not\subseteq I$ con $\#J \geq 2$
 $\Delta_J(\alpha) \not\subset A_\gamma(S)$ y $\alpha \notin A_\gamma(S)$.

b) Si denotamos por $N_\gamma(S)$ el conjunto de nudos de $A_\gamma(S)$, tenemos dentro de él dos subconjuntos destacados:

$$M(S) = \{\text{maximales de } S\} \subset N_\gamma(S)$$

$$V_\gamma(S) = \{\text{vértices de } A_\gamma(S)\} \subset N_\gamma(S).$$

Notemos que hay una biyección entre $M(S)$ y $V_\gamma(S)$ por el Lema 3.2.4, por tanto $\#V_\gamma(S) = \#M(S)$. Sin embargo puede ocurrir que $M(S) \cap V_\gamma(S) \neq \emptyset$.

3.2.6 Notaciones y definiciones

Sea $J \subset I$ y $\alpha \in S_J = \text{pr}_J(S)$, llamaremos fibra en S de α y la denotaremos por $F_S(\alpha)$ al conjunto

$$F_S(\alpha) = \{\beta \in S / \text{pr}_J(\beta) = \alpha\}$$

Denotaremos por $\alpha_\infty \in \bar{\mathbb{Z}}_+^d$ al elemento dado por

$$\text{pr}_J(\alpha_\infty) = \alpha$$

$$\text{pr}_i(\alpha_\infty) = \infty \quad \forall i \notin J$$

Diremos que la fibra en S de α es de tipo finito, y lo denotaremos $F_S(\alpha) < \infty$ si $\alpha_\infty \notin \bar{S}$. De manera similar, diremos que la fibra de α es de tipo infinito y lo representaremos $F_S(\alpha) = \infty$ si $\alpha_\infty \in \bar{S}$.

Denotaremos por f^J el elemento de $k[[X, Y]]$ definido por $f^J = \prod_{i \notin J} f_i$, es decir la ecuación de la curva C^J cuyas componentes son $\{C_i / i \notin J\}$. Consideramos entonces $\xi^J = \text{pr}_J(\underline{v}(f^J)) \in S_J$, es decir

$$\text{pr}_i(\xi^J) = \sum_{k \notin J} v_i(f_k) = \sum_{k \notin J} (f_i, f_k) \quad (\forall i \in J)$$

3.2.7 Nota.- Puesto que \bar{S} es el cierre topológico de S , decir que $F_S(\alpha) = \infty$ para $\alpha \in S_J$ equivale a decir que

$$\forall \beta \in F_S(\alpha) \exists \beta' \in F_S(\alpha) \text{ con } \beta'_i > \beta_i \quad \forall i \notin J.$$

Análogamente $F_S(\alpha) < \infty \iff \exists v \in \mathbb{Z}_+^d / \text{pr}_J(v) = \alpha$ y $F_S(\alpha) \cap S(v) = \emptyset$ donde $S(v) = \{\gamma \in S / \gamma \geq v\}$

3.2.8 Teorema.- Sea $J \subset I$, $\alpha \in S_J$ y como un 3.2.6

$\xi^J = \text{pr}_J(\underline{v}(f^J)) \in S_J$. Son equivalentes:

- i) $F_S(\alpha) = \infty$ (resp. $F_S(\alpha) < \infty$)
- ii) $\alpha - \xi^J \in S_J$ (resp. $\alpha - \xi^J \notin S_J$).

Demostración:

i) \implies ii): Por hipótesis sabemos que $\alpha_\infty \in \bar{S}$, luego existe $h \in \mathcal{O}$ con $\underline{v}(h) = \alpha_\infty$.

Supongamos $I-J = \{i_1, \dots, i_n\}$, puesto que $v_{i_1}(h) = \infty$ se tiene que $h \in f_{i_1} \mathcal{O}$ y existe entonces $h_1 \in \mathcal{O}$ tal que $h = f_{i_1} \cdot h_1$. De la misma manera, para i_2 tendremos $f_{i_1} \cdot h_1 \in f_{i_2} \mathcal{O}$, puesto que el ideal $f_{i_2} \mathcal{O}$ es primo y $f_{i_1} \notin f_{i_2} \mathcal{O}$, necesariamente $h_1 = f_{i_2} \cdot h_2$ con $h_2 \in \mathcal{O}$. Es claro que podemos continuar el proceso inductivamente y obtenemos que $h = \prod_{j=1}^n f_{i_j} \cdot \tilde{h} = f^J \cdot \tilde{h}$ con $\tilde{h} \in \mathcal{O}$.

Si $i \in J$ se tiene $v_i(h) = v_i(f^J) + v_i(\tilde{h}) = \text{pr}_i(\xi^J) + v_i(\tilde{h})$ y por lo tanto $\alpha = \xi^J + \text{pr}_J(\underline{v}(\tilde{h}))$, es decir $\alpha - \xi^J = \text{pr}_J(\underline{v}(\tilde{h})) \in S_J$.

ii) \Rightarrow i): Supongamos que $\alpha - \xi^J \in S_J$, entonces existe un elemento $h \in \mathcal{O}$ tal que $\text{pr}_J(h) = \alpha - \xi^J$ y consideramos $h' = h \cdot f^J \in \mathcal{O}$. El cálculo de $\underline{v}(h') \in \bar{S}$ es entonces

$$\text{Si } i \in J, v_i(h \cdot f^J) = \text{pr}_i(\alpha - \xi^J) + \text{pr}_i(\xi^J) = \text{pr}_i(\alpha)$$

$$\text{Si } i \notin J; v_i(h \cdot f^J) = v_i(h) + \infty = \infty$$

con lo que $\underline{v}(h') = \alpha_\infty$ y $F_S(\alpha)$ es de tipo infinito, tal y como queríamos demostrar.

3.2.9 Nota.- a) Observemos que en el caso particular

$I-J = \{i\}$, si tomamos $\alpha \in S_J$ se tiene que

$$F_S(\alpha) < \infty \iff \#F_S(\alpha) < \infty$$

y por el teorema anterior tendremos

$$\#F_S(\alpha) < \infty \iff \alpha - \text{pr}_J(\underline{v}(f_i)) = \alpha - \xi^J \notin S_J \iff \alpha \in A_{\xi^J}(S_J)$$

b) En el caso particular $d = 2$ el resultado está recogido ya en [34], pues si $\alpha_1 \in S_1 = \text{pr}_1(S)$ se tiene

$$\#F_S(\alpha_1) < \infty \iff \alpha_1 - (f_1, f_2) \notin S_1 \iff \alpha_1 \in A_{(f_1, f_2)}(S_1)$$

En este caso, puesto que $\#A_{(f_1, f_2)}(S_1) < \infty$, el resultado permite determinar las fibras finitas del semigrupo S y como veremos más adelante (véase también [34]) permite contar el número de maximales del semigrupo S . En el caso general esto no es posible, pues ya de partida $A_\gamma(S)$ no es un conjunto finito si $d \geq 2$ y además sobre cada elemento de $A_\gamma(S)$ no hay necesariamente un maximal en el sentido de la definición 3.1.2.

3.2.10 Proposición.— Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in S$ un nudo de $A_\gamma(S)$ donde $\gamma \in S$; sea $J \subset I$ y f^J, ξ^J como un 3.2.6. Entonces $pr_J(\alpha)$ es un nudo en S_J con respecto a $pr_J(\gamma) + \xi^J \in S_J$.

Demostración: Demostraremos la proposición para $\#J = d-1$, pues el mismo proceso de la prueba nos dice que el número d es irrelevante en ella y podríamos continuar el proceso hasta alcanzar, por sucesivas proyecciones, el subconjunto de I deseado.

Supongamos para simplificar notaciones $J = \{1, 2, \dots, d-1\}$ y denotamos por α^d el elemento $(\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}) \in S^d = S_J$. Sea $\beta = pr_J(\gamma) + \xi^J$ y supongamos que $\alpha^d \notin N_\beta(S^d)$, existe entonces $\eta \in \Delta(\alpha^d) \subset S^d$ tal que $\eta \notin A_\beta(S^d)$. Supongamos $\eta \in \Delta_1(\alpha^d)$, η se escribe entonces como $\eta = (\alpha_1, \eta_2, \dots, \eta_{d-1})$ con $\eta_i > \alpha_i \quad \forall i \geq 2$.

Puesto que $\eta - \beta \in S^d$, tendremos en particular

$$\eta - \beta + \xi^J = \eta - pr_J(\gamma) \in S^d$$

$$\eta - \beta = (\eta - pr_J(\gamma)) - \xi^J \in S^d$$

y por el teorema anterior $F_S(\eta - pr_J(\gamma)) = \infty$.

Existe entonces $\mu > \alpha_d - \gamma_d$ de manera que $\tilde{n} = (\alpha_1 - \gamma_1, \alpha_2 - \gamma_2, \dots, \alpha_{d-1} - \gamma_{d-1}, \mu) \in S$ y por lo tanto $\tilde{n} + \gamma \in S$. Pues to que $pr_i(\tilde{n} + \gamma) > pr_i(\alpha) \quad \forall i \geq 2$ se tiene que $\tilde{n} + \gamma \in \Delta_1(\alpha)$ y $\tilde{n} + \gamma \notin A_\gamma(S)$ con lo que α no sería un nudo en contra de la hipótesis.

3.2.11 Corolario.- Con las notaciones de la proposición anterior, si α es un maximal de S entonces $pr_J(\alpha)$ es un nudo en S_J con respecto a $\xi^J \in S_J, \forall J \subset I$.

Demostración: Si $\alpha \in M(S)$, entonces $\alpha \in N_\gamma(S) \quad \forall \gamma \in S$, en particular $\alpha \in N_{\underline{0}}(S)$ donde $\underline{0} = (0, \dots, 0) \in S$. Por la proposición anterior tendremos que $pr_J(\alpha) \in N_{\xi^J}(S)$.

Nótese que para $\gamma = \underline{0}$ la base de Apery es vacía y por lo tanto $N_{\underline{0}}(S)$ es el conjunto de elementos maximales.

3.2.12 Nota.- Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in N_\gamma(S)$, la proposición 3.2.10 para $\#J = 1$ nos dice simplemente que

$$\forall i \in I, \alpha_i - (\gamma_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d (f_i, f_j)) \notin S_i.$$

Si denotamos por ξ_{ij} la multiplicidad de intersección de f_i y $f_j, (f_i, f_j)$; $\xi^i = \xi^{\{i\}} = \sum_{j \neq i} \xi_{ij}$ tendremos que $\forall i \in I$ $\alpha_i \in A_{\gamma_i + \xi^i}(S_i)$ y en particular $\alpha_i \leq c_i + \gamma_i + \xi^i - 1, \forall i \in I$, siendo c_i el conductor del semigrupo S_i .

En lo que sigue denotaremos por Q el elemento de \mathbb{Z}_+^d , $Q = (c_1 + \xi^1 - 1, c_2 + \xi^2 - 1, \dots, c_d + \xi^d - 1)$; los comentarios

anteriores nos proporcionan dos importantes propiedades

$$(*) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in N_\gamma(S) & \text{es } \alpha \leq Q + \gamma \\ \forall \alpha \in M(S) & \text{es } \alpha \leq Q \end{cases}$$

En particular $M(S)$ y $N_\gamma(S)$ son subconjuntos finitos de S .

El resto del epígrafe lo dedicaremos a demostrar el Teorema siguiente, Teorema que nos proporciona una estructura de simetría con respecto a Q para los maximales del semigrupo S .

3.2.13 Teorema de Simetría: Sea $f = \prod_{i=1}^d f_i \in k[[X, Y]]$ la

ecuación de una curva algebroide, plana y reducida con d ramas, de ecuaciones f_1, \dots, f_d y suponemos $d \geq 2$. Sea $\xi_{ij} = (f_i, f_j)$ la multiplicidad de intersección de las ramas f_i y f_j para $i, j \in I, i \neq j$;

$\xi^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \xi_{ij}$; $\forall i \in I$; y c_i el conductor del semigrupo $S_i = S(f_i)$.

Sea también $Q = (c_1 + \xi^1 - 1, \dots, c_d + \xi^d - 1) \in \mathbb{Z}_+^d$, $Q+1 = (c_1 + \xi^1, \dots, c_d + \xi^d)$

y γ un elemento de S . Se tiene entonces:

- A) $Q \in S$ y Q es un maximal relativo de S .
- B) $Q+1$ es el conductor de S .
- C) Si $\alpha \in S$ entonces α es maximal si y sólo si $Q - \alpha \in S$. Además si $\alpha + \beta = Q$ con $\alpha, \beta \in S$ se tiene que α es maximal relativo si y sólo si β es maximal absoluto.
- D) Más generalmente, $Q + \gamma$ es un vértice relativo de $A_\gamma(S)$ y el mayor de todos los nudos de $A_\gamma(S)$.
- E) Si $v \in S$ entonces $v \in N_\gamma(S)$ si y sólo si $Q + \gamma - v \in S$. Además si tenemos $v + \mu = Q + \gamma$; $v, \mu \in S$ entonces:

- i) v es un vértice si y sólo si μ es un maximal.
- ii) v es un vértice $\begin{cases} \text{relativo} \\ \text{absoluto} \end{cases}$ si y sólo si μ maximal $\begin{cases} \text{absoluto} \\ \text{relativo} \end{cases}$
- iii) $v \in N_Y(S) - (M(S) \cup V_Y(S))$ si y sólo si $\mu \in N_Y(S) - (M(S) \cup V_Y(S))$.

3.2.14 Nota.— La demostración la haremos convenientemente fragmentada debido a su complejidad y por inducción sobre el número d de ramas de la curva. El caso $d = 2$ está esencialmente probado en [34], al menos en sus apartados A), B) y C). Reproduciremos la prueba en esta memoria, ya que resulta ilustrativa para el caso general.

Observemos que algunos de los enunciados del Teorema se pueden abordar directamente, sin utilizar la inducción, así se podría probar que $Q \in S$, $Q+1$ es el conductor de S y Q es un maximal relativo, es decir las partes A) y B). Por otra parte D) es una consecuencia directa de A) y de 3.2.10. Sin embargo, dado que el esfuerzo es similar, haremos su prueba también por inducción junto con la de C) y E).

El caso $d = 2$ se prueba en 3.2.16-17-19. En cuanto al caso general, A) y B) están probados en 3.2.22-23-25, el apartado C) son los Teoremas 3.2.29-31 mientras que D) y E) es esencialmente 3.2.34.

3.2.15 Nota.— Supongamos en lo que sigue $d=2$, es decir $f = f_1 \cdot f_2$ es la ecuación de una curva algebroide, plana y reducida con dos ramas de ecuaciones f_1 y f_2 . Sea S su semigrupo de valores y $S_i = \text{pr}_i(S)$ ($i = 1, 2$) el semigrupo de la rama i -ésima. Denotaremos por ξ la multiplicidad de intersección de f_1 y f_2 .

El Teorema 3.2.8 nos permite asegurar que si

$\alpha_1 \in S_1$ entonces $F_S(\alpha_1) < \infty \iff \alpha_1 \in A_\xi(S_1)$

$\alpha_2 \in S_2$ entonces $F_S(\alpha_2) < \infty \iff \alpha_2 \in A_\xi(S_2)$.

Puesto que, además, por P-4) (v.3.1.0) se tiene para $\alpha \in S$

$\Delta_1(\alpha) = \emptyset \iff \Delta_2(\alpha) = \emptyset$ podemos asegurar que el cardinal del conjunto de maximales de S , $M(S)$, es ξ y además, si $\alpha \in M(S)$ entonces $\alpha_1 \in A_\xi(S_1)$, $\alpha_2 \in A_\xi(S_2)$.

Puesto que $c_1 + \xi \in S_1$, $c_2 + \xi \in S_2$ y si $\alpha \in M(S)$ es $\alpha < (c_1 + \xi, c_2 + \xi)$ (3.2.12) entonces será $\delta \leq (c_1 + \xi, c_2 + \xi)$ donde δ es el conductor del semigrupo S . Observemos además que $c_1 + \xi - 1 \in A_\xi(S_1)$, $c_2 + \xi - 1 \in A_\xi(S_2)$, es decir $\#F_S(c_i + \xi - 1) < \infty$ para $i = 1, 2$; esto implica de manera inmediata que es $\delta = Q + 1 = (c_1 + \xi, c_2 + \xi)$.

3.2.16 Proposición. - En las condiciones de 3.2.15, $Q \in S$ y es un maximal.

Demostración:

a) $\Delta_1(Q) = \Delta_2(Q) = \emptyset$

Supongamos que existe $\alpha \in \Delta_1(Q)$, $\alpha = (c_1 + \xi - 1, \alpha_2)$ con $\alpha_2 > c_2 + \xi - 1$. Puesto que $Q + 1$ es el conductor del semigrupo S se tiene que $\Delta_2(\alpha) \neq \emptyset$, pues $\forall \beta \geq c_1 + \xi$ es $(\beta, \alpha_2) \geq \delta \implies (\beta, \alpha_2) \in S$. Será también entonces $\Delta_1(\alpha) \neq \emptyset$ y como consecuencia $F_S(c_1 + \xi - 1) = \infty$, que es absurdo pues $c_1 + \xi - 1 \in A_\xi(S_1)$.

Análogamente se prueba $\Delta_2(Q) = \emptyset$.

b) $Q \in S$

Sea $\alpha_2 = \sup\{\gamma \in S_2 / (c_1 + \xi - 1, \gamma) \in S\}$ y consideremos $(c_1 + \xi - 1, \alpha_2) \in M(S)$, en particular $\alpha_2 \in A_\xi(S_2)$. Supongamos que

$\alpha_2 < c_2 + \xi - 1$ y sea $\beta_2 = c_2 + \xi - 1 - \alpha_2$; por la condición de Gorenstein en S_2 (v. 3.2.2) será $\beta_2 \in A_\xi(S_2)$ y $\beta_2 > 0$. Existe $\beta_1 \in S_1 - \{0\}$ tal que $(\beta_1, \beta_2) \in S$ y entonces

$$(c_1 + \xi - 1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (c_1 + \xi - 1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) = (c_1 + \xi - 1 + \beta_1, c_2 + \xi - 1) \in \Delta_2(Q)$$

que es contradictorio con el apartado a). Por lo tanto debe ser

$\alpha_2 \geq c_2 + \xi - 1$ y necesariamente $\alpha_2 = c_2 + \xi - 1$, con lo que tenemos probado que $Q \in S$ y es maximal.

3.2.17 Teorema. - (Apartado C) para $d=2$). En las condiciones de 3.2.15 se tiene:

- i) Sea $\alpha \in S$, entonces $\alpha \in M(S) \iff Q - \alpha \in S$
- ii) Sean $\alpha, \beta \in S$ tales que $\alpha + \beta = Q$; entonces $\alpha, \beta \in M(S)$.

Demostración:

El apartado ii) es una consecuencia inmediata de i). En cuanto a la condición suficiente de i), si existe $\beta \in \Delta(\alpha)$ entonces claramente $\beta + (Q - \alpha) \in \Delta(Q)$ lo que contradice el hecho de ser Q maximal y por lo tanto es $\Delta(\alpha) = \emptyset$. Así pues, la única parte que requiere demostración es la condición necesaria del apartado i).

Denotaremos por α' el elemento $Q - \alpha$ de \mathbb{Z}_+^2 , es decir $\alpha'_1 = c_1 + \xi - 1 - \alpha_1$, $\alpha'_2 = c_2 + \xi - 1 - \alpha_2$. La condición de Gorenstein sobre los semigrupos S_1 y S_2 nos garantiza que $\alpha'_i \in S_i$ y además $\alpha'_i \in A_\xi(S_i)$; $i = 1, 2$.

Razonaremos por inducción sobre la primera coordenada del elemento α , si $\alpha_1 = 0$ entonces $\alpha_2 = 0$ y por tanto $\alpha' = Q \in S$ por la Proposición anterior.

Se tiene que $\Delta(\alpha') = \emptyset$, pues si existe $\beta \in \Delta_1(\alpha)$ entonces $\alpha + \beta \in \Delta_1(Q)$ ya que

$$\beta_1 + \alpha_1 = c_1 + \xi - 1$$

$$\beta_2 + \alpha_2 > \alpha'_2 + \alpha_2 = c_2 + \xi - 1$$

y esto contradice el caracter maximal de Q.

Supongamos que $\alpha' \notin S$, puesto que $\alpha'_1 \in A_\xi(S_1)$ y $\Delta(\alpha') = \emptyset$ existe entonces $\gamma \in F_S(\alpha'_1)$ maximal con $\gamma < \alpha'$. Sea $\gamma' = Q - \gamma$, igual que ocurría con α se tiene que $\gamma'_2 \in S_2$, $F_S(\gamma'_2) < \infty$ y $\Delta(\gamma') = \emptyset$; puesto que además

$$\gamma'_1 = c_1 + \xi - 1 - \gamma_1 = c_1 + \xi - 1 - \alpha'_1 = \alpha_1$$

$$\gamma'_2 = c_2 + \xi - 1 - \gamma_2 > c_2 + \xi - 1 - \alpha'_2 = \alpha_2$$

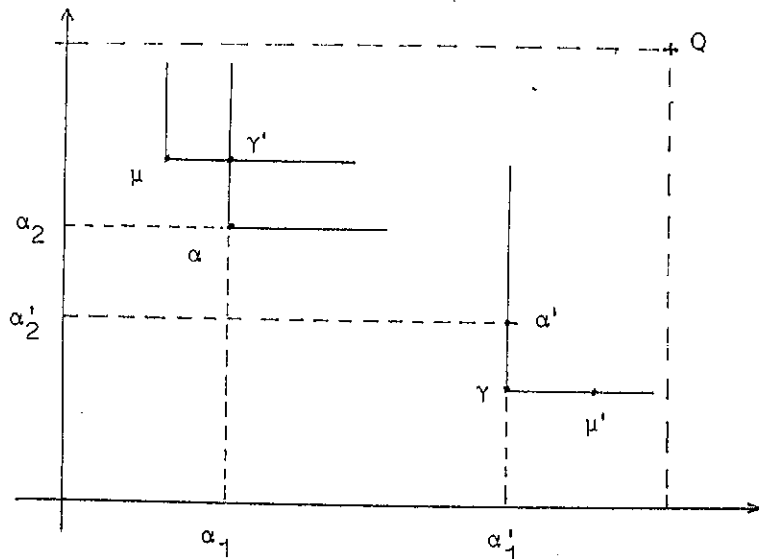
será $\gamma' \in \bar{\Delta}_1(\alpha)$ y $\gamma' \notin S$ por ser α maximal. Existirá entonces un maximal $\mu \in F_S(\gamma'_2)$ con $\mu_1 < \gamma'_1 = \alpha_1$.

Aplicando la hipótesis de inducción a $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ se tiene que $\mu' = Q - \mu \in S$, pero:

$$\mu'_1 = c_1 + \xi - 1 - \mu_1 > c_1 + \xi - 1 - \gamma'_1 = \gamma_1$$

$$\mu'_2 = c_2 + \xi - 1 - \mu_2 = c_2 + \xi - 1 - \gamma'_2 = \gamma_2$$

con lo que $\mu' \in \bar{\Delta}_2(\gamma)$, $\mu' \in S$ que es una contradicción por ser γ maximal.



3.2.18 Nota.- Puesto que Q es maximal, si $\gamma \in S$, $Q+\gamma$ es un vértice de Apery de S con respecto a γ y por tanto un nudo de $A_\gamma(S)$. Si $\alpha \in N_\gamma(S)$, por 3.2.12 se tiene $\alpha \leq Q+\gamma$. Estos comentarios prueban el apartado D) del Teorema 3.2.13 para el caso $d=2$.

3.2.19 Teorema.- En las condiciones de 3.2.15; sean $\alpha, \gamma \in S$ entonces $\alpha \in N_\gamma(S)$ si y sólo si $\alpha' = (Q+\gamma) - \alpha \in S$.

Demostración: La condición suficiente es clara, pues si $\beta \in \Delta(\alpha)$ y $\beta \notin A_\gamma(S)$ se tiene que $\beta - \gamma \in S$. Consideramos entonces el elemento $\alpha' + (\beta - \gamma) = (Q - \alpha) + \beta \in S$ y es claro que $\alpha' + \beta - \gamma \in \bar{\Delta}(Q)$ lo que es absurdo.

Veamos entonces la Condición necesaria:

a) Si α es un vértice de $A_\gamma(S)$ se tiene la cadena de equivalencias:

$$\alpha \in V_\gamma(S) \iff \alpha - \gamma \in M(S) \iff Q - (\alpha - \gamma) = Q + \gamma - \alpha = \alpha' \in M(S)$$

Esto prueba el Teorema si $\alpha \in V_\gamma(S)$ ó $\alpha \in M(S)$.

b) Sea entonces $\alpha \in N_\gamma(S)$, $\alpha \notin M(S)$, $\alpha \notin V_\gamma(S)$ y consideramos $\alpha' = Q + \gamma - \alpha \in \mathbb{Z}_+^2$. Puesto que $\alpha_i \in A_{\gamma_i + \xi}(S_i)$ para $i = 1, 2$ se tiene que $\alpha'_i \in A_{\gamma_i + \xi}(S_i)$; $i = 1, 2$. En particular $\alpha' \in S_1 \times S_2$.

Supongamos que $\alpha' \notin S$, por 3.1.7 existe $i \in \{1, 2\}$ y un maximal β de S tal que $\alpha' \in \bar{\Delta}_i(\beta)$. Supongamos para fijar ideas $i=1$, con lo que $\beta = (\alpha_1, \beta_2)$ con $\beta_2 < \alpha_2$. Sea $\beta' = Q + \gamma - \beta$ el vértice simétrico del maximal β , se tiene que $\beta' - \gamma \in S$; es decir $\beta' \notin A_\gamma(S)$ y además:

$$\beta'_1 = c_1 + \xi + \gamma_1 - 1 - \beta_1 = c_1 + \xi + \gamma_1 - 1 - \alpha'_1 = \alpha_1$$

$$\beta'_2 = c_2 + \xi + \gamma_2 - 1 - \beta_2 > c_2 + \xi + \gamma_2 - 1 - \alpha'_2 = \alpha_2$$

es decir $\beta' \in \Delta_1(\alpha) \subset A_\gamma(S)$ que es contradictorio, pues habíamos visto que $\beta' \in V_\gamma(S)$ y tenemos probado el Teorema.

3.2.20 Corolario.- Sean $\gamma, \alpha, \beta \in S$ con $\alpha + \beta = Q + \gamma$. Entonces:

- i) $\alpha, \beta \in N_\gamma(S)$
- ii) α es vértice si y sólo si β es maximal.

La demostración es trivial del Teorema.

3.2.21 Nota.- a) Supondremos a partir de aquí que S es el semigrupo de una curva algebroide, plana y reducida con $d > 2$ ramas. Por hipótesis de inducción supondremos que el Teorema de simetría 3.2.13 es cierto para los semigrupos de curvas reducidas con $v < d$ ramas; en particular si $J \subset I, J \neq I$ el Teorema 3.2.13 será cierto para las curvas $f_J = \prod_{i \in J} f_i$ y los semigrupos proyección $S_J = S(f_J) = \text{pr}_J(S)$.

b) Utilizaremos frecuentemente las notaciones introducidas en 3.2.6 y 3.2.12, así como las de principio del capítulo 3.1.1.

3.2.22 Proposición.- El punto $Q = (c_1 + \xi^1 - 1, \dots, c_d + \xi^d - 1)$ pertenece al semigrupo S .

Demostración: Sea $i \in I$, denotaremos por Q^i el elemento definido igual que Q para el semigrupo S^i , es decir si $j \neq i$

$$\text{pr}_j(Q^i) = c_j + \sum_{\substack{k \neq j \\ k \neq i}} \xi_{jk} - 1.$$

Fijamos para simplificar la prueba $i=d$, si $J_d = I - \{d\}$ se tiene $\text{pr}_{J_d}(Q) = (c_1 + \xi^1 - 1, \dots, c_{d-1} + \xi^{d-1} - 1) =$

$$\begin{aligned}
 &= (c_1 + \sum_{\substack{i \neq d \\ i \neq 1}} \xi_{1i} - 1, \dots, c_{d-1} + \sum_{\substack{i \neq d-1 \\ i \neq d}} \xi_{d-1,i} - 1) + (\xi_{1d}, \dots, \xi_{d-1,d}) \\
 &= Q^d + (\xi_{1d}, \dots, \xi_{d-1,d}) = Q^d + \xi^{J_d} \in S^d
 \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $Q^d + \xi^{J_d}$ es el mayor de los vértices de Apery de S^d con respecto $\xi^{J_d} = (\xi_{1d}, \dots, \xi_{d-1,d})$, por el Teorema 3.2.8, $F_S(\text{pr}_{J_d}(Q)) = \infty$ y existe entonces $\tilde{Q}^d \in F_S(\text{pr}_{J_d}(Q))$ con $\tilde{Q}^d > Q$.

Aplicando este razonamiento a todos los índices $i \in I$, tendremos que $\exists \tilde{Q}^i \in F_S(\text{pr}_{J_i}(Q))$, $\tilde{Q}^i > Q$ y por lo tanto $Q = \inf\{\tilde{Q}^1, \dots, \tilde{Q}^d\} \in S$. (Nótese que bastaba utilizar dos índices $i, j \in I$, $i \neq j$ pues también $Q = \inf\{\tilde{Q}^i, \tilde{Q}^j\}$).

3.2.23 Proposición: $Q + 1 = (c_1 + \xi^1, \dots, c_d + \xi^d)$ es el conductor del semigrupo S .

Demostración: Denotaremos por δ el conductor del semigrupo S . Sea $\gamma \in \mathbb{Z}_+^d$, $\gamma \geq Q + 1$; puesto que el conductor de S^i es $Q^i + 1$ se tendrá que $\text{pr}_J(\gamma) \in S_J \quad \forall J \subset I, J \neq I$. Si α es un maximal de S , es $\alpha \leq Q$ por 3.2.12 y por el Teorema 3.1.7 se tiene ya que $\gamma \in S$ y por lo tanto $Q + 1 \geq \delta$.

Sea $i \in I$, $c_i + \xi^i - 1 \in A_{-\xi^i}^i(S_i)$ y por lo tanto (3.2.8) $F_S(c_i + \xi^i - 1) < \infty$; existirá entonces $P \in \mathbb{Z}_+^d$ con $\text{pr}_i P = c_i + \xi^i - 1$ tal que si $\gamma \geq P$ y $\gamma_i = c_i + \xi^i - 1$ se tiene $\gamma \notin S$. Esto nos dice de forma inmediata que $\delta_i \geq c_i + \xi^i, \forall i$, y por tanto se tiene $\delta = Q + 1$.

3.2.24 Nota.- Consideramos $\mathcal{O}_i = k[[X,Y]]/(f_i)$ el anillo local de la rama i -ésima y sea $\psi_i: k[[X,Y]] \rightarrow \mathcal{O}_i$ el homomorfismo natural de paso al cociente. Denotamos por \mathfrak{C}_i el ideal conductor de la extensión $\mathcal{O}_i \subset k[[t_i]]$, $\forall i \in I$. El resultado anterior permite asegurar que el ideal conductor, \mathfrak{C} , de la extensión de anillos $\mathcal{O} = k[[X,Y]]/(f) \subset k[[t_1]] \times \dots \times k[[t_d]]$ es

$$\mathfrak{C} = \psi_1(f^1)\mathfrak{C}_1 \times \psi_2(f^2)\mathfrak{C}_2 \times \dots \times \psi_d(f^d)\mathfrak{C}_d$$

donde $f^i = \prod_{k \neq i} f_k$.

3.2.25 Teorema.- Q es un maximal relativo de S .

Demostración.- Veamos en primer lugar que Q es maximal.

Supongamos que existe $\alpha \in \Delta_1(Q)$, será entonces $\alpha = (c_1 + \xi^1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$; sea $\beta_1 > c_1 + \xi^1 - 1$ y $\beta_i > \alpha_i$, $\forall i \geq 3$; consideremos $\beta = (\beta_1, \alpha_2, \beta_3, \dots, \beta_d)$; $\beta \in S$ pues $\beta \geq Q+1$. Aplicamos P-4) a α y β y obtenemos $\alpha(2) = (c_1 + \xi^1 - 1, \alpha_2^1, \alpha_3, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_2^1 > \alpha_2$. Tomando ahora $\beta = (\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_4, \dots, \beta_d)$ con $\beta_2 > \alpha_2^1$, $\beta_i > \alpha_i$ $\forall i \neq 2$, y utilizando P-4) para $\alpha(2)$ y β obtenemos

$$\alpha(3) = (c_1 + \xi^1 - 1, \alpha_2^1, \alpha_3^1, \alpha_4, \dots, \alpha_d); \alpha_3^1 > \alpha_3.$$

Continuando este proceso hasta la coordenada d -ésima es claro que obtenemos $\alpha^1 = \alpha(d) \in \Delta_1(\alpha)$.

Repitiendo este proceso inductivamente podemos obtener una sucesión $\alpha, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^i, \alpha^{i+1}, \dots$ de manera que $\alpha^{i+1} \in \Delta_1(\alpha^i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Se tendrá entonces que $\lim \alpha^i = (c_1 + \xi^1 - 1, \infty, \dots, \infty) \in \bar{S}$, es decir $F_S(c_1 + \xi^1 - 1) = \infty$ que contradice 3.2.8 pues $c_1 + \xi^1 - 1 \in A_{\xi^1}(S_1)$ y por

lo tanto $\Delta_1(Q) = \emptyset$.

Es claro que la prueba anterior se puede hacer para un índice $i \in I$ cualquiera y por lo tanto $\Delta(Q) = \emptyset$, es decir Q es maximal.

Sea $J \subset I$, $J \neq I$ con $\#J \geq 2$; veamos que es $\Delta_J(Q) \neq \emptyset$. Sea $i \in J$, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{pr}_i(Q) &= c_i + \xi_i^i - 1 = c_i + \sum_{j \neq i} \xi_{ij} - 1 = \\ &= (c_i + \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} \xi_{ij} - 1) + \sum_{k \notin J} \xi_{ik} = \\ &= \text{pr}_i(Q_J) + v_i(f^J) \end{aligned}$$

donde Q_J es el elemento de S_J definido como Q , es decir el mayor de los maximales de S_J .

Por lo tanto

$$\text{pr}_J(Q) = Q_J + \xi^J$$

y $\text{pr}_J(Q) - \xi^J = Q_J \in S$, por el Teorema 3.2.8 se tiene $F_S(\text{pr}_J(Q)) = \infty$ y en particular será necesariamente $\Delta_J(Q) \neq \emptyset$.

3.2.26 Lema.- Sea $\alpha \in S$ y denotamos por α' el elemento $Q - \alpha \in \mathbb{Z}^d$, se tiene entonces:

- i) $\Delta(\alpha') = \emptyset$
- ii) Si además $\Delta_J(\alpha) \neq \emptyset$ para cada $J \subset I$ con $\#J \geq 2$ entonces $\Delta_K(\alpha) = \emptyset$, $\forall K \subset I$, $K \neq I$.

Demostración:

- i) Si $\beta \in \Delta_i(\alpha')$ para $i \in I$, es claro que $\beta + \alpha \in \Delta_i(Q)$ lo que contra dice el carácter maximal de Q y por lo tanto $\Delta(\alpha') = \emptyset$.

b) Por ser Q maximal relativo y el mayor de ellos, es inmediato comprobar que $\forall i \in I, Q$ es el único maximal que hay en $F_S(c_i + \xi_i^{-1})$.

3.2.29 Teorema.- (Apartado C, parte primera de 3.2.13). Sea $\alpha \in S$, entonces α es un maximal de S si y sólo si $Q - \alpha \in S$.

Demostración: La condición suficiente es inmediata, pues si aplicamos 3.2.26 i) al elemento de S, $Q - \alpha$ necesariamente $\Delta(\alpha) = \emptyset$ y α es maximal. Obsérvese que también $\Delta(Q - \alpha) = \emptyset$ y por tanto $Q - \alpha$ es maximal.

Condición necesaria. - Probaremos en primer lugar que si α es maximal relativo entonces $\alpha' = Q - \alpha \in S$ por inducción sobre $\alpha'_i = c_i + \xi_i^{-1} - \alpha_i$.

Si $\alpha'_1 = 0$ entonces $\alpha'_1 = c_1 + \xi_1^{-1} - 1$ y necesariamente es $\alpha = Q$, por lo tanto $\alpha' = \bar{0} \in S$.

Sea entonces $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ un maximal relativo, $\alpha < Q$ y $\alpha' = Q - \alpha$. Supongamos que $\alpha' \notin S$, por el Lema 3.2.26 ii) se tiene $\Delta'_D(\alpha') = \emptyset \forall i \in I$ y por el Lema 3.2.27 $\text{pr}_j(\alpha') \in S_j, \forall j \subset I, j \neq I$.

Figuramos un índice $i \in I, i \neq 1$, puesto que $\Delta'_D(\alpha') = \emptyset$ aplicando el Teorema de generación 3.1.7 existirá un maximal relativo $B \in S$ con $\alpha' \in \Delta'_I(B)$.

Sea $B' = Q - B$, puesto que si $B' \in S$ es $B' \in \Delta'_I(\alpha)$ necesariamente $B' \notin S$, aplicando de nuevo 3.2.26, 3.2.27 será:

$$\begin{aligned} \Delta'_D(B') &= \emptyset \quad \forall i \in I \\ \text{pr}_j(B') &\in S_j \quad \forall j \subset I, j \neq I \end{aligned}$$

En particular $\Delta'_D(B') = \emptyset$ y de nuevo aplicando 3.1.7 existe $H \in S$, maximal relativo de S, de manera que $B' \in \Delta'_I(H)$.

(i) Sea $K \subset I$ con $\#K \leq d-1$ y supongamos que existe $B \in \Delta^k(\alpha')$.

Consideremos el subconjunto de I , $J = \{i\} \cup (I-K)$ donde $i \in K$.

Se tiene $\#J \geq 2$ y por hipótesis existe $B' \in \Delta^j(\alpha)$, para el ele-

mento $B+B' \in S$ se tiene

$$- \beta_i + \beta'_i = \alpha'_i + \alpha_i = c_i + \varepsilon_i - 1$$

- Si $j \in K$, $j \neq i$ tenemos (pues $j \notin J$)

$$\beta_j + \beta'_j = \alpha'_j + \alpha_j > c_j + \varepsilon_j - 1$$

$$- \text{Si } j \notin J: \beta_j + \beta'_j > \alpha'_j + \alpha_j = c_j + \varepsilon_j - 1$$

Es decir $B+B' \in \Delta^i(Q)$ que es absurdo y por lo tanto $\Delta^k(\alpha') = \emptyset$

$AK \subset I, K \neq I$.

3.2.27 Lema.- Sea $\gamma \in S$, α un nudo de Apery con respecto a

$$\gamma (\alpha \in N^{\gamma}(S)) \text{ y } J \subset I, J \neq I \text{ entonces } pr_J^{(\alpha+\gamma)} \in S_J.$$

Demostración:

Puesto que $pr_J(Q) = Q_J + \varepsilon_J$ (véase demostración de 3.2.25)

se tiene

$$pr_J^{(\alpha+\gamma)} = Q_J + \varepsilon_J + pr_J(\gamma) - pr_J(\alpha)$$

Por la Proposición 3.2.10 $pr_J(\alpha)$ es un nudo de Apery de S_J con res-

pecto a $\varepsilon_J + pr_J(\gamma)$ y por hipótesis de inducción (apdo. E)) se ten

dra que $Q_J + \varepsilon_J + pr_J(\gamma) - pr_J(\alpha) \in S_J$. (además también es un nudo de

S_J con respecto a $\varepsilon_J + pr_J(\gamma)$).

3.2.28 Nota.- a) El Lema anterior, si α es maximal nos per-

mite asegurar que $pr_J^{(\alpha)} \in S_J, \forall J \subset I, J \neq I$ tomando $\gamma = \bar{0}$.

Se tiene $\beta'_1 = \mu_1$, y puesto que $\beta' \in \bar{\Delta}_i(\alpha)$ con $i \neq 1$ es $\beta'_1 = \mu_1 > \alpha_1$, es decir

$$c_1 + \xi_1^{-1} - 1 - \mu_1 < c_1 + \xi_1^{-1} - 1 - \alpha_1$$

Por hipótesis de inducción se tiene entonces $\mu' = Q-\mu \in S$, pero, puesto que $\beta' \in \bar{\Delta}_1(\mu)$ entonces $\mu' \in \bar{\Delta}_1(\beta)$, $\Delta_1(\beta) = \emptyset$ por ser β maximal relativo y llegamos a una contradicción. Hemos probado entonces que si α es maximal relativo entonces $Q - \alpha \in S$.

Sea $\alpha \in M(S)$ y supongamos $\alpha' = Q-\alpha \notin S$. Por el Lema 3.2.27 $pr_J(\alpha') \in S_J$, $\forall J \subset I$, $J \neq I$ y por 3.1.7 existe un maximal relativo $\beta \in S$ y un índice $i \in I$ de manera que $\alpha' \in \bar{\Delta}_i(\beta)$. Se tendrá entonces: $\beta' \in S$ por ser β un maximal relativo y $\beta' \in \bar{\Delta}_i(\alpha)$ lo que contradice el carácter maximal de α y por lo tanto $\alpha' \in S$.

3.2.30 Lema.- Sea α un maximal de S , existe $J \subset I$ con $\#J \geq 2$, $1 \in J$ y $\tilde{\alpha} \in S_J$ maximal relativo de S_J tal que $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ y $\tilde{\alpha}_i \leq \alpha_i \forall i \in J$.

Demostración: Si α es un maximal relativo de S entonces $I = J$ y $\tilde{\alpha} = \alpha$. Supongamos entonces que α no es un maximal relativo, existe entonces $n \in I$ verificando $\Delta_{1n}(\alpha) = \emptyset$ (ver 3.1.5) y podemos tomar $k = \min\{i \in I / \Delta_{1i}(\alpha) = \emptyset\}$.

Probaremos el Lema para $\alpha \in S$ verificando las dos condiciones siguientes, para $d \geq 2$ y k con $1 < k \leq d+1$

$$P(d,k) \begin{cases} \text{i) } \Delta_1(\alpha) = \emptyset \\ \text{ii) } \Delta_{1i}(\alpha) \neq \emptyset \quad \forall i < k, \Delta_{1k}(\alpha) = \emptyset. \end{cases}$$

y lo haremos por inducción sobre el número $l(\alpha) = \underline{l(d,k) = d+1-k}$.

Si $l(d,k) = 0$, α es entonces maximal relativo y el resultado es evidente. En el caso general, tendremos $k < d+1$ y consideramos $J = I - \{k\}$;

se tienen dos posibilidades para $\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha)) \subset S_J$:

a) $\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha)) \neq \emptyset$

b) $\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha)) = \emptyset$.

En el caso b) consideramos $\alpha^k = \text{pr}_J(\alpha) \in S^k$. Puesto que $\Delta_{1i}(\alpha) \neq \emptyset, \forall i < k$, se tiene para $\beta \in \Delta_{1i}(\alpha)$ que $\text{pr}_J(\beta) \in \Delta_{1i}(\alpha^k)$ y por lo tanto $\Delta_{12}(\alpha^k) \neq \emptyset, \dots, \Delta_{1k-1}(\alpha^k) \neq \emptyset$. Se tiene entonces que $\alpha^k \in S^k$ verifica $P(d-1, k')$ con $k' \geq k$ y necesariamente $l(d-1, k') = d-k' < d+1-k$, por hipótesis de inducción existe entonces $\tilde{\alpha} \in S_{J_1}$ maximal relativo, con $J_1 \subset J, 1 \in J_1$ y $\#J_1 \geq 2$ tal que $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ y $\tilde{\alpha}_i \leq \alpha_i, \forall i \in J_1$. Es claro que $\tilde{\alpha}$ resuelve el problema también para α .

Si se tiene $\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha)) \neq \emptyset$ podemos considerar

$$F_S(\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha))) = \{\beta \in S / \text{pr}_J(\beta) \in \Delta_1(\text{pr}_J(\alpha))\} \neq \emptyset.$$

Sea $\beta \in F_S(\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha)))$ y supongamos que se tiene $\beta_k > \alpha_k$, entonces $\beta \in \Delta_1(\alpha)$ lo que es absurdo, pues $\Delta_1(\alpha) = \emptyset$. Si se tiene $\beta_k = \alpha_k$ entonces es $\beta \in \Delta_{1k}(\alpha)$ y por hipótesis $\Delta_{1k}(\alpha) = \emptyset$ lo que nos lleva también a una contradicción. Por lo tanto

$$\forall \beta \in F_S(\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha))) \text{ es } \beta_k < \alpha_k$$

y podemos considerar

$$\alpha'_k = \sup\{\beta_k / \beta \in F_S(\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha)))\} < \alpha_k$$

y un elemento $\beta \in F_S(\Delta_1(\text{pr}_J(\alpha)))$ con $\beta_k = \alpha'_k$.

Sea $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha'_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, puesto que $\alpha' = \inf\{\alpha, \beta\}$ es $\alpha' \in S$. Veamos que α' verifica $P(d, k')$ con $k' > k$.

Supongamos que existe $v \in \Delta_1(\alpha')$, entonces se tiene que $\text{pr}_J(v) \in \Delta_1(\text{pr}_J(\alpha))$ y $v_k > \alpha_k$ lo que contradice la construcción de

α'_k y por tanto $\Delta_1(\alpha') = \emptyset$.

Por ser $\Delta_{1i}(\alpha) \neq \emptyset$ para $i < k$ se tiene también que $\Delta_{1i}(\alpha') \neq \emptyset \quad \forall i < k$. Por otra parte $\beta \in \Delta_{1k}(\alpha')$ con lo que $\Delta_{1k}(\alpha') \neq \emptyset$ y α' verifica $P(d, k')$ con $k' > k$, es decir $l(\alpha') = d+1-k' < d+1-k = l(\alpha)$.

Por hipótesis de inducción, para α' existe un elemento $\tilde{\alpha}$ en las condiciones exigidas para $\tilde{\alpha}$ en el enunciado del Lema, es claro que $\tilde{\alpha}$ resuelve también el problema para α .

Obsérvese que siempre es $\#J \geq 2$, pues en los semigrupos $S_J \subset \mathbb{Z}_+^2$ los maximales son todos ellos de un único tipo, y si llegamos a $\tilde{\alpha} \in S_J$ con $\#J = 2$ y $\Delta_1(\tilde{\alpha}) = \emptyset$, necesariamente $\tilde{\alpha}$ es maximal relativo de S_J y finalizamos en esta etapa sin seguir proyectando.

3.2.31 Teorema.— Son condiciones equivalentes:

- i) α es un maximal absoluto de S .
- ii) $Q-\alpha$ es un maximal relativo de S .

Demostración:

ii \implies i): Es el Lema 3.2.26 y el Teorema 3.2.29.

i \implies ii): Para probar esta implicación demostraremos que si α es un maximal no relativo, entonces $\alpha' = Q-\alpha$, que sabemos que es maximal por 3.2.29, no es un maximal absoluto.

Sea entonces $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un maximal no relativo del semigrupo S , por el Lema anterior existe $J \subset I$ con $1 \in J$, $\#J \geq 2$ y $\tilde{\alpha} \in S_J$ un maximal relativo de S_J tal que $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ y $\tilde{\alpha}_i \leq \alpha_i \quad \forall i \in J$.

Si se tiene $J = I$, puesto que α no es maximal relativo (véase la demostración del Lema 3.2.30), existe necesariamente $j \in I$

tal que $\tilde{\alpha}_j < \alpha_j$. Sea $K = \{i \in I / \tilde{\alpha}_i = \alpha_i\}$, se tiene $1 \in K \subset I$, $K \neq I$ y $\alpha \in \Delta_K(\tilde{\alpha})$ (obsérvese que en particular $\#K \geq 2$); se tiene entonces que $\tilde{\alpha}' = Q - \tilde{\alpha} \in \Delta_K(\alpha')$ y α' no es maximal absoluto.

Supongamos $J \neq I$, el elemento de $S_J, \tilde{\alpha}' = Q_J + \xi^J - \tilde{\alpha}$ es un vértice absoluto de S_J con respecto a ξ^J y por 3.2.8 $F_S(\tilde{\alpha}') = \infty$ con lo que existirá $\tilde{\beta} \in F_S(\tilde{\alpha}')$ tal que $\tilde{\beta}_i > pr_i(\alpha') \quad \forall i \notin J$.

Sea $K = \{i \in J / \tilde{\alpha}_i = \alpha_i\} \subset J$, se tiene $1 \in K \subset J \neq I$ y también $pr_J(\alpha) \in \Delta_K(\tilde{\alpha})$ (como antes será necesariamente $\#K \geq 2$). Puesto que

$$pr_J(\alpha') = pr_J(Q) - pr_J(\alpha) = Q_J + \xi^J - pr_J(\alpha)$$

tendremos que $\tilde{\alpha}' \in \Delta_K(pr_J(\alpha'))$ y por la construcción de $\tilde{\beta}$ será necesariamente $\tilde{\beta} \in \Delta_K(\alpha')$ con lo que α' no es un maximal absoluto y finalizamos la prueba del Teorema.

Este Teorema completa la prueba del apartado C) del Teorema de simetría 3.2.13.

3.2.32 Nota.- Sea $\gamma \in S$, puesto que $Q+\gamma$ es un vértice relativo (por ser Q maximal relativo) y además $v \leq Q+\gamma \quad \forall v \in N_\gamma(S)$ se tiene de forma inmediata el apartado D) del Teorema de simetría 3.1.13.

3.2.33 Lema.- Sean $\gamma, v \in S$ y consideremos $v' = Q+\gamma-v$, se tiene entonces:

- i) $\Delta(v') \subset A_\gamma(S)$
- ii) v es un maximal de S si y sólo si v' es un vértice de $A_\gamma(S)$.
- iii) v es maximal absoluto (resp. relativo) si y sólo si v' es un vértice relativo (resp. absoluto).

Demostración:

i) Si $\alpha \in \Delta_i(v')$ tal que $\alpha - \gamma \in S$, entonces se tiene $\alpha + v \in \Delta_i(Q + \gamma)$,
 $v + \alpha - \gamma \in S$ que es absurdo, pues $Q + \gamma \in N_\gamma(S)$.

ii) y iii) Son evidentes, pues

$$v \text{ maximal} \iff Q - v \in S$$

$$v \text{ maximal relativo} \iff Q - v \text{ maximal absoluto.}$$

3.2.34 Teorema.- Sean $\gamma, v \in S$, se tiene entonces que
 $v \in N_\gamma(S)$ si y sólo si $Q + \gamma - v \in S$.

Demostración:

La condición suficiente es inmediata aplicando la parte i) del Lema 3.2.33 al elemento $Q + \gamma - v \in S$.

Condición necesaria.- Sea $v' = Q + \gamma - v$, por 3.2.27 se tiene que $\text{pr}_J(v') \in S_J, \forall J \subset I, J \neq I$.

Supongamos que $v' \notin S$, existe un maximal relativo α (Teorema 3.1.7) y un índice $i \in I$ de manera que $v' \in \overline{\Delta}_i(\alpha)$. El elemento $Q + \gamma - \alpha$ es entonces un vértice absoluto de S con respecto a γ y además $(Q + \gamma - \alpha) \in \Delta_i(v)$ lo que es una contradicción, pues se tiene:

$$\Delta_i(v) \subset A_\gamma(S) \text{ pues } v \in N_\gamma(S)$$

$$Q + \gamma - \alpha \in \Delta_i(v) \text{ y } Q + \gamma - \alpha \notin A_\gamma(S)$$

Por lo tanto, necesariamente $v' \in S$ y también, por el Lema anterior $v' \in N_\gamma(S)$.

Este Teorema finaliza la prueba del Teorema de simetría 3.1.13.

3.2.35 Nota.— El Teorema de generación 3.1.7, unido al Teorema de simetría nos dice que, conocidas las proyecciones del semigrupo S , basta conocer los maximales absolutos de S para determinar por completo el semigrupo S . (Pues Q se calcula sin problemas a partir de la clase de equisingularidad y vía la simetría sobre Q podemos calcular los maximales relativos de S).

El método empleado en la demostración, sugiere que se puede probar en condiciones ligeramente más débiles pues la simetría de los maximales indica una fuerte relación con la condición de Gorenstein sobre los anillos de las curvas que intervienen en el proceso. Se puede ver un paralelismo entre el Teorema de simetría y la condición de Gorenstein para semigrupos de curvas irreducibles, indicado en 3.2.2 (véase [43]).

La importancia del Teorema de simetría se pone de manifiesto en el epígrafe 4 de este mismo capítulo, donde se ve que los maximales absolutos son calculables de una forma mucho más simple que los relativos mediante un conjunto de "generadores" que determinaremos en los epígrafes 3 y 4.

3.3 EL CONTACTO MAXIMAL

3.3.0 Introducción.- En [51] Monique Lejeune introduce la noción de contacto maximal de género superior para una curva irreducible (ver también O. Zariski [79] y A. Campillo [18]). Más aún, para curvas no necesariamente irreducibles se introduce la noción de "Bouquet" de curvas con contacto maximal de género arbitrario, viendo como a partir de ellos se puede obtener la clase de equisingularidad de la curva de partida.

En este epígrafe daremos la noción de valores del contacto maximal y veremos la relación existente entre ellos y los invariantes de equisingularidad manejados en el Capítulo I y el Capítulo II. La razón de porqué incluimos en este Capítulo (titulado el semigrupo de Valores) el presente epígrafe se pone de manifiesto en el epígrafe siguiente, donde se estudia una interpretación de los valores del contacto maximal en la generación del semigrupo de valores.

3.3.1.- Utilizaremos las notaciones del Capítulo I, en particular (1.0) C es una curva algebroide, plana y reducida con d componentes irreducibles C_1, \dots, C_d de ecuaciones f_1, \dots, f_d . Denotaremos por g_i el género de la curva irreducible C_i y como es habitual $f_A = \prod_{i \in A} f_i$ y $C_A = \text{Spec}(k[[X, Y]]/(f_A))$ para cualquier subconjunto A de $I = \{1, \dots, d\}$.

Usaremos los resultados y conceptos de [51] 3.2 que resumiremos a continuación.

Sea $n \geq 0$ un número entero y consideramos el conjunto:

$$\mathcal{C}^n = \{i \in I / g_i \geq n\}$$

y el conjunto $T^n \subset \mathcal{P}(\mathcal{C}^n)$ definido por la siguiente propiedad:

$A \in T^n$ si y sólo si $A \subset \mathcal{C}^n$ y existe una curva D de género n de manera que D tiene contacto maximal de género n con f_i , $\forall i \in A$.

(ó lo que es equivalente:

Existe $h \in k[[X, Y]]$, irreducible de género n de manera que $v_i(h) = \overline{\beta}_{n+1}^i$, $\forall i \in A$).

Podemos suponer T^n ordenado por inclusión y se tiene que T^n tiene elementos maximales y que para cada $A \in T^n$ existe un maximal $E \in T^n$ con $A \subset E$. Denotaremos por M^n el conjunto de maximales de T^n , si $E \in M^n$ existen curvas irreducibles de género n con contacto maximal de género n con todas las componentes de f_E ; denotaremos una cualquiera de ellas por $h_E \in k[[X, Y]]$, verifica $v_i(h_E) = \overline{\beta}_{n+1}^i$, $\forall i \in E$.

Si $M^n = \{E_n^1, E_n^2, \dots, E_n^s\}$ podemos asociar a M^n el conjunto $B^n = \{h_n^1, h_n^2, \dots, h_n^s\}$ donde $h_n^i = h_{E_n^i}$. El conjunto B^n recibe el nombre de Bouquet de curvas algebroides con contacto maximal de género n con C .

3.3.2 Nota.- Observemos los siguientes hechos:

a) h_E no es única, en general, pues hay infinitas curvas con

$$v_i(h_E) = \overline{\beta}_{n+1}^i, \forall i \in E \text{ si } n < \min\{g_i / i \in E\}$$

b) $B^n = \prod_{i=1}^s h_n^i$ es una curva reducida, es decir siempre se tiene

$$h_n^i \neq h_n^j \text{ si } i \neq j.$$

c) Si C, D son curvas equisingulares $B^n(C)$ y $B^n(D)$ son también equisingulares y por lo tanto la clase de equisingularidad de $B^n(C)$ está bien definida.

3.3.3 Lema.— Sean $f_1, f_2 \in k[[X, Y]]$ y $(f_1 | f_2) = (q, c)$, supongamos $l_q^1 \leq l_q^2$. Se tiene entonces:

i) Si $c \leq l_q^1$ no existe ninguna curva con contacto maximal de género q con f_1 y f_2 .

ii) Si $c = l_q^1 + 1$, cualquier curva con contacto maximal de género q con f_2 tiene también contacto maximal de género q con f_1 .

La demostración es inmediata a partir de las definiciones, véase [18] 4.2.9 y 1.2.3 en el capítulo I.

3.3.4 Proposición.— Sea n un entero positivo, $E \in M^n$ y h_E una curva asociada a E . Entonces $\underline{v}(h_E)$ no depende de la curva h_E elegida, más concretamente:

$$\text{Si } i \in E \quad v_i(h_E) = \bar{\beta}_{n+1}^i$$

$$\text{Si } j \notin E, \text{ existe } i \in E \text{ con } v_j(h_E) = \frac{(f_i, f_j)}{e_n^i} = \frac{\xi_{ij}}{e_n^i}$$

Demostración:

Es claro que $v_i(h_E) = \bar{\beta}_{n+1}^i, \forall i \in E$.

Sea entonces $j \in I, j \notin E$ y tomamos un índice $i \in E$ cualquiera. Puesto que h_E no tiene contacto maximal de género n con f_j tendremos:

$$(f_i | f_j) \leq (n, l_n^j) \quad \forall i \in E$$

(Pues, por el Lema anterior, si es $(f_i | f_j) \geq (n, l_n^{j+1})$ cualquier curva con contacto maximal de género n con f_i lo tendría también con f_j , en particular h_E).

Supongamos que $\forall i \in E$ es $(f_i | f_j) = (n, l_n^{i+1})$, sea entonces h tal que $v_j(h) = \bar{\beta}_{n+1}^j$, por 3.3.3 necesariamente será $v_i(h) = \bar{\beta}_{n+1}^i \quad \forall i \in E$ y E no sería un conjunto maximal de T^n pues $E \not\subseteq E \cup \{j\}$ y llegaríamos a un absurdo.

Sea entonces $i \in E$ de manera que si ponemos $(f_i | f_j) = (q^*, c^*)$ entonces

$$(q^*, c^*) \leq (n, l_n^j)$$

$$(q^*, c^*) \leq (n, l_n^i)$$

Es claro que también se tiene $(f_j | h_E) = (q^*, c^*)$.

Si $c^* \leq \min\{l_{q^*}^i, l_{q^*}^j\}$ tendremos:

$$(f_i, f_j) = v_j(f_i) = e_{q^*-1}^i \bar{\beta}_{q^*}^j + c^* c_{q^*}^i e_{q^*}^j$$

$$v_j(h_E) = e_{q^*-1}(h_E) \bar{\beta}_{q^*}^j + c^* e_{q^*}(h_E) e_{q^*}^j$$

y puesto que $e_k(h_E) = e_k^i / e_n^i \quad \forall k \leq n$ se tiene el resultado.

Supongamos que $c^* = \min\{l_{q^*+1}^i, l_{q^*+1}^j\}$ será

$$(f_i, f_j) = \min\{e_{q^*}^i \bar{\beta}_{q^*+1}^j, e_{q^*}^j \bar{\beta}_{q^*+1}^i\}$$

en este caso, necesariamente es $q < n$ y se tiene entonces

$$\bar{\beta}_k(h_E) = \bar{\beta}_k^i / e_n^i, \quad e_k(h_E) = e_k^i / e_n^i \quad \forall k \leq n \quad y$$

$v_j(h_E) = \min\{e_{q^*}(h_E) \bar{\beta}_{q^*+1}^j, e_{q^*}^j \bar{\beta}_{q^*+1}^i(h_E)\}$ con lo que se tiene también el resultado pues

$$e_{q^*}^i(h_E) \bar{\beta}_{q^*+1}^j \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} e_{q^*}^j \bar{\beta}_{q^*+1}^i(h_E) \iff (e_{q^*}^i/e_n^i) \bar{\beta}_{q^*+1}^j \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} e_{q^*}^j (\bar{\beta}_{q^*+1}^i/e_n^i) \iff$$

$$\iff e_{q^*}^i \bar{\beta}_{q^*+1}^j \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} e_{q^*}^j \bar{\beta}_{q^*+1}^i$$

y entonces $v_j(h_E) = \frac{(f_i, f_j)}{e_n^i} = \frac{\xi_{ij}}{e_n^i}$.

3.3.5 Nota.- Obsérvese que además hemos visto en la demostración que dado $j \in I$, $j \notin E$, el conjunto $\{i \in E / (f_i | f_j) \leq (n, 1_n^i)\} \neq \emptyset$ es el mismo que $\{i \in E / v_j(h_E) = (f_i, f_j)/e_n^i\}$ y por tanto si i, k son dos elementos de uno de los conjuntos anteriores se tiene necesariamente

$$\xi_{ij} e_n^k = \xi_{kj} e_n^i$$

3.3.6 Definición.- Sea n un entero, $n \geq 0$; C una curva algebroide, plana y reducida con d ramas. Sea $B^n(C) = \{h_n^1, h_n^2, \dots, h_n^s\}$. Llamaremos valores del contacto maximal de género n al conjunto

$$V^n(C) = \{\underline{v}(h_n^1), \dots, \underline{v}(h_n^s)\} \subset \bar{S}.$$

Si las componentes de la curva C tienen todas ellas la misma tangente, llamaremos valor del contacto maximal de género -1 al punto multiplicidad $(\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_0^d)$. En caso contrario tomaremos $V^{-1}(C) = \emptyset$.

Llamaremos valores del contacto maximal de C al subconjunto de \bar{S} :

$$V(C) = \bigcup_{n=-1}^m V^n(C) \text{ donde } m = \sup\{g_1, \dots, g_d\}$$

3.3.7 Nota.- a) Si C tiene más de una tangente, es decir $\gamma^0 = P_0 = \min(S - \{0\})$, y P^1, \dots, P^s son los valores del contacto

maximal de género cero se tiene claramente que $(\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_0^{-d}) = \inf\{P^1, \dots, P^s\}$ con lo que en este caso no es necesario incluir el punto $(\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_0^{-d})$.

Esta y otras razones ^(3.4e) veremos en el epígrafe siguiente (3.4) aconsejan la distinción que hemos hecho con $V^{-1}(C)$.

b) Si tomamos $n = g_i$ para un índice $i \in I$, en B^{g_i} aparece la curva f_i , pues es la única curva irreducible con contacto maximal de género g_i consigo misma. Se tiene entonces que $v_i(f_i) = \infty$ y por lo tanto $V(C)$ no está nunca contenido en S , sino en \bar{S} .

c) Además, puesto que C es una curva reducida es claro que los elementos de $V(C) \subset \bar{S}$ tienen a lo sumo una coordenada igual a ∞ y esto, unido al comentario anterior, nos dice que el conjunto

$$V_\infty(C) = \{\gamma \in V(C) / \gamma \notin S\}$$

es un conjunto de cardinal exactamente igual al número de ramas de la curva y está formado por

$$V_\infty(C) = \{\underline{v}(f_1), \underline{v}(f_2), \dots, \underline{v}(f_d)\}.$$

d) Al conjunto $V(C) \cap S = V(C) - V_\infty(C) = \bar{V}(C)$ lo denominaremos conjunto de valores del contacto maximal finitos. Veremos en el epígrafe siguiente que juega un papel destacado en la generación del semigrupo.

e) Las definiciones anteriores y el apartado b) de esta misma nota, ponen ya de manifiesto que $V(C)$ es un buen invariante para la clase de equisingularidad de la curva C , es decir C es equisingular a D si y sólo si para una reordenación de los índices $\{1, \dots, d\}$ es $V(C) = V(D)$. Más tarde veremos la relación algorítmica entre el A.C.P. de C y el conjunto $V(C)$.

3.3.8 Nota.- Sea $f = \prod_{i=1}^d f_i \in k[[X,Y]]$ la ecuación de la curva reducida $C = \text{Spec}(k[[X,Y]]/(f))$ y sea $(f_1 | \dots | f_d) = (q, c)$.

Consideramos los subconjuntos de I :

$$J_1 = \{i \in I / c = 1 \frac{i}{q} + 1\}$$

$$J_2 = \{i \in I / c \leq 1 \frac{i}{q}\}$$

Es claro que J_1 y J_2 son unión de clases de equivalencia para la relación R_{γ_0} , denotaremos por I_1, \dots, I_s las clases de equivalencia contenidas en J_2 y por I_{s+1}, \dots, I_r las clases contenidas en J_1 .

3.3.9 Teorema.- Con las notaciones anteriores se tiene:

A) Si $n < q$ $M^n = \{I\}$.

B) Para $n = q$ son equivalentes:

B-1) $E \in M^q(C)$.

B-2) Existe una clase de equivalencia para R_{γ_0} , $I_i \in J_2$ y $E_i \in M^q(C_{I_i})$ tal que $E = J_1 \cup E_i$.

B-3) Existe un maximal $E_{J_2} \in M^q(C_{J_2})$ tal que $E = J_1 \cup E_{J_2}$.

C) Si $n > q$ $M^n(C) = \bigcup_{i=1}^r M^n(C_{I_i})$.

Demostración:

A) Es evidente por 1.2.3.

B) Por el Lema 3.3.3 si $i, j \in J_2$ y $i R_{\gamma_0} j$ entonces $\{i, j\}$ no está contenido en ningún conjunto maximal de $T^q(C)$. Esto en particular

nos dice que $M^q(C_{J_2}) = \bigcup_{i=1}^s M^q(C_{I_i})$ y nos proporciona de manera

inmediata la equivalencia entre B-2 y B-3 pues E_{J_2} maximal de $T^q(C_{J_2})$ si y sólo si $E_{J_2} \subset I_i \subset J_2$ y E_{J_2} maximal de $T^q(C_{I_i})$.

De nuevo por el Lema 3.3.3 existe una curva con contacto maximal de género q con todas las ramas correspondientes al conjunto de índices $J_1 \cup \{i\}$ para $i \in J_2$. De aquí es inmediato que

$E \in M^q(C) \iff \exists i \in \{1, \dots, s\}$ y $E_i \in M^q(C_{I_i})$ con $E = J_1 \cup E_i$ y tenemos demostrado B).

C) Sea $n > q$ y E un conjunto maximal de $T^n(C)$, sean $i \in E, j \in I$ con $i \not\prec_{\gamma} j$; entonces $(f_i | f_j) = (q, c)$ (ó $(q+1, 0)$ si $c = l_q^i + 1$) y se tiene $v_j(h_E) = \xi_{ij} / e_n^i \neq \bar{\beta}_{n+1}^j$ con lo que necesariamente $j \notin E$ y por tanto $E \subset I_i$ ($\exists i \in \{1, \dots, r\}$) de donde se tiene el apartado C).

3.3.10' Nota.- Observemos que, en el Teorema anterior, si $J_2 = \emptyset$; es decir $c = l_q^i + 1 \quad \forall i \in I$, entonces hay un único conjunto maximal en $T^q(C)$ y por tanto es precisamente I . Lo mismo ocurre si $\forall i, j \in J_2$ se tiene $(f_i | f_j) \geq (q, \min\{l_q^i + 1, l_q^j + 1\})$.

Puesto que esta última condición se tiene también para los índices de J_1 podemos asegurar que:

$$M^q(C) = \{I\} \iff \forall i, j \in I \quad (f_i | f_j) \geq (q, \min\{l_q^i + 1, l_q^j + 1\}).$$

Por otra parte, si $J_1 = \emptyset$, es decir $c \leq l_q^i \quad \forall i \in I$ es claro

$$M^q(C) = \bigcup_{i=1}^r M^q(C_{I_i})$$

3.3.1 Corolario.- En las condiciones de Teorema 3.3.9, los valores del contacto maximal de C son:

A) $\forall n < q \quad V^n(C) = \{(\bar{\beta}_{n+1}^1, \dots, \bar{\beta}_{n+1}^d)\}$.

B) Si $n = q$ y se tiene $B^q(C_{J_2}) = \{h_q^1, \dots, h_q^s\}$ entonces

$$V^q(C) = \{\underline{v}(h_q^1), \dots, \underline{v}(h_q^s)\}.$$

C) Si $n > q$ $V^n(C) = \bigcup_{i=1}^n \{ \underline{v}(h_{E_i}) / E_i \in M^n(C_{I_i}) \}.$

La demostración es evidente de 3.3.9.

3.3.12 Teorema. - En las condiciones y con las notaciones de 3.3.9. Supongamos conocidos los valores del contacto maximal de género q para las curvas C_{I_1}, \dots, C_{I_s} . Entonces $P \in V^q(C)$ si y sólo si existe un valor del contacto maximal $P_{I_j} \in V^q(C_{I_j}), j \in \{1, \dots, s\}$ verificando

$$\text{pr}_{I_j}(P) = P_{I_j}$$

$$\text{pr}_{I_k}(P) = \text{pr}_{I_k}(\gamma^0), 1 \leq k \leq r, k \neq j.$$

Demostración:

Por el Teorema 3.3.9, $P \in V^q(C)$ si y sólo si existen $j \in \{1, \dots, s\}$ y $E \in M^q(C_{I_j})$ de manera que $P = \underline{v}(h_E)$, puesto que la existencia de $E \in M^q(C_{I_j})$ es equivalente a la existencia de $P_{I_j} \in V^q(C_{I_j})$ con $\underline{v}(h_E) = P_{I_j}$.

Si $i \in J_1$, es decir $c = l_{q+1}^i, v_i(h_E) = \bar{\beta}_{q+1}^i$ (por 3.3.3), puesto que $\gamma_i^0 = \bar{\beta}_{q+1}^i$ se tiene que $v_i(h_E) = \gamma_i^0$ y como consecuencia

$$\text{pr}_{J_1}(P) = \text{pr}_{J_1}(\gamma^0)$$

Sea $i \in I_k \subset J_2; k \neq j$ se tiene entonces, para $n \in I_j$:

$$\begin{aligned} v_i(h_E) &= e_{q-1}(h_E) \bar{\beta}_q^i + c e_q(h_E) e_q^i = \\ &= (e_{q-1}^n / e_q^n) \bar{\beta}_q^i + c (e_q^n / e_q^n) e_q^i = \\ &= (e_{q-1}^i / e_q^i) \bar{\beta}_q^i + c (e_q^i / e_q^i) e_q^i = \gamma_i^0 \end{aligned}$$

y por tanto $\text{pr}_{I_k}(P) = \text{pr}_{I_k}(v(h_E)) = \text{pr}_{I_k} \gamma_i^0$.

3.3.13 Teorema.- En las condiciones y con las notaciones de 3.3.9. Supongamos conocidos los valores del contacto maximal de género $n > q$ para las curvas $C_{I_1}, C_{I_2}, \dots, C_{I_r}$. $P \in V^n(C)$ si y sólo si existe un índice $j \in \{1, \dots, r\}$ y un valor del contacto maximal $P_{I_j} \in V^n(C_{I_j})$ verificando:

$$\text{pr}_{I_j}(P) = P_{I_j}$$

$$P_{I_k} = N_n^i \dots N_{q+1}^i \left(\min \{ \gamma_{I_k}^0, \frac{\gamma_i^0}{e_q^i} (e_{-q} e_{I_k}^i) \} \right)$$

$$\forall i \in E \text{ y } \forall I_k \neq I_j.$$

Donde $N_r^i = e_{r-1}^i / e_r^i$, $e_{-q} = (e_q^1, \dots, e_q^d)$ y $\text{pr}_r e_{I_k} = \begin{cases} 1, & r \in I_k \\ 0, & r \notin I_k \end{cases}$

Demostración:

Consideramos la clase de equivalencia I_k con $k \neq j$ (nótese que la primera afirmación del Teorema es clara por 3.3.9), y los índices $r, s \in I_k$; $i, t \in I_j$; se tiene entonces

$$\gamma_i^0 e_q^t = \gamma_t^0 e_q^i, \gamma_r^0 e_q^s = \gamma_s^0 e_q^r \quad (\text{por 1.3.10})$$

Esto nos dice, en particular, que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} & \exists r \in I_k, \exists i \in I_j \text{ tal que } \gamma_r^0 \leq (\gamma_i^0 / e_q^i) e_q^r \\ & \exists r \in I_k \text{ tal que } \gamma_r^0 \leq (\gamma_i^0 / e_q^i) e_q^r, \forall i \in I_j \\ & \gamma_r^0 > (\gamma_i^0 / e_q^i) e_q^r, \forall i \in I_j, \forall r \in I_k \\ & \gamma_{I_r}^0 \geq (\gamma_i^0 / e_q^i) (e_{-q} \epsilon_{I_r}), \forall i \in I_j. \end{aligned}$$

Así pues el término $\min\{\gamma_{I_r}^0, (\gamma_i^0 / e_q^i) (e_{-q} \epsilon_{I_r})\}$ no depende del índice $i \in I_j$ elegido y además está bien expresado en el sentido de que uno de los dos términos es menor o igual que el otro para el orden producto en \mathbb{Z}_+^d . Puesto que P_{I_j} corresponde a un conjunto maximal E de $T^n(C_{I_j})$, es $E \subset I_j$ y la expresión anterior es independiente del índice $i \in E$.

Sean $r \in I_k, i \in E$; se tiene entonces (3.3.3)

$$\begin{aligned} v_r(h_E) &= pr_r(P) = (f_i, f_r) / e_n^i = (1/e_n^i) \min\{e_q^r \gamma_i^0, e_q^i \gamma_r^0\} = \\ &= (e_q^i / e_n^i) \min\left\{\frac{e_q^r}{e_q^i} \gamma_i^0, \gamma_r^0\right\} = \\ &= N_n^i \dots N_{q+1}^i \cdot \min\{\gamma_r^0, (\gamma_i^0 / e_q^i) e_q^r\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos ya

$$P_{I_k} = N_n^i \dots N_{q+1}^i \min\{\gamma_{I_k}^0, (\gamma_i^0 / e_q^i) (e_{-q} \epsilon_{I_k})\}.$$

3.3.14 Nota.— Explicitaremos las fórmulas del Teorema anterior distinguiendo dos casos:

A) $I_j \subset J_2$:

Sea $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ tal que $I_k \subset J_2$ y un índice $s \in I_k$,

se tiene entonces $e_q^i \gamma_s^0 = e_q^s \gamma_i^0$, $\forall i \in I_j$, es decir

$$\gamma^0 \epsilon_{I_k} = (\gamma_i^0 / e_q^i) (e_{-q}^i \epsilon_{I_k}) \text{ y por lo tanto}$$

$$P_{\epsilon_{I_k}} = N_n^i \dots N_{q+1}^i (\gamma^0 \epsilon_{I_k}) = N_n^i \dots N_{q+1}^i (\gamma_i^0 / e_q^i) (e_{-q}^i \epsilon_{I_k}).$$

Si tomamos $s \in I_k \subset J_1$ se tendrá:

$$(f_i, f_s) = e_q^i \beta_{q+1}^{-s} = e_q^i \gamma_s^0 < e_q^s \gamma_i^0, \forall i \in I_j \text{ (v. 1.2.10)}$$

y por lo tanto $v_s(h_E) = N_n^i \dots N_{q+1}^i \gamma_s^0$, es decir

$$P_{\epsilon_{I_k}} = N_n^i \dots N_{q+1}^i (\gamma^0 \epsilon_{I_k}), \forall i \in E$$

Concluyendo, si $i \in I_j \subset J_2$ se tiene: —

$$pr_{I_j}(P) = P_{I_j}$$

$$P_{\epsilon_{I_k}} = N_n^i \dots N_{q+1}^i (\gamma^0 \epsilon_{I_k}) \quad \forall k \neq j, k \in \{1, \dots, r\}$$

B) $I_j \subset J_1$:

Si $s \in I_k \subset J_2$ se tiene, para $i \in I_j$

$$(f_i, f_s) = e_q^s \beta_{q+1}^{-i} = e_q^s \gamma_i^0 < e_q^i \gamma_s^0, \text{ por lo tanto}$$

$$P_{\epsilon_{I_k}} = N_n^i \dots N_{q+1}^i (\gamma_i^0 / e_q^i) (e_{-q}^i \epsilon_{I_k}), \forall i \in E$$

Ahora bien, si $s \in I_k \subset J_1$ pueden darse a priori ambas posibilidades, es decir el resultado no se puede precisar más que en el enunciado del teorema:

$$P_{\epsilon_{I_k}} = \begin{cases} N_n^i \dots N_{q+1}^i (\gamma^0 \epsilon_{I_k}) & \text{si } e_q^i \gamma_s^0 \leq e_q^s \gamma_i^0 \\ N_n^i \dots N_{q+1}^i (\gamma_i^0 / e_q^i) (e_{-q}^i \epsilon_{I_k}) & \text{si } e_q^i \gamma_s^0 \geq e_q^s \gamma_i^0 \end{cases}$$

para $i \in E, s \in I_k$.

3.3.15 Cálculo de $V(C)$ a partir del A.C.P.

Sea C una curva algebroide, reducida con d componentes irreducibles C_1, \dots, C_d . Supongamos conocido el A.C.P., D , de la curva C descrito en 1.3, en este apartado daremos el procedimiento algorítmico de cálculo de los valores del contacto maximal de C , $V(C)$, a partir de D .

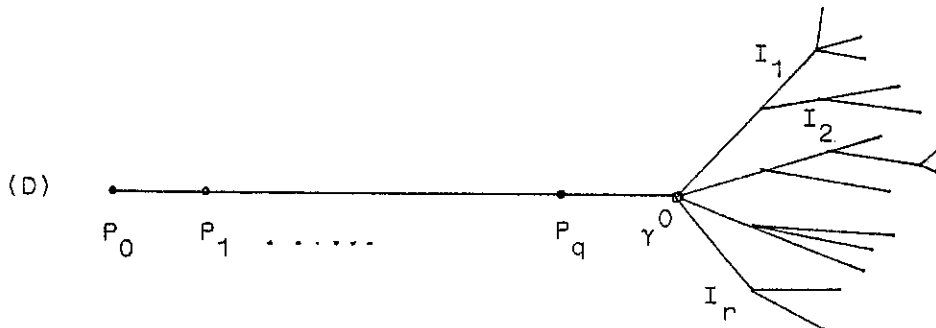
Razonaremos por inducción sobre el número d , número de ramas de la curva.

Nótese que el caso $d = 1$ es trivial, pues D es



y claramente $\bar{V}(C) = \{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_g\}$.

Sean I_1, \dots, I_r las clases de equivalencia para R_{γ^0} del conjunto de índices $I = \{1, 2, \dots, d\}$ y denotaremos por $D \epsilon_{I_n}$, $n = 1, 2, \dots, r$ el A.C.P. correspondiente a la curva $f_{I_n} = \prod_{i \in I_n} f_i$. Recordemos que $D \epsilon_{I_n}$ se obtiene de D dejando únicamente las ramas correspondientes al conjunto de índices I_n y proyectando los pesos sobre dicho conjunto.



a) Si $n < q$ se tiene $V^n = \{P_{n+1}\}$. Los conjuntos J_1 y J_2 de 3.3.8 se pueden caracterizar mediante estos datos como:

$$J_1 = \{i \in I / \text{m.c.d.}(e_q^i, \gamma_i^0) < e_q^i\}$$

$$J_2 = \{i \in I / \text{m.c.d.}(e_q^i, \gamma_i^0) = e_q^i\}.$$

Supongamos $J_2 = I_1 \cup \dots \cup I_s$, $J_1 = I_{s+1} \cup \dots \cup I_r$.

b) Por hipótesis de inducción podemos suponer conocidos los valores del contacto maximal de género q de $C_{I_1}, C_{I_2}, \dots, C_{I_s}$.

Si P_{I_j} es un valor del contacto maximal de C_{I_j} , ($1 \leq j \leq s$), de género q por el Teorema 3.3.12 el elemento $P \in \bar{S}$ definido por

$$\text{pr}_{I_j}(P) = P_{I_j}$$

$$P \varepsilon_{I_k} = \gamma \varepsilon_{I_k}^0 \quad \forall k \in \{1, \dots, r\}, k \neq j.$$

es un valor del contacto maximal de género q de C . Además el mismo Teorema nos asegura que por este procedimiento obtenemos todo el conjunto $V^q(C)$.

c) Si $n > q$, suponemos conocidos por hipótesis de inducción los conjuntos $V^n(C_{I_1}), \dots, V^n(C_{I_r})$ y por el Teorema 3.3.13 sabemos que $V^n(C)$ se puede obtener de la manera siguiente:

Si $P_{I_j} \in V^n(C_{I_j})$ es el valor del contacto maximal correspondiente a $E \in M^n(C_{I_j})$, el punto $P \in \bar{S}$ construido como:

$$\text{Pr}_{I_j}(P) = P_{I_j}$$

$$P \varepsilon_{I_k} = N_n^i \dots N_{q+1}^i \cdot \min\{\gamma \varepsilon_{I_k}^0, (\gamma_i^0 / e_q^i)(e_{-q} \varepsilon_{I_k}^i)\}; i \in E$$

es uno de los valores del contacto maximal de género n .

Nótese que el procedimiento, a la vista del árbol D , es bas

tante simple, pues en él aparecen de forma manifiesta los contactos maximales como pesos en sitios que no son nudos; siendo la analogía casi completa cuando los pesos γ_A^0 de los nudos están en la recta $\text{pr}_A(L)$.

3.3.16 Proposición.— Con las notaciones habituales, sea $A \subset I$ y $f_A = \prod_{i \in A} f_i$, $C_A = \text{Spec}(k[[X, Y]] / (f_A))$. El conjunto $M^n(A)$ está formado por los conjuntos maximales, para la contención, de la familia:

$$\{E \cap A / E \in M^n(C)\}.$$

Demostración: Si $E_A \in M^n(C_A)$ es claro que $E_A \in T^n(C)$ y existe entonces un conjunto maximal $F \in M^n(C)$ con $E_A \subset F$. Puesto que $E_A \in M^n(C_A)$ es claro que $F \cap A = E_A$ y tenemos probado que $M^n(C_A) \subset \text{Max}\{E \cap A / E \in M^n(C)\}$.

La otra contención es evidente.

Nótese que este resultado permite calcular también de manera muy simple los valores del contacto maximal de género n , formando primero $V = \{\text{pr}_A(P) / A \in V^n(C)\}$ y quedándonos con los elementos maximales de $V \subset \mathbb{Z}_+^{\#A}$ para la relación de orden producto en $\mathbb{Z}_+^{\#A}$.

3.3.17 Nota.— Consideremos dos índices $i, j \in I$ con $i \neq j$, existe siempre $n \leq \sup\{g_i, g_j\}$ de manera que se verifican las dos condiciones siguientes:

- a) No existe un conjunto maximal de $T^n(C)$ conteniendo $a\{i, j\}$.
- b) n es el menor entero verificando la condición a). (Es equivalente a tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m < n$ existe una curva h con

contacto maximal de género m simultáneamente para f_i y f_j y no existen curvas con contacto maximal de género n con f_i y f_j ó también a $\{(i,j) \in T^m(C) \ \forall m < n, (i,j) \notin T^n(C)\}$.

$$\text{Sean } d_{n-1} = \min\{l_{n-1}^i, l_{n-1}^j\}$$

$$d_n = \min\{l_n^i, l_n^j\}.$$

y supongamos conocidas las clases de equisingularidad de las curvas f_i y f_j .

La condición b) en la definición de n nos permite asegurar que $(f_i|f_j) \geq (n-1, d_{n-1}+1)$, y la condición a) que $(f_i|f_j) \leq (n, d_n)$.

Existe $P_{n-1} \in V^{n-1}(C)$ verificando $\text{pr}_i(P_{n-1}) = \bar{\beta}_n^i$ y $\text{pr}_j(P_{n-1}) = \bar{\beta}_n^j$.

Se tiene entonces la siguiente cadena de equivalencias:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \bar{\beta}_n^i \bar{\beta}_0^j \neq \bar{\beta}_0^i \bar{\beta}_n^j. \\ \text{ii) } (f_i|f_j) = (n-1, d_{n-1}+1) \\ \text{iii) } (f_i, f_j) = \min\{e_{n-1}^i \bar{\beta}_n^j, e_{n-1}^j \bar{\beta}_n^i\} \\ \text{iv) } \text{Si } k \in \{i, j\}, \text{pr}_k(\gamma_{ij}^0) = \begin{cases} \bar{\beta}_n^k & \text{si } d_{n-1} = l_{n-1}^k \\ N_{n-1}^k \bar{\beta}_{n-1}^k + (d_{n-1}+1)e_n^k & \text{si } d_{n-1} < l_{n-1}^k \end{cases} \\ \text{v) } \text{pr}_i(P_{n-1}) \bar{\beta}_0^j \neq \text{pr}_j(P_{n-1}) \bar{\beta}_0^i \end{array} \right.$$

Por supuesto también se tiene la cadena de equivalencias:

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \bar{\beta}_n^i \bar{\beta}_0^j = \bar{\beta}_0^i \bar{\beta}_n^j. \\ \text{ii) } (f_i|f_j) = (n, c) \leq (n, d_n), \exists c, 0 \leq c \leq d_n. \\ \text{iii) } (f_i, f_j) = e_{n-1}^i \bar{\beta}_n^j + ce_n^i e_n^j, \exists c, 0 \leq c \leq d_n. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{iv) } pr_k(\gamma_{ij}^0) = N_n^k \bar{\beta}_n^k + ce_n^k, k \in \{i, j\}. \\ \text{v) } pr_i(P_{n-1}) \bar{\beta}_0^j = pr_j(P_{n-1}) \bar{\beta}_0^i. \end{array} \right.$$

Si se tiene una de las condiciones equivalentes (***) consideramos los valores del contacto maximal de género n ; $P_n^i, P_n^j \in V^n(C)$ verificando $pr_i(P_n^i) = \bar{\beta}_{n+1}^i, pr_j(P_n^j) = \bar{\beta}_{n+1}^j$. Puesto que en estas condiciones se tiene $(f_i | f_j) \leq (n, d_n)$ se tiene entonces

$$pr_j(\gamma_{ij}^0) = pr_j(P_n^i)$$

$$pr_i(\gamma_{ij}^0) = pr_i(P_n^j)$$

con lo que $V(C)$ nos permite determinar γ_{ij}^0 para dos índices $i, j \in I, i \neq j$. Recordemos que γ_{ij}^0 es elemento del semigrupo $S(f_i f_j) = S_{\epsilon_{\{i, j\}}}$ definido como γ^0 , es decir

$$\gamma_{ij}^0 = \max\{\mu \in S(f_i f_j) / S(f_i f_j) \subset L \cup S(f_i f_j)(\mu)\}$$

(ver 1.2.6, 1.3.9).

3.3.18 Cálculo del A.C.P. a partir de $V(C)$.

Nuestro dato inicial es ahora el conjunto de valores del contacto maximal, $V(C)$, de la curva C . Es claro que podemos determinar de una forma muy simple la multiplicidad de intersección de dos ramas utilizando $V_\infty(C) = \{\underline{v}(f_i) / i \in I\}$ y a partir de aquí el árbol $D(C)$. El procedimiento que daremos aquí proporciona directamente el árbol $D(C)$ con la ventaja adicional de permitirnos caracterizar los casos en que podemos utilizar los valores del contacto maximal finitos -que son elementos de S -, únicamente, para determinar $D(C)$.

a) Sea $i \in I$, consideramos $\text{pr}_i(V(C)) = \{\text{pr}_i(P) / P \in V(C)\}$. Es claro que $\{\bar{\beta}_0^i, \dots, \bar{\beta}_{g_i}^i\} \subset \text{pr}_i(V(C)) \subset \bar{S}_i$ y podemos determinar la clase de equisingularidad de la rama f_i . Observemos que

$$\bar{\beta}_0^i = \min(\text{pr}_i(V(C))); \quad e_0^i = \bar{\beta}_0^i$$

.....

$$\bar{\beta}_n^i = \min\{\gamma \in \text{pr}_i(V(C)) / \text{m.c.d.}(\gamma, e_{n-1}^i) < e_{n-1}^i\}, e_n^i = \text{m.c.d.}(\bar{\beta}_n^i, e_{n-1}^i)$$

b) Podemos distribuir los elementos de $V(C)$ en paquetes de la manera siguiente:

$$V^n(C) = \{P \in V(C) / \exists i \in I \text{ con } \text{pr}_i(P) = \bar{\beta}_{n+1}^i\}$$

para $-1 \leq n \leq \sup\{g_i / i \in I\}$, y para cada elemento $P \in V^n(C)$ podemos considerar

$$E_p^n = \{i \in I / \text{pr}_i(P) = \bar{\beta}_{n+1}^i\} \in M^n(C)$$

Sea q el mayor entero verificando las condiciones:

$\forall n < q \quad V^n(C) = \{(\bar{\beta}_{n+1}^1, \dots, \bar{\beta}_{n+1}^d)\}$ y $\bar{\beta}_{n+1}^i \cdot \bar{\beta}_0^j = \bar{\beta}_{n+1}^j \cdot \bar{\beta}_0^i; \forall i, j \in I$, es claro que q es el primer entero del par de contacto de f_1, \dots, f_d y que el único elemento de $V^n(C)$ es el contacto principal P_{n+1} .

c) Si $V^q(C) = \{P_q^1, \dots, P_q^s\}, M^q(C) = \{E_q^1, \dots, E_q^s\}$ consideramos el conjunto

$$A = \bigcap_{i=1}^s E_q^i, \text{ se tiene claramente } J_1 \subset A.$$

Si tenemos $A \neq \emptyset$, $c = \min\{l_q^i + 1 / i \in A\}$ es el segundo entero del par de contacto de f_1, \dots, f_d , y podemos determinar γ_i^0 , pues

$$\gamma_i^0 = \bar{\beta}_{q+1}^i \quad \text{si } c = l_q^i + 1$$

$$\gamma_i^0 = N_q^i \bar{\beta}_q^i + c e_q^i \quad \text{si } c \leq l_q^i$$

Si se tiene $A = \emptyset$, también es $J_1 = \emptyset$ y se tiene directamente

$$\gamma^0 = \inf\{P_q^1, P_q^2, \dots, P_q^s\}$$

pues J_2 tiene más de una clase de equivalencia, y por 3.3.12 se tiene el resultado.

La nota 3.3.17 nos proporciona también un método para calcular el par de contacto $(f_1 | \dots | f_d)$ mediante el cálculo de $(f_i | f_j)$ $\forall i, j \in I$.

d) Nos resta únicamente calcular R_{γ^0} . Para ello tengamos en cuenta en primer lugar que J_1 y J_2 son unión de clases de equivalencia.

Sean $k, j \in J_2$ y supongamos $k \in E_q^i \cap J_2$ ($\exists i \in \{1, \dots, s\}$)

se tiene entonces

$$kR_{\gamma^0}j \iff \text{pr}_j(P_q^i) > \gamma_j^0$$

En efecto, pues $kR_{\gamma^0}j \iff (f_i | f_k) = (q, c) \iff \text{pr}_j(P_q^i) = \gamma_j^0$.

Si consideramos $k, j \in J_1$, existe $E \in M^{q+1}(C)$ de manera que $k \in E$, sea P_E el valor del contacto maximal asociado a E , se tiene $\text{pr}_k(P_E) = \bar{\beta}_{q+2}^k$ y entonces

$$kR_{\gamma^0}j \iff \text{pr}_j(P_E) > N_{q+1}^k \bar{\beta}_{q+1}^j = N_{q+1}^k \gamma_j^0$$

Obsérvese que también podemos calcular γ_{ij}^0 , $\forall i, j \in I$ mediante 3.3.17 y utilizando 1.3.10 se tendrá

$$iR_{\gamma^0}j \iff N_*^i = N_*^j \text{ y } \gamma_{ij}^0 > N_*^i(\gamma_i^0, \gamma_j^0)$$

siendo
$$N_*^i = \begin{cases} 1 & \text{si } c \leq l_q^i \\ N_{q+1}^i & \text{si } c = l_{q+1}^i \end{cases}$$

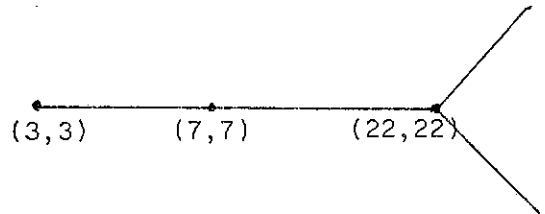
e) Consideramos ahora $V(C_{I_i})$; $i = 1, 2, \dots, r$ (3.3.16) y continuamos inductivamente el proceso en cada una de las ramas del árbol.

3.3.19 Nota.- Observemos que el conjunto de valores del contacto maximal finitos, $\bar{V}(C) = V(C) - V_\infty(C)$, no es en general suficiente para determinar la clase de equisingularidad de la curva C. Por ejemplo, si

$$a) \quad f_1: \begin{cases} y = x^2 + x^2 z_1 \\ x = z_1^3 + z_1^4 \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} y = x^2 + x^2 z_1 \\ x = z_1^3 \end{cases}$$

se tiene entonces $\bar{\beta}_0^1 = \bar{\beta}_0^2 = 3$; $\bar{\beta}_1^1 = \bar{\beta}_1^2 = 7$, el par de contacto es $(f_1|f_2) = (1,1)$ y $\gamma^0 = (22,22)$.

El A.C.P. de la curva resulta ser



y los valores del contacto maximal son

$$\begin{aligned} V^{-1}(C) &= \{(3,3)\} \\ V^0(C) &= \{(7,7)\} \\ V^1(C) &= \{(\infty, 22), (22, \infty)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{V}(C) = \{(3,3), (7,7)\}$ y es claro que $\bar{V}(C)$ no determina la clase de equisingularidad de C, pues $(f_1, f_2) = 22$ es imposible de calcular con estos datos tan sólo.

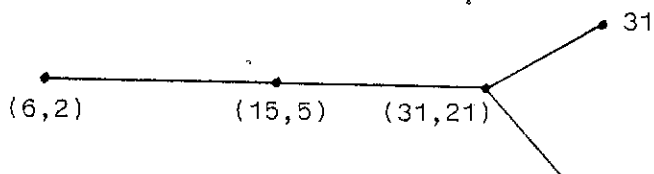
El ejemplo resulta ilustrativo, porque nos proporciona una gama amplia de ejemplos:

Sea C una curva reducida con dos ramas equisingulares C_i, C_j tales que su multiplicidad de intersección es $(C_i, C_j) \geq e_{g_{i-1}}^i \bar{\beta}_{g_i}^i$, entonces $\bar{V}(C)$ no determina la clase de equisingularidad de la curva f.

b) Consideramos ahora las curvas con desarrollo de H-N

$$f_1: \begin{cases} y = x^2 + x^2 z_1 \\ x = z_1^2 + z_1^2 z_2 \\ z_1 = z_2^3 \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} y = x^2 + x^2 z_1 \\ x = z_1^2 \end{cases}$$

En este caso resulta que el A.C.P es:



y el conjunto de valores del contacto maximal

$$V = \{(6,2), (15,5), (\infty, 31), (31, \infty)\}.$$

Como en el caso anterior es claro que $\bar{V}(C) = \{(6,2), (15,5)\}$ no determina la clase de equisingularidad de C. De hecho podemos afirmar que si C es una curva reducida con d ramas, tales que existen C_i, C_j con $g_i < g_j$ y C_i tiene contacto maximal de género g_i con C_j el conjunto $\bar{V}(C)$ no determina la clase de equisingularidad.

Se pueden dar algunas condiciones suficientes para que $\bar{V}(C)$ determine la clase de equisingularidad de C, por ejemplo si en el A.C.P. D no aparecen "ramas terminales sin ningún peso"

($\iff (f_i | f_j) < (d, 0)$ donde $d = \min\{g_i, g_j\}$, $\forall i, j \in I$) $\bar{V}(C)$ determina por completo la clase de equisingularidad de C.

3.3.20 Ejemplos.- Calcularemos los valores del contacto maximal para los ejemplos que hemos visto ya en 1.3.12.

A) Caso irreducible:

$$\bar{V}(C) = \{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_g\}$$

B) Caso diagonal:

$$V(C) = \{P_0, P_1, \dots, P_g, P_\infty^1, P_\infty^2, \dots, P_\infty^d\}$$

donde $P_v = (\bar{\beta}_v, \bar{\beta}_v, \dots, \bar{\beta}_v) \quad 0 \leq v \leq g$

$$pr_i(P_\infty^k) = \begin{cases} \infty & \text{si } i=k \\ (f_i, f_k) & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

C) Caso multitangente: Supongamos que $\#I/R_{\gamma_0} = d$, es decir que todas las ramas son transversales.

$$V(C) = \{P_j^i / 1 \leq i \leq d; 1 \leq j \leq g_i + 1\}$$

donde:

$$pr_k(P_j^i) = \begin{cases} \bar{\beta}_j^i & \text{si } k=i \\ (f_i, f_k)/e_{j-1}^i & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

D) Tomamos f_1, f_2, f_3, f_4 como en D) 1.3.12, se tienen los contactos maximales:

$P_0 = (20, 20, 20, 20)$	$P_3^1 = (495, 494, 488, 488)$
$P_1 = (48, 48, 48, 48)$	$P_3^2 = (494, 495, 488, 488)$
$\overset{I_1}{P_2^1} = (246, 246, 244, 244)$	$P_3^3 = (488, 488, 495, 494)$
$\overset{I_2}{P_2^2} = (244, 244, 246, 246)$	$P_3^4 = (488, 488, 494, 495)$

E) En el ejemplo E) de 1.3.12:

$P_0 = (9, 9, 15)$	$P_\infty^1 = (\infty, 138, 230)$
$P_1 = (15, 15, 25)$	$P_\infty^2 = (138, \infty, 246)$
$P_2 = (46, 50, 82)$	$P_\infty^3 = (230, 246, \infty)$

3.4 UNA DETERMINACION EXPLICITA DEL SEMIGRUPO

3.4.0 Introducción.— En este epígrafe relacionaremos los maximales absolutos del semigrupo de una curva plana con los valores del contacto maximal finitos de la misma introducidos en el epígrafe anterior. Concretamente, veremos que los valores del contacto maximal son datos suficientes para determinar explícitamente si un elemento de \mathbb{Z}_+^d está o no en el semigrupo S (ver Teorema 3.4.14 a continuación).

De la misma forma que en el epígrafe 2 del presente capítulo S denotará siempre el semigrupo de valores de una curva algebroide, plana y reducida C con d ramas de ecuaciones $f_1, f_2, \dots, f_d \in k[[X, Y]]$.

3.4.1 Definición.— Sea $\alpha \in S$, diremos que α es irreducible en S si para $\gamma^1, \gamma^2 \in S$ tales que $\alpha = \gamma^1 + \gamma^2$ entonces $\gamma^1 = 0$ ó $\gamma^2 = 0$. En caso contrario diremos que α es reducible. (Véase 1.2.5).

3.4.2 Nota.— a) Si α es maximal y tenemos $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2$ es trivial demostrar que α^1 y α^2 son maximales (ver por ejemplo 3.2.26 i)). Aún más, con la misma técnica se puede probar que si α es maximal absoluto entonces α^1 y α^2 son también maximales absolutos.

b) Si α es un maximal absoluto, es claro que podemos escribir $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha^i$ donde los α^i son maximales absolutos irreducibles.

Una consecuencia de este hecho es que el conjunto de maximales irreducibles, que denotaremos MAI, es un dato suficiente para calcular el conjunto de maximales absolutos MA.

c) Si $\alpha \in S$ es irreducible, existe $h \in k[[X, Y]]$ tal que $v(h+f) = \alpha$ y por ser α irreducible en S es claro que entonces h es irreducible y define por lo tanto una curva irreducible plana sobre k .

d) Denotaremos por $\bar{V}(C)$ el conjunto de valores del contacto maximal finitos, es decir $\bar{V}(C) = V(C) \cap S$.

En primer lugar probaremos el siguiente resultado:

3.4.3 Teorema.- (Cálculo de los maximales absolutos irreducibles). Se tiene que $\alpha \in S$ es un maximal absoluto irreducible si y sólo si α es uno de los valores del contacto maximal finitos.

Haremos la prueba convenientemente fragmentada debido a su complejidad.

3.4.4 Lema.- Sea $\alpha \in S$ y supongamos que existe $i_0 \in I$ con la condición $\Delta_{i_0}^d(\alpha) - \{\alpha\} = \emptyset$, entonces α es un maximal absoluto.

Demostración.- Sea $J \subset I$, $\emptyset \neq J \neq I$, supongamos que existe $\beta \in \Delta_J(\alpha)$. Si se tiene $i_0 \in J$ entonces $\Delta_J(\alpha) \subset \Delta_{i_0}^d(\alpha) - \{\alpha\}$ lo que es contradictorio, por lo tanto es $i_0 \notin J$.

Sea $j_0 \in J$, se tiene para β : $\beta_{i_0} > \alpha_{i_0}$ y $\beta_{j_0} = \alpha_{j_0}$; aplicando la propiedad P4 de 3.1.0 a los elementos α y β para el índice j_0 existirá $\gamma \in S$ tal que:

$$\gamma_{i_0} = \alpha_{i_0}; \quad \gamma_{j_0} > \alpha_{j_0}$$

$$\gamma_k \geq \min\{\beta_k, \alpha_k\} \geq \alpha_k \quad \forall k \in I$$

por lo tanto $\gamma \in \Delta_{i_0}^d(\alpha)$ y además $\gamma \neq \alpha$ con lo que llegamos a un absurdo y necesariamente $\Delta_j(\alpha) = \emptyset$, es decir α es un maximal absoluto.

3.4.5 Teorema.— Sea α uno de los valores del contacto maximal de la curva C y $\alpha \in S$, entonces α es un maximal absoluto irreducible.

Demostración: Es claro que si existe $i \in I$ tal que $F_S(\alpha_i) = \{\alpha\}$ necesariamente $\Delta_i^d(\alpha) = \{\alpha\}$ y por el Lema anterior α es un maximal absoluto.

Si tenemos $\{(\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_0^d)\} = V^{-1}(C)$, por la definición de $V^{-1}(C)$ (3.3.6) se tiene necesariamente $\gamma^0 > (\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_0^d)$, y por la construcción de $\gamma^0, (\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_0^d)$ es un maximal absoluto (véase 1.2.6 y el ejemplo c) en 1.3.12).

Supongamos $\alpha \in V^n(C)$, $n \geq 0$, y consideramos el conjunto $E(\alpha) = \{i \in I / \alpha_i = \bar{\beta}_{n+1}^i\}$, $E(\alpha)$ es un conjunto maximal de T^n , es decir $E(\alpha) \in M^n(C)$. Si tomamos dos índices $i, j \in E(\alpha)$ se tiene entonces:

$$(f_i | f_j) \geq (n, \min\{l_{n+1}^i, l_{n+1}^j\}).$$

Sea $i_0 \in E(\alpha)$ el índice definido por la condición:

$$(*) \quad \forall i \in E(\alpha) \quad l_n^i \leq l_n^{i_0}$$

Por 3.3.3, si h es una curva con contacto maximal de género n con f_{i_0} entonces h tiene contacto maximal de género n con $f_i, \forall i \in E(\alpha)$.

Se tiene entonces la cadena de implicaciones:

Sea $h \in \mathcal{O}$ tal que $v_{i_0}(h) = \bar{\beta}_{n+1}^{i_0} \implies$

$$\implies v_i(h) = \bar{\beta}_{n+1}^i \quad \forall i \in E(\alpha) \implies h \in B^n(C) \implies$$

(por 3.3.4) $\underline{v}(h)$ está univocamente determinado y por lo tanto $\underline{v}(h) = \alpha$

(Obsérvese que $v_j(h) = \frac{(f_{i_0}, f_j)}{e_n^{i_0}}$, también por 3.3.4).

Como consecuencia $F_S(\bar{\beta}_{n+1}^{i_0}) = F_S(\alpha_{i_0}) = \{\alpha\}$ y por el comentario que hicimos al comienzo α es un maximal absoluto.

Nótese que α es irreducible, pues $\bar{\beta}_{n+1}^{i_0} = \alpha_{i_0}$ es ya un elemento irreducible en S_{i_0} .

3.4.6 Nota.- Supondremos a partir de aquí que $\alpha = \underline{v}(h+(f)) \in S$ es un maximal absoluto irreducible, $h(X,Y) \in k[[X,Y]]$ será entonces la ecuación de una curva irreducible, plana y denotaremos por D_h su desarrollo de Hamburger-Noether. Sean $(q_i, c_i) = (h | f_i)$, $i=1,2,\dots,d$

$$\text{Sup}\{(q_i, c_i) / i \in I\} = (q_{i_0}, c_{i_0}) = (r, d)$$

(por supuesto con el orden lexicográfico en \mathbb{Z}_+^2). Supondremos para simplificar las notaciones $i_0 = 1$, es decir $(r, d) = (q_1, c_1) \geq (q_i, c_i)$, $\forall i \in I$. El par (q, c) denotará como es habitual el par de contacto de f , $(f_1 | \dots | f_d)$, y los invariantes de la clase de equisingularidad de h los indicaremos con una $*$, es decir serán $\bar{\beta}_n^* = \bar{\beta}_n^*(h)$, $e_n^* = e_n^*(h), \dots$

3.4.7 Proposición.- En las condiciones de la nota anterior, supongamos $(r, d) < (q, c)$, entonces se tiene $r < q$ y

$$\alpha = (\bar{\beta}_{r+1}^{-1}, \bar{\beta}_{r+1}^{-2}, \dots, \bar{\beta}_{r+1}^{-d}).$$

Demostración

Observemos en primer lugar que, puesto que $(r,d) < (q,c)$, necesariamente $(r,d) = (q_i, c_i)$, $\forall i \in I$. Puesto que se tiene $l_n^i = l_n^j$ $\forall n < q$, $\forall i, j \in I$ entonces:

A) $\exists i \in I$ tal que $d \leq \min\{l_r^i, l_r^*\} \iff d \leq \min\{l_r^i, l_r^*\} \forall i \in I$ ya que si es $r < q$ es claro por ser $l_r^i = l_r^j$, $\forall i, j \in I$ y si es $r = q$, necesariamente $d < c \leq \min\{l_q^i + 1 / i \in I\}$ y se tiene la equivalencia.

B) $\exists i \in I$ tal que $d = \min\{l_r^i + 1, l_r^* + 1\} \iff d = \min\{l_r^i + 1, l_r^* + 1\} \forall i \in I$.

Como en el caso anterior, si $r < q$ es claro y si tenemos $r = q$, puesto que $d < c \leq \min\{l_q^i + 1 / i \in I\}$ necesariamente se tiene $d = l_r^* + 1 < c \leq l_q^i + 1$ $\forall i \in I$ y tenemos también la equivalencia. Observemos además que si

$$\text{tenemos} \quad d = \min\{l_r^i + 1, l_r^* + 1\} \text{ y } r = q$$

necesariamente será $d = l_q^* + 1$ y por lo tanto se tiene

$$v_i(h) = e_q^i \bar{\beta}_{q+1}^*, \quad \forall i \in I.$$

Sea L la recta que une el origen de coordenadas con el punto $(\bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \bar{\beta}_0^{-d})$ (ver 1.2.3 y ss.), veamos en primer lugar que $v(h) \in L$.

Si nos encontramos en el caso A) se tiene, $\forall i, j \in I$ (1.1.7)

$$\begin{aligned} v_i(h) \bar{\beta}_0^{-j} &= e_{r-1}^* \bar{\beta}_r^{-i} \bar{\beta}_0^{-j} + c e_r^* e_r^i \bar{\beta}_0^{-j} = (1.1.3) \\ &= e_{r-1}^* \bar{\beta}_0^{-i} \bar{\beta}_r^{-j} + c e_r^* e_r^j \bar{\beta}_0^{-i} = \\ &= (e_{r-1}^* \bar{\beta}_r^{-j} + c e_r^* e_r^j) \bar{\beta}_0^{-i} = v_j(h) \bar{\beta}_0^{-i} \end{aligned}$$

con lo que $v(h) \in L$.

Si se tiene $d = \min\{l_r^i + 1, l_r^* + 1\}$, necesariamente será $v_i(h) = \min\{e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-i}, e_r^i \bar{\beta}_{r+1}^*\}$ y puesto que si $q = r$ entonces

$v_i(h) = e_r^i \bar{\beta}_{r+1}^*$ por 1.1.3 se tiene

$$e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^i > e_r^i \bar{\beta}_{r+1}^* (\exists i \in I) \iff e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^i > e_r^i \bar{\beta}_{r+1}^* \quad \forall i \in I.$$

Por lo tanto, en el caso B):

- Si $v_i(h) = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^i$ (necesariamente es $r < q$)

$$v_i(h) \bar{\beta}_0^j = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^i \bar{\beta}_0^j = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^j \bar{\beta}_0^i = v_j(h) \bar{\beta}_0^i$$

- Si $v_i(h) = e_r^i \bar{\beta}_{r+1}^*$ entonces

$$v_i(h) \bar{\beta}_0^j = e_r^i \bar{\beta}_{r+1}^* \bar{\beta}_0^j = e_r^j \bar{\beta}_{r+1}^* \bar{\beta}_0^i = v_j(h) \bar{\beta}_0^i.$$

En cualquiera de los casos se tiene $\underline{v}(h) \in L$.

Se tiene que $e_q^1 \mid v_1(h)$, pues si $v_1(h) = e_{r-1}^* \bar{\beta}_r^1 + c e_r^* e_r^1$ entonces $e_q^1 \mid \bar{\beta}_r^1$ y $e_q^1 \mid e_r^1$ por ser $r \leq q$. Si $v_1(h) = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^1$ entonces $r < q$ y $e_q^1 \mid \bar{\beta}_{r+1}^1$ y por supuesto si $v_1(h) = e_r^1 \bar{\beta}_{r+1}^*$, $e_q^1 \mid e_r^1$. Si denotamos por $\langle \bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_q^1 \rangle$ el semigrupo de \mathbb{Z}_+ engendrado por $\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_q^1$, se tiene que $v_1(h) \in \langle \bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_q^1 \rangle$, es decir

$$v_1(h) = \sum_{j=0}^q \lambda_j \bar{\beta}_j^1, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z}_+$$

Utilizando 1.1.3 de nuevo, será:

$$\begin{aligned} v_i(h) &= \bar{\beta}_0^i (\bar{\beta}_0^1)^{-1} v_1(h) = \sum_0^q \lambda_j \bar{\beta}_0^i \bar{\beta}_j^1 (\bar{\beta}_0^1)^{-1} = \\ &= \sum_0^q \lambda_j \bar{\beta}_j^{-i}, \quad \forall i \in I \quad \text{y se tiene:} \end{aligned}$$

$$\alpha = \underline{v}(h) = \sum_0^q \lambda_j (\bar{\beta}_j^{-1}, \dots, \bar{\beta}_j^{-d}), \quad \lambda_j \in \mathbb{Z}_+$$

Puesto que α es irreducible, necesariamente los coeficientes λ_j , $0 \leq j \leq q$ son todos nulos, salvo uno de ellos que vale 1 y se tiene:

$$\alpha = (\bar{\beta}_v^{-1}, \dots, \bar{\beta}_v^{-d}) \quad \exists v \in \{0, \dots, q\}.$$

Nótese que, puesto que $(f_i|h) = (r,d)$, necesariamente se tiene $v = r+1$ y por lo tanto

$$\alpha = (\bar{\beta}_{r+1}^{-1}, \dots, \bar{\beta}_{r+1}^{-d}).$$

3.4.8 Lema.- Supongamos $(r,d) > (q,c)$ y sea $i \in I$ tal que $(f_1|f_i) = (q,c)$. Entonces se tiene:

$$\alpha_i = v_i(h) = (e_r^*/e_r^{-1}) \cdot \xi_{1i}$$

donde $\xi_{1i} = (f_1, f_i)$ es la multiplicidad de intersección de f_1 y f_i .

Demostración: En este Lema no es necesaria la hipótesis de que α es un maximal absoluto, más generalmente si $h \in k[[X,Y]]$ es la ecuación de una curva irreducible tal que

$(r,d) = (h|f_1) > (f_1|f_i) = (q,c)$ se tiene que $(f_1, f_i)e_r^* = (h, f_i)e_r^{-1}$. Nótese que también es, en este caso, $(h|f_i) = (q,c)$.

a) Si $c \leq \min\{l_q^{-1}, l_q^i\}$ se tiene (1.1.7)

$$(f_1, f_i) = e_{q-1}^{-1} \bar{\beta}_q^{-i} + ce_q^{-1} e_q^i$$

$$(h, f_i) = e_{q-1}^* \bar{\beta}_q^{-i} + ce_q^* e_q^i$$

y utilizando 1.1.2, 1.1.3 se verifican las igualdades:

$$\frac{(f_1, f_i)}{e_r^{-1}} = \frac{e_{q-1}^{-1}}{e_r^{-1}} \bar{\beta}_q^{-i} + c \frac{e_q^{-1}}{e_r^{-1}} e_q^i = \frac{e_{q-1}^*}{e_r^*} \bar{\beta}_q^{-i} + c \frac{e_q^*}{e_r^*} e_q^i = \frac{(h, f_i)}{e_r^*}$$

b) Si $c = l_q^{-1} + 1 \leq l_q^i + 1$ en este caso necesariamente $r > q$ y se tiene

$$\xi_{1i} = (f_1, f_i) = \min\{e_q^{-1} \bar{\beta}_{q+1}^{-i}, e_q^i \bar{\beta}_{q+1}^{-1}\}$$

$$(h, f_i) = \min\{e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i}, e_q^i \bar{\beta}_{q+1}^*\}$$

Se tiene entonces:

$$e_q^1 \bar{\beta}_{q+1}^{-i} < e_q^i \bar{\beta}_{q+1}^{-1} \iff \bar{\beta}_0^* e_q^1 \bar{\beta}_{q+1}^{-i} < \bar{\beta}_0^* e_q^i \bar{\beta}_{r+1}^{-1} \iff$$

$$\bar{\beta}_0^{-1} e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i} < \bar{\beta}_0^{-1} e_q^i \bar{\beta}_{r+1}^{-*} \iff e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i} < e_q^i \bar{\beta}_{q+1}^{-*}$$

y de aquí se deduce sin dificultades que

$$(f_1, f_i) e_r^* = e_r^1(h, f_i)$$

c) Si $c = l_q^i + 1 < l_{q+1}^1$ se tiene necesariamente:

$$\xi_{1i} = e_q^1 \bar{\beta}_{q+1}^{-i}, (h, f_i) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i}$$

y por tanto $(f_1, f_i) e_r^* = e_r^*(e_q^1 \bar{\beta}_{q+1}^{-i}) = e_r^1 e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i} = e_r^1(h, f_i)$ con lo que finalizamos la demostración.

3.4.9 Lema.— En las condiciones de 3.4.6, supongamos además $(r, d) > (q, c)$. Entonces se tiene que $\alpha_i = v_i(h) = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-i}$ para todo $i \in I$ tal que $(q_i, c_i) = (r, d)$. En particular $v_1(h) = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-1}$.

Demostración: Supongamos $v_1(h) \neq e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-1}$, puesto que

$(h|f_1) = (r, d)$ para que esto ocurra tenemos dos posibilidades:

a) $d \leq \min\{l_r^1, l_r^*\}$ en cuyo caso :

$$v_1(h) = e_{r-1}^* \bar{\beta}_r^{-1} + d e_r^* e_r^1 < e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-1}$$

b) $d = \min\{l_r^1+1, l_r^*+1\}$ y además:

$$v_1(h) = e_r^1 \bar{\beta}_{r+1}^{-*} < e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-1} \implies l_r^* \leq l_r^1$$

Si nos encontramos en cualquiera de estas circunstancias, construiremos una curva irreducible ψ de manera que $\underline{v}(\psi) \in \Delta_j(\alpha)$

con $J \subset I$, $J \neq I$. Para ello daremos su desarrollo de $H-N$, D_ψ , basándonos en el de h , D_h . Señalaremos los distintos datos de D_ψ mediante dos estrellas.

$$D_\psi: \{ z_{j-1} = \sum_0^{h_j^{**}} a_{ji}^{**} z_j^i + z_j^{h_j^{**}} z_{j+1} \}$$

dado por:

$$h_i^{**} = h_i^* ; 0 \leq i \leq s_{g^*}, i \neq s_r ; h_{s_r}^{**} > h_{s_r}^1$$

$$a_{ij}^{**} = a_{ij}^* , 0 \leq i \leq s_{g^*} ; 0 \leq j \leq h_i^* \text{ si } i \neq s_r$$

$$a_{s_r j}^{**} = a_{s_r j}^1 , 0 \leq j \leq h_{s_r}^1 < h_{s_r}^{**} .$$

Lo único que hemos hecho es conservar el desarrollo D_h excepto la fila libre r -ésima, esta fila la hemos completado igual que la fila libre r -ésima del desarrollo D_1 de f_1 y hemos tomado además $h_{s_r}^{**} > h_{s_r}^1$. Los coeficientes $a_{s_r j}^{**}$ para $h_{s_r}^1 < j \leq h_{s_r}^{**}$ pueden ser cualquiera, pues no van a intervenir en nada.

Se puede comprobar entonces (ver [18] 3.3.9 y 4.2) que:

$$e_n^{**} = e_n^* , 0 \leq n \leq g^* ; \bar{\beta}_n^{**} = \bar{\beta}_n^* , 0 \leq n \leq r \text{ y } \bar{\beta}_n^{**} > \bar{\beta}_n^* \text{ si } n > r.$$

Geométricamente, lo único que hemos hecho es aumentar el número de puntos infinitamente próximos de multiplicidad e_r^* sin alterar el resto de la sucesión de puntos infinitamente próximos ni en su multiplicidad ni en su número.

Sea $k \in I$ tal que $(f_1 | f_k) = (q, c)$, por el Lema 3.4.8 $v_k(h) = (e_r^*/e_r^1)(f_1, f_k)$. Puesto que $(\psi | f_1) = (r, 1_r^1 + 1) \geq (r, d) > (q, c)$ se tiene también:

$$v_k(\psi) = \frac{e_r^{**}}{e_r^1}(f_1, f_k) = \frac{e_r^*}{e_r^1}(f_1, f_k) = v_k(h) \quad (1)$$

Por otra parte, $v_1(\psi) = e_r^{**} \bar{\beta}_{r+1}^{-1}$, pues $l_r^{**} > l_r^1$ y
 y $(\psi|f_1) = (r, l_{r+1}^1)$ con lo que

$$v_1(\psi) = e_r^{**} \bar{\beta}_{r+1}^{-1} = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-1} > v_1(h) \quad (2)$$

Puesto que, además $(q_1, c_1) = (r, d) \geq (q_i, c_i)$, $\forall i \in I$, es
 muy fácil ver que $v_i(\psi) \geq v_i(h)$, $\forall i \in I$ y como consecuencia se tie-
 ne $\underline{v}(\psi) \in \Delta_J(\alpha)$ con $k \in J \subset I$, $J \neq I$ en contra de que α era un
 maximal absoluto.

Podemos asegurar entonces que $v_1(h) = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-1}$. El razona-
 miento es claramente válido para cualquier índice $i \in I$ con la con-
 dición $(q_i, c_i) = (r, d)$ y por lo tanto hemos demostrado el Lema.
 (Obsérvese que la modificación hecha en h para obtener ψ nos dice
 también que podemos tomar $l_r^* > l_r^1$ y por lo tanto $v_i(h) = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-1}$
 si $i \in I$ verifica que $(q_i, c_i) = (r, d)$).

3.4.10 Nota.- Supongamos con 3.4.6 $\alpha = \underline{v}(h)$ maximal absolu-
 to irreducible y $(q_1, c_1) = (r, d) = (h|f_1) \geq (h|f_i) = (q_i, c_i)$, $\forall i \in I$.

Si $i \in I$ verifica $(q_i, c_i) < (r, d)$ la observación que hici-
 mos al comienzo de la prueba de 3.4.8 nos dice que

$$v_i(h) = (e_r^*/e_r^1)(f_1, f_i)$$

Si $i \in I$ es tal que $(q_i, c_i) = (r, d)$, entonces por 3.4.9
 $v_i(h) = e_r^* \bar{\beta}_{r+1}^{-1}$. Es decir hemos determinado todas las coordenadas
 de α cuando $(r, d) > (q, c)$.

3.4.11 Proposición.- En las condiciones de la Nota 3.4.6.
 Supongamos $(r, d) = (q, c) (= (f_1 | \dots | f_d))$, entonces se tiene que

$$c = l_{q+1}^i, \forall i \in I \quad \text{y} \quad \alpha = (\bar{\beta}_{q+1}^{-1}, \dots, \bar{\beta}_{q+1}^d).$$

Demostración.- Es claro que en este caso se tiene

$$(q_i, c_i) = (q, c), \forall i \in I.$$

Etapa 1ª: Podemos suponer $c \leq l_q^*$

Supongamos que $c = l_{q+1}^*$ se tiene entonces, $\forall i \in I$,
 $\alpha_i = v_i(h) = \min\{e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i}, e_q^i \bar{\beta}_{q+1}^*\}$. Si probamos que es $v_i(h) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i}$
 es claro que podemos "modificar" la fila libre q-ésima de D_h alargán-
 dola sin que se alteren los valores $v_i(h)$. Se trata pues de demos-
 trar que si $c = l_{q+1}^*$ entonces $v_i(h) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i}$.

a) Supongamos que $v_i(h) = e_q^i \bar{\beta}_{q+1}^*$, $\forall i \in I$. Se tiene enton-
 ces que $\underline{v}(h) \in L$ pues $v_i(h) \bar{\beta}_0^j = e_q^i \bar{\beta}_0^j \bar{\beta}_{q+1}^* = e_q^j \bar{\beta}_0^i \bar{\beta}_{q+1}^* = v_j(h) \bar{\beta}_0^i$.
 Además puesto que $e_q^i | v_i(h)$ se tiene entonces que

$$v_i(h) \in \langle \bar{\beta}_0^{-i}, \dots, \bar{\beta}_q^{-i} \rangle$$

y de la misma forma que en 3.4.7 se tiene $\alpha = \sum_{i=0}^q \lambda_i (\bar{\beta}_i^{-1}, \dots, \bar{\beta}_i^d)$

con lo que llegamos a un absurdo, pues $\alpha = (\bar{\beta}_i^{-1}, \dots, \bar{\beta}_i^d)$, $0 \leq i \leq q$
 (por ser maximal absoluto irreducible) y $(h|f_i) = (q, c)$ implica que
 $v_i(h) > \bar{\beta}_q^{-i}$.

b) Supongamos que existen $i, j \in I$ tales que

$$v_i(h) = e_q^i \bar{\beta}_{q+1}^* < e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^{-i}, \quad v_j(h) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^j$$

Consideramos la curva irreducible de ecuación $\psi \in k[[X, Y]]$ cuyo de-
 sarrollo de Hamburger-Noether D_ψ es

$$D_\psi = \{z_{j-1} = \sum_0^{h_j^{**}} a_{ji}^{**} z_j^i + z_j^{h_j^{**}} z_{j+1}\}$$

dado por:

$$h_n^{**} = h_n^* ; 0 \leq n \leq s_{g^*} , n \neq s_q ; h_{s_q}^{**} > h_{s_q}^i$$

$$a_{n,k}^{**} = a_{n,k}^* \quad 0 \leq n \leq s_{g^*} ; n \neq s_q ; 0 \leq k \leq h_n^*$$

$$a_{s_q,n}^{**} = a_{s_q,n}^i , 0 \leq n \leq h_{s_q}^i < h_{s_q}^{**}$$

(véase la demostración de 3.4.9). Puesto que $c = l_q^{*+1}$ y

$$v_j(h) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^j \quad \text{necesariamente } c = l_{q+1}^j = l_q^{*+1} \text{ y por la construc}$$

$$\text{ción de } \psi \text{ se tiene también } v_j(\psi) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^j \text{ y } v_i(\psi) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^i.$$

Puesto que se tiene que $v_k(\psi) \geq v_k(h) , \forall k \in I$ (trivial por ser

$(h|f_i) = (q,c)$ y por la construcción de ψ) necesariamente es

$v(\psi) \in \Delta_j(\alpha)$ con $j \in J, i \notin J$ y α no es maximal absoluto.

Esto concluye esta parte de la demostración, es decir podemos suponer que $c \leq l_q^*$.

Etapa 2ª: $c = l_q^{i+1} , \forall i \in I$.

Supongamos que existe $i \in I$ tal que $c \leq l_q^i$, puesto que $c \leq l_q^*$ se tiene entonces:

$$\alpha_i = v_i(h) = e_{q-1}^* \bar{\beta}_q^i + c e_q^* e_q^i.$$

Sea $j \in I$ de manera que $iR_{\gamma 0}^j$ (ver 1.2.8), se tienen las posibilidades siguientes:

$$- c \leq l_q^j, a_{s_q k_q + c}^i \neq a_{s_q k_q + c}^j, v_j(h) = e_{q-1}^* \bar{\beta}_q^j + c e_q^* e_q^j$$

$$- c = l_q^{j+1}, v_j(h) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^j.$$

Consideramos la curva irreducible de ecuación $\psi \in k[[X,Y]]$

dada por el desarrollo de H-N siguiente:

$$D_\psi : \{ z_{n-1} = \sum_0^{h^{**}} a_{nr}^{**} z_n^r + z_n^{h^{**}} z_{n+1} \mid 0 \leq n \leq s_{g^*} \}$$

donde: $h_n^{**} = h_n^*$; $0 \leq n \leq s_{g^*}$, $n \neq s_q$; $h_{s_q}^{**} > h_{s_q}^i$

$$a_{nr}^{**} = a_{n,r}^* ; 0 \leq n \leq s_{g^*} , n \neq s_q ; 0 \leq r \leq h_n^*$$

$$a_{s_q,r}^{**} = a_{s_q,r}^i ; 0 \leq r \leq h_{s_q}^i < h_{s_q}^{**}$$

De forma similar a casos anteriores se tiene

$$v_i(\psi) = e_q^{**} \bar{\beta}_{q+1}^i > e_{q-1}^* \bar{\beta}_q^i + c e_q^* e_q^i = v_i(h)$$

y además $v_j(\psi) = v_j(h)$ pues si $c \leq l_q^j$ se tiene

$$a_{s_q, k_q+c}^{**} = a_{s_q, k_q+c}^i \neq a_{s_q, k_q+c}^j \text{ y por tanto } v_j(\psi) = e_{q-1}^* \bar{\beta}_q^j + c e_q^* e_q^j$$

Si es $c = l_q^{j+1}$, puesto que $v_j(h) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^j$ es claro que también

$$v_j(\psi) = e_q^{**} \bar{\beta}_{q+1}^j = v_j(h). \text{ Concluyendo, se tiene, como en el caso}$$

anterior $v(\psi) \in \Delta_j(\alpha)$ con $j \in J$, $i \notin J$ de donde α no sería maximal absoluto.

Etapa 3ª: $\alpha = (\bar{\beta}_{q+1}^{-1}, \dots, \bar{\beta}_{q+1}^d)$:

Por la Etapa 2ª se tiene necesariamente $c = l_q^i + 1$, y puesto que podemos suponer $c \leq l_q^*$ se tiene que $\alpha_i = v_i(h) = e_q^* \bar{\beta}_{q+1}^i$, $\forall i \in I$. Es claro que $(\bar{\beta}_{q+1}^{-1}, \dots, \bar{\beta}_{q+1}^d) \in S$, por ser $c = l_{q+1}^i$, $\forall i \in I$ y por tanto:

$$\alpha = e_q^* (\bar{\beta}_{q+1}^{-1}, \bar{\beta}_{q+1}^2, \dots, \bar{\beta}_{q+1}^d)$$

Puesto que además α es irreducible, necesariamente es $e_q^* = 1$ y se tiene la Proposición.

3.4.12 Teorema. - Si α es un maximal absoluto irreducible, α es uno de los valores del contacto maximal.

Demostración: Con las notaciones de 3.4.6, si se tiene $(r,d) < (q,c) = (f_1 | \dots | f_d)$ ó $(r,d) = (q,c)$ el resultado son las Proposiciones 3.4.7 y 3.4.11.

Supongamos $(r,d) > (q,c)$, se tiene entonces:

a) $e_r^* = 1$: En caso contrario tomamos una curva irreducible ψ con contacto maximal de género r con h , es decir D_ψ es el mismo desarrollo D_h truncado por el final de la fila libre r -ésima. Para ψ se tienen entonces los siguientes datos:

$$\bar{\beta}_n^{**} = \bar{\beta}_n^* / e_r^*, \quad e_n^{**} = e_n^* / e_r^* \quad 0 \leq n \leq r$$

Es evidente que $(\psi | f_i) = (h | f_i)$, $\forall i \in I$ y como consecuencia se tiene:

$$v_i(\psi) = (f_1, f_i) / e_r^1 \quad \text{si } (f_1 | f_i) < (r,d)$$

$$v_i(\psi) = \bar{\beta}_{r+1}^i \quad \text{si } (f_1 | f_i) \geq (r,d)$$

y por lo tanto $\underline{v}(h) = \alpha = e_r^* \cdot \underline{v}(\psi)$ en contra de que α era irreducible en S . Por lo tanto es $e_r^* = 1$ y

$$v_i(h) = \begin{cases} (f_1, f_i) / e_r^1 & \text{si } (q_i, c_i) < (r,d) \\ \bar{\beta}_{r+1}^i & \text{si } (q_i, c_i) = (r,d). \end{cases}$$

b) $E(\alpha) = \{i \in I / \alpha_i = \bar{\beta}_{r+1}^i\}$ es un conjunto maximal (para la contención) de T^r .

Por el Lema 3.4.9 $\{i \in J / (q_i, c_i) = (r,d)\} \subset E(\alpha)$. Supon-

gamos que $E(\alpha)$ no es un conjunto maximal en T^r , existe entonces $k \in I$, $k \notin E(\alpha)$ de manera que $E' = E(\alpha) \cup \{k\} \in T^r$, es decir existe una curva irreducible de ecuación $\psi \in k[[X, Y]]$ de manera que $v_i(\psi) = \bar{\beta}_{r+1}^i \quad \forall i \in E'$.

Puesto que $(q_k, c_k) < (r, d)$, entonces necesariamente $(q_k, c_k) = (h|f_k) = (f_1|f_k)$ y por el Lema 3.3.3 es $c_k = l_{r+1}^k < l_{r+1}^1$ y necesariamente $v_k(h) = \bar{\beta}_{r+1}^k$, es decir $k \in E(\alpha)$ y $E(\alpha)$ es un conjunto maximal de T^r .

Hemos demostrado entonces que si es $(r, d) > (q, c)$ α es también uno de los valores del contacto maximal.

3.4.13 Nota.- a) Los Teoremas 3.4.5 y 3.4.12 nos proporcionan la demostración del Teorema que enunciamos en 3.4.3, es decir los maximales absolutos irreducibles y los valores del contacto maximal finitos coinciden.

b) El Teorema 3.4.3, unido a los Teoremas 3.1.7 y 3.2.13 nos proporcionan un método para calcular explícitamente el semigrupo S a partir de sus proyecciones. Para que el procedimiento resulte efectivo, a primera vista, quedaría únicamente determinar cuales son todos los maximales absolutos del semigrupo S a partir de los maximales absolutos irreducibles; es decir si $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ son maximales absolutos irreducibles y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$, ¿Cuándo es $\sum \lambda_i \alpha_i$ maximal absoluto?. Veremos a continuación que esta última etapa se puede evitar para determinar S .

3.4.14 Teorema. (Determinación explícita de S)

Sea $\{\beta^1, \dots, \beta^m\}$ el conjunto de maximales absolutos irreducibles del semigrupo S, y sean

$$F = \left\{ \sum_1^m \lambda_i \beta^i \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i; \sum_1^m \lambda_i \beta^i \leq Q \right\} \subset S$$

y

$$F^S = \{Q - \gamma \mid \gamma \in F\}. \text{ Sea } \beta \in \mathbb{Z}_+^d \text{ tal que } pr_J(\beta) \in S_J$$

$\forall J \subset I$ con $\#J = d-1$, se tiene entonces:

$$\beta \in S \text{ si y sólo si } \beta \notin \bar{\Delta}(\alpha), \forall \alpha \in F^S.$$

Demostración:

Puesto que $F \subset S$, por el Lema 3.2.26 apartado i) se tiene que $\Delta(Q - \gamma) = \emptyset, \forall \gamma \in F$ y como consecuencia si $\beta \in S$ necesariamente $\beta \notin \bar{\Delta}(\alpha), \forall \alpha \in F^S$ y tenemos demostrada la condición necesaria.

Por otra parte, es claro que el conjunto de maximales absolutos, MA está contenido en F y por lo tanto $MR \subset F^S$ (por 3.2.13). Si tenemos $\beta \notin \bar{\Delta}(\alpha), \forall \alpha \in F^S$, entonces $\beta \notin \bar{\Delta}(\alpha), \forall \alpha \in MR$ y por el Teorema 3.1.17 se tiene que $\beta \in S$ y concluimos la prueba de la condición suficiente y del Teorema.

3.4.15 Nota.- a) El procedimiento para el cálculo del semigrupo S es entonces:

1º) Calcular los contactos maximales de la curva f.

2º) Construir F

3º) Calcular $F^S = \{Q - \gamma \mid \gamma \in F\}$

4º) Aplicar 3.1.7 para determinar cuando un elemento está en el semigrupo.

3.4.16 Nota. - a) Supongamos $(f_1 | \dots | f_d) = (q, c)$ y consideramos $M_1 = \{P_0, \dots, P_q\}$ con $P_i = (\bar{\beta}_i^{-1}, \dots, \bar{\beta}_i^{-d})$. M_1 se puede caracterizar por $M_1 = \{\alpha \in \text{MAI} / \alpha < \gamma^0\} = \text{MAI} \cap L$, siendo L la recta que une el origen con P_0 . Denotaremos por M_2 el conjunto $M_2 = \text{MAI} - M_1 = \{P_{q+1}, \dots, P_s\}$ y asignaremos un número natural a cada uno de los valores del contacto maximal de la forma siguiente:

a-1) Si $P = P_n \in M_1$; $N(P_n) = N_n^{i_0} = N_n$ (pues no depende del índice $i \in I$).

a-2) Si $P \in V^n(C)$ con $n \geq q$, P corresponde al conjunto maximal $E \in M^n$ (3.3.1) y consideramos $i_0 \in E$ tal que existe $j \in I$ con $\text{pr}_j(P) = (f_{i_0}, f_j) / e_n^{i_0}$ (se puede probar su existencia usando 3.3.4, 3.3.12) y $1_n^{i_0} \geq 1_n^k \forall k \in E$. En estas condiciones $N(P) = N_{n+1}^{i_0}$

b) Si $P \in M_2$, $N(P) \cdot P$ no es un maximal absoluto pues (con las notaciones de a-2) para $i_0 = 1$).

$$\text{pr}_1(N(P)P) = N_{n+1}^1 \bar{\beta}_{n+1}^{-1} < \bar{\beta}_{n+2}^{-1}$$

$$\text{pr}_j(N(P)P) = N_{n+1}^1 \frac{(f_1, f_j)}{e_n^1} = \frac{(f_1, f_j)}{e_{n+1}^1}$$

y tomando $P^1 \in V^{n+1}(C)$ con $\text{pr}_1(P^1) = \bar{\beta}_{n+2}^{-1}$ (suponiendo $n+2 \leq g_1$, pues si $n+1 = g_1$ $\text{pr}_j(N(P)P) = (f_1, f_j)$ y el resultado es evidente)

se tiene $\text{pr}_j(P^1) = \frac{(f_1, f_j)}{e_{n+1}^1}$ y $P^1 \in \Delta_j(N(P)P)$ con $j \in J$, $1 \notin J$.

c) Si $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in S$. Sea $\langle \alpha^1, \dots, \alpha^k \rangle = \{ \sum_1^k \lambda_i \alpha^i / \lambda_i \in \mathbb{Z}_+ \} \subset S$.

Si $\alpha \in MA$ entonces $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2$ donde $\alpha^1 \in \langle P_0, \dots, P_q \rangle$ y $\alpha^2 \in \langle P_{q+1}, \dots, P_s \rangle$ y las propiedades de los semigrupos de valores en una sola rama nos permiten asegurar que si $\alpha^1 \in \langle P_0, \dots, P_q \rangle$, α^1 se escribe de forma única como $\alpha^1 = \sum_0^q \lambda_i P_i$ con $0 \leq \lambda_i < N(P_i)$; $i=1, \dots, q$.

d) Los comentarios anteriores permiten reducir la familia F de

3.4.14 a

$$F' = \{ \mu_0 P_0 + \sum_1^s \lambda_i P_i / 0 \leq \lambda_i < N(P_i) \text{ y } \mu_0 P_0 + \sum_1^s \lambda_i P_i < Q \}$$

3.4.17 Ejemplos

Siguiendo la gama de ejemplos descrita en 1.3.12, (ver también 3.3.20) y con las notaciones allí utilizadas:

A) El caso irreducible no tiene sentido ahora.

B) Caso diagonal. - $MAI = \{P_0, \dots, P_g\}$ con $P_n = (\bar{p}_n, \dots, \bar{p}_n)$

(3.3.20) y tenemos:

$$F' = \{ P = \sum_0^g \lambda_i P_i / P \leq Q; 0 \leq \lambda_i < N_i, i = 1, \dots, g \}$$

Obsérvese que puesto que $\gamma^0 = (\gamma, \dots, \gamma) \in L \cap S$ no es un maximal absoluto, si $P \in MA$ entonces $P - \gamma^0 \notin S$. Puesto que $P = (\alpha, \dots, \alpha) = \sum_0^g \lambda_i P_i$ se tiene $P - \gamma^0 \notin S \iff \alpha - \gamma \notin S_i$ y por tanto

$$MA \subset \{ (\alpha, \dots, \alpha) / \alpha \in A_\gamma(S_i) \}$$

C) Caso multitangente. - En este caso $P_0 \notin MA$ y supongamos como en

3.3.20 $\#I/R_{\gamma^0} = d$. Se tiene:

$$\bar{V}(C) = \{ P_j^i / 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq g_i \}$$

$$\text{con } pr_k(P_j^i) = \begin{cases} \bar{\beta}_j^i & \text{si } k = i \\ (f_i, f_k) / e_{j-1}^i & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

$$\text{Veamos que } MA = F^1 = \{ \sum_{i,j} \lambda_{ij}^i P_j^i \leq Q / 0 \leq \lambda_j^i < N_j^i \}.$$

Para ello basta ver que $P = \sum_{i,j} (N_j^i - 1) P_j^i \in MA$, pues los demás aparecen como sumandos de P . Si $k \in I$, tenemos:

$$\begin{aligned} pr_k(P) &= \sum_{j=1}^{g_k} (N_j^k - 1) \bar{\beta}_j^k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^d \left(\sum_{j=1}^{g_i} (N_j^i - 1) \frac{(f_k, f_i)}{e_{j-1}^i} \right) = \\ &= c_k + \bar{\beta}_0^k - 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^d \left((f_k, f_i) - \frac{(f_k, f_i)}{e_0^i} \right) = \\ &= c_k + \bar{\beta}_0^k - 1 + \sum_{i \neq k} (f_k, f_i) - \bar{\beta}_0^k \cdot (d-1) = pr_k(Q) - (d-2) \bar{\beta}_0^k \end{aligned}$$

de donde $Q - P = (d-2)(\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_0^d) \in S$.

Por 3.2.13 $P \in MA \iff Q - P \in MR$ y puesto que

$\Delta_j(\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_0^d) \neq \emptyset$. $\forall J \subset I$ con $\#J = d-1$, unas simples operaciones prueban que $\Delta_j(Q-P) \neq \emptyset$ para $J \subset I$ con $\#J = 2$ y $Q - P \in MR$.

D) Los semigrupos de las ramas componentes son todos iguales de conductor $c = 914$, además $(f_1, f_2) = (f_3, f_4) = 988$ y $(f_1, f_3) = (f_1, f_4) = (f_2, f_3) = (f_2, f_4) = 976$, de donde $Q = (3853, 3853, 3853, 3853)$.

Se tiene $N(P_2^i) = N(P_3^k) = 2$; $i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3, 4$ y puesto que $\gamma^0 \notin MA$ si $P \in \langle P_0, P_1 \rangle \cap MA$ entonces $P - \gamma^0 \notin S$. Si considera-

mos $\hat{S} = \left\langle \frac{\beta_0^i}{e_1^i}, \frac{\beta_1^i}{e_1^i} \right\rangle \subset \mathbb{Z}_+^4$ (nótese que es independiente de $i \in I$) y

$\hat{Y} = \gamma_1^0 / e_1^i \in \hat{S}$ se tiene

$$P \in \langle P_0, P_1 \rangle \text{ y } P - \gamma^0 \in S \iff P = \alpha (e_1^1, e_1^2, e_1^3, e_1^4) \text{ y } \alpha \in A_{61}(\hat{S})$$

en nuestro caso particular $P = \alpha (4, 4, 4, 4)$ con $\alpha \in A_{61}(\langle 5, 12 \rangle)$

y por tanto:

$$MA \subset \left\{ \alpha (4) + \sum_1^2 \lambda_1 P_2^i + \sum_1^4 \lambda_{2+i} P_3^i / \alpha \in A_{61}(\langle 5, 12 \rangle), 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

Como antes, si vemos que el mayor elemento de la familia es un maximal absoluto tendremos la igualdad; éste se alcanza para $\alpha = 104 (= \hat{c} + \hat{y} - 1)$ y $\lambda_i = 1$.

$$P = 104(4, 4, 4, 4) + \sum_1^2 P_2^i + \sum_1^4 P_3^i = (2871, 2871, 2871, 2871).$$

$$Q - P = (982, 982, 982, 982) = \gamma_{I_1}^0 + \gamma_{I_2}^0 \quad (1.3.12) \text{ y puesto que}$$

$$\Delta_{\{i, 3, 4\}}(\gamma_{I_1}^0) \neq \emptyset, i = 1, 2 \text{ y } \Delta_{\{1, 2, k\}}(\gamma_{I_2}^0) \neq \emptyset, k = 3, 4, \text{ operando}$$

se comprueba que $Q - P \in MR$ y por tanto:

$$MA = \left\{ \alpha (4) + \sum_1^2 \lambda_1 P_2^i + \sum_1^4 \lambda_{2+i} P_3^i / \alpha \in A_{61}(\langle 5, 12 \rangle), 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

E) Se tiene en este caso $Q = (481, 505, 339)$ y razonamientos similares a los anteriores adaptados a este caso particular, permiten comprobar que:

$$MA \subset \left\{ \alpha (3, 3, 5) + \lambda (46, 50, 82) / \alpha \in A_{46}(\langle 3, 5 \rangle), 0 \leq \lambda \leq 2 \right\}$$

El mayor de la familia se alcanza para $\alpha = 53 (= \hat{c} + 46 - 1)$ y $\lambda = 2$, es decir es $P = (251, 259, 429)$.

$Q - P = (230, 246, 410) = \inf\{5(46, 50, 82), (230, 246, \infty)\} \in S$, con lo que P y $Q - P$ son maximales (3.2.13). Puesto que $(230, 246, \infty) \in \bar{S}$,

$Q - P \in MR$ y por tanto

$$MA = \left\{ \alpha (3, 3, 5) + \lambda (46, 50, 82) / \alpha \in A_{46}(\langle 3, 5 \rangle), 0 \leq \lambda \leq 2 \right\}.$$

CAPITULO IV: ASPECTOS GEOMETRICOS. EL GRAFO DUAL

CAPITULO IV

ASPECTOS GEOMETRICOS - EL GRAFO DUAL

4.0 INTRODUCCION Y PRELIMINARES

Nuestro propósito en este capítulo es ofrecer una interpretación de naturaleza geométrica de algunos de los invariantes que hemos usado en la memoria, como son los valores del contacto maximal, el elemento γ^0 de S , la relación de equivalencia R_{γ^0} , etc. Utilizaremos para ello el clásico lenguaje de la resolución de singularidades de curvas por transformaciones cuadráticas e invariantes asociados tradicionalmente a él como el árbol de puntos infinitamente próximos y el grafo dual.

Puesto que las técnicas que utilizaremos son suficientemente conocidas no incluiremos la demostración de gran número de resultados. Se puede consultar para ello los trabajos de Enriques y Chisini [30], O. Zariski [78], [79], [81] y A. Campillo [18]. Se pueden encontrar también en el, a nuestro juicio, excelente resumen [69].

Utilizaremos habitualmente las notaciones del capítulo I, especialmente las introducidas en 1-0.

4.0.1 Transformaciones cuadráticas.— Sea C una curva algebroide reducida y plana con d componentes irreducibles C_1, C_2, \dots, C_d y O_0 su punto cerrado. Sea $S_0 = \text{Spec } k[[X, Y]]$ y consideramos $\pi_1: S_1 \rightarrow S_0$ la transformación cuadrática de S_0 con centro $\frac{1}{2}O_0$, π_1 transforma S_0 en una superficie lisa S_1 , $\pi_1^{-1}(O_0) = E_1$ es una curva racional no singular denominada el divisor excepcional de π_1 , se tiene que $\pi_1|_{S_1 - E_1}: S_1 - E_1 \rightarrow S_0 - \{O_0\}$ es un isomorfismo. La curva de S_1 , $\pi_1^{-1}(C)$ es la transformada total de C por π_1 que denotaremos por $\tilde{C}^{(1)}$, las componentes irreducibles de $\pi_1^{-1}(C)$ diferentes de E_1 forman la transformada estricta de C que denotaremos por $C^{(1)}$. Obsérvese que $C^{(1)}$ tiene $r \leq d$ componentes conexas, tantas como tangentes distintas hay en C , por lo tanto $C^{(1)} \cap E_1$ es un conjunto finito de puntos, $O_1^1, O_1^2, \dots, O_1^r$; que forman los puntos infinitamente próximos, en el primer entorno infinitesimal, de O_0 .

Si denotamos por $m(O_0)$ la multiplicidad de C en el punto O_0 se tiene:

$$m(O_0) = (C, E_1) = \sum_{i=1}^r (C^{(1)}, E_1)_{O_1^i}$$

y como consecuencia de este hecho tendremos que:

- a) $m(O_1) := \sum_{i=1}^r m(O_1^i) < m(O_0)$ si y sólo si alguna de las componentes conexas de $C^{(1)}$ es tangente a E_1 .

- b) $m(O_1) = \sum m(O_1^i) = m(O_0)$ si y sólo si E_1 es transversal a todas las componentes conexas de $C^{(1)}$.

Si una curva algebroide irreducible tiene por desarrollo de Hamburger-Noether:

$$(D) = \{ z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1} \ / \ 0 \leq j \leq r \}$$

en una base $\{x, y\}$ del ideal maximal de su anillo local, su transformada cuadrática tiene por desarrollo de H-N en la base $\{x, y_1\}$ (del anillo local completado en el único punto O_1 de E_1 correspondiente a la dirección tangente a C) con $y_1 = (y - a_{01} x)/x$ el dado por ([18] 2.2.9):

- a) Si $h_0 = h > 1$:

$$y = a_{02} x^2 + \dots + a_{0h} x^{h-1} + x^{h-1} z_1$$

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq r$$

- b) Si $h = 1$:

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq r$$

4.0.2 Resolución de la singularidad. - Consideramos los puntos infinitamente próximos a O_0 en el primer entorno infinitesimal: $O_1^1, O_1^2, \dots, O_1^r$. Si O_1^1 no es un punto con cruzamientos normales de la transformada total $\bar{C}^{(1)}$ de C consideramos una nueva transformación cuadrática con centro en O_1^1 , $\pi_2^1: S_2^1 \rightarrow S_1$. Si, en caso contrario, O_1^1 es un punto con cruzamientos normales de $\bar{C}^{(1)}$ tomaremos

$\pi_2^1 = \text{Id}: S_2^1 = S_1 \longrightarrow S_1$. Puesto que π_2^1 es en cualquier caso un isomorfismo fuera del punto O_1^1 de S_1 podemos continuar el proceso:

$$S_2 = S_2^r \xrightarrow{\pi_2^r} S_2^{r-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow S_2^2 \xrightarrow{\pi_2^2} S_2^1 \xrightarrow{\pi_2^1} S_1$$

y tenemos, la explosión de S_1 en los puntos del conjunto $\{O_1^1, O_1^2, \dots, O_1^r\}$ que no son de cruzamientos normales:

$$\pi_2 = (\pi_2^1 \circ \dots \circ \pi_2^r): S_2 \longrightarrow S_1.$$

Asociado a cada uno de los puntos O_1^k que no sea de cruzamientos normales para $\bar{C}^{(1)}$ tenemos un divisor excepcional E_2^k , los puntos infinitamente próximos a $O_1^k: \{O_2^{k_1}, \dots, O_2^{k_n}\}$ y los mismos resultados para ellos que los que teníamos para O_0 y el conjunto $\{O_1^1, O_1^2, \dots, O_1^r\}$.

Para $(\pi_1 \circ \pi_2): S_2 \longrightarrow S_0$ tenemos también, el divisor excepcional $E(2) = (\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(O_0)$, la transformada cuadrática total $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(C) = \bar{C}^{(2)}$, la transformada cuadrática estricta $\bar{C}^{(2)} - E(2) = C^{(2)}$ y análogamente se tienen los puntos infinitamente próximos del segundo entorno infinitesimal como los puntos de $C^{(2)} \cap E(2)$.

El proceso es claramente inductivo, y podemos seguir haciendo transformaciones $\pi_i: S_i \longrightarrow S_{i-1}$ en tanto en cuanto haya puntos en $\bar{C}^{(i-1)} = (\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i-1})^{-1}(C)$ que no sean de cruzamientos normales. El teorema de resolución de singularidades para curvas nos permite asegurar que el proceso finaliza, es decir existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que si $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_N: S_N \longrightarrow S_0$ se tiene:

1) $\pi^{-1}(C) = \bar{C}^{(N)}$ tiene por singularidades únicamente puntos dobles ordinarios, es decir de cruzamientos normales.

2) $(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{N-1})^{-1}(C) = \bar{C}^{(N-1)}$ tiene puntos singulares que no son de cruzamientos normales.

En esta "situación final", se tienen también las condiciones siguientes: a) $\pi^{-1}(O_0) = E(N) = E$ es una curva conexa cuyas componentes irreducibles son curvas racionales no singulares y sus puntos singulares son corte de dos de ellas.

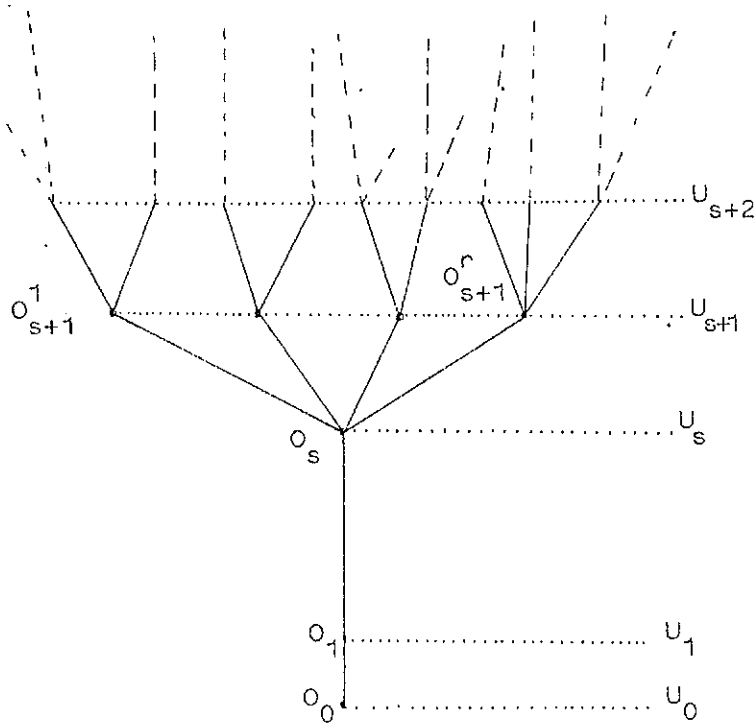
b) $C^{(N)} = \bar{C}^{(N)} - E$ está formado por d curvas lisas que no se cortan entre sí, cada una de ellas corta transversalmente a una única componente del divisor excepcional E .

c) Hay exactamente d puntos infinitamente próximos de multiplicidad 1, en el N -ésimo entorno infinitesimal de O_0 , cada uno de ellos corte de una de las componentes de $C^{(N)}$ con una componente del divisor total E .

4.1 PUNTOS INFINITAMENTE PROXIMOS

4.1.1 Arbol de puntos infinitamente próximos:

Si U_i es el conjunto de puntos infinitamente próximos a O_0 en el i -ésimo entorno infinitesimal para $0 \leq i \leq N$, el conjunto de puntos infinitamente próximos $U = \bigcup_{i \geq 0} U_i$ determina un árbol de la forma siguiente: por cada uno de los puntos de U ponemos un punto, dos puntos $O \in U_i, O' \in U_{i+1}, i \geq 0$, se unen por un segmento si y sólo si O' es un punto infinitamente próximo a O en su primer entorno infinitesimal:



Para $0 \leq i \leq N$, denotaremos por $E(i)$ el divisor excepcional de $\pi(i) = (\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_i): S_i \rightarrow S$, se tiene entonces la siguiente

4.1.2 Definición.— Sea $O_i \in U_i$ un punto infinitamente próximo a O_0 en el i -ésimo entorno de puntos infinitamente próximos. Diremos que O_i es un punto libre si es un punto no singular del divisor excepcional $E(i)$. Si O_i es un punto singular de $E(i)$ diremos que O_i es un punto satélite con respecto a O_0 .

4.1.3 Nota.— Si C es una curva irreducible de género g y su desarrollo de Hamburger-Noether es:

$$(D) : \{z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^h z_{j+1} \ / \ 0 \leq j \leq s_g\}$$

se tiene entonces ([18] 3.3.5):

(A) Puntos libres:

- 1) Los h puntos de multiplicidad n_0 y el primero de multiplicidad n_1 .
- 2) Los l_n últimos puntos de multiplicidad $e_n = n_{s_n}$ y el primero de multiplicidad $n_{s_{n+1}}$ para $1 \leq n \leq g$. (Suponemos $h_{s_g} = \infty$).

(B) Puntos satélites:

Todos los que no están incluidos en la lista anterior.

(C) Puntos satélites terminales: Un punto infinitamente próximo O_n , se dice que es satélite terminal si O_{n+1} es libre, O_{n+1} se dice que es un punto libre primero.

Hay exactamente g puntos satélites terminales, y son precisamente O_p donde $p = \sum_{j < s_n} h_j + k_n - 1; 1 \leq n \leq g$.

(D) Puntos libres primeros:

Se tienen los g puntos:

$$O_n \text{ donde } n = \sum_{j < s_n} h_j + k_n ; 1 \leq n \leq g.$$

4.1.4 Teorema.— Sea C una curva algebroide, reducida y plana con d ramas. Sea $B^*(C)$ el conjunto de puntos infinitamente próximos libres comunes a todas las ramas de C . Sea (q, c) el par de contacto de la curva C (1.2.1), se tiene entonces:

- a) Si $c > 0$ hay q puntos libres primeros comunes para C .
- b) Si $c = 0$ hay $q-1$ puntos libres primeros comunes para C .

$$c) \#B^*(C) = \sum_{n < q} (l_n + 1) + c$$

d) Sean $i, j \in I = \{1, \dots, d\}$ y $C_{\{i, j\}}$ la curva algebroide de componentes irreducibles C_i y C_j (2.3.7), entonces

$$iR_{Y_0}^j \iff B^*(C_{\{i, j\}}) \supsetneq B^*(C) \iff \#B^*(C_{\{i, j\}}) > \#B^*(C)$$

Demostración:

La prueba es muy simple si tenemos en cuenta el paralelismo entre los puntos infinitamente próximos (de una rama) y los datos del desarrollo de H-N.

Supongamos $c \leq l_q^1$, $\forall i \in I$, y consideramos

$n = \sum_{j < s_q} h_j + k_q + c - 1$. Puesto que los desarrollos de H-N de las ramas C_1, \dots, C_d coinciden hasta este nivel, después de hacer n transformaciones cuadráticas hemos obtenido $n+1$ puntos infinitamente

próximos comunes. Puesto que $c \leq l_q^i$, $\forall i \in I$, existirán $i, j \in I$ de manera que $a_{s_q, k_q+c}^i \neq a_{s_q, k_q+c}^j$, además el desarrollo de H-N de las transformadas estrictas después de n transformadas cuadráticas es:

$$z_{s_q-1} = a_{s_q, k_q+c}^k z_{s_q} + \dots$$

$k \in I$

.

y por lo tanto las transformadas de C_i y C_j , $C_i^{(n)}$ y $C_j^{(n)}$ tienen distinta tangente. Como consecuencia, al hacer una nueva transformación tendremos al menos dos puntos infinitamente próximos distintos. Contandando los puntos infinitamente próximos libres del conjunto $\{O_0, O_1, \dots, O_n\}$ se tienen, en este caso, los apartados a), b) y c) del Teorema.

En el caso en que $c = l_q^i + 1$ para un índice $i \in I$ un análisis semejante al anterior nos dice que, o bien O_n , para $n = \sum_{j < s_q} h_j + k_q + c$, es el último punto infinitamente próximo común si existe $j \in I$ con $l_q^j > l_q^i$, o bien el último punto infinitamente próximo común es uno de los puntos satélites que le siguen; en cualquier caso son inmediatos de nuevo los apartados a), b) y c)

El apartado d) es inmediato de c) y de la definición de $R_{\gamma 0}$ en 1.2.8.

4.1.5 Nota.- Sea $B(C)$ el conjunto de puntos infinitamente próximos comunes a todas las ramas de la curva C , es decir los puntos situados en el tronco del árbol descrito en 4.1.1. Se tiene:

a) Si $c \leq l_q^i$, $\exists i \in I$, $\#B(C) = \sum_{j < s_q} h_j + k_q + c$

b) Supongamos $c = l_q^i + 1$, $\forall i \in I$, con las mismas notaciones que 1.1.2, tendremos:

$$n_{s_q}^i = h_{s_{q+1}}^i n_{s_{q+1}}^i + n_{s_{q+2}}^i$$

.....

$$n_{s_{q+1}-1}^i = k_{q+1}^i n_{s_{q+1}}^i$$

si denotamos por $h_{s_{q+1}}^i$ el entero k_{q+1}^i podemos considerar

$n = \min\{j / \exists r, s \in I \text{ con } h_j^r \neq h_j^s\}$ y sea $i_0 \in I$ con

$h_n^{i_0} = \min\{h_n^j / j \in I\}$. Supongamos que $n \neq s_{q+1}$ (para el índice $i_0 \in I$)

y sea m el entero $m = \sum_{j < n} h_j + h_n^{i_0}$; y $j_0 \in I$ tal que $h_n^{i_0} \neq h_n^{j_0}$.

Después de m transformaciones cuadráticas obtenemos los puntos infinitamente próximos comunes $\{O_0, \dots, O_m\}$ y los transformados estrictos de las ramas C_{i_0}, C_{j_0} son transversales pues, $C_{i_0}^{(m)}$ es tangente al último divisor ($n \neq s_{q+1}$ para i_0) y $C_{j_0}^{(m)}$ es transversal por ser $h_n^{i_0} < h_n^{j_0}$. Como consecuencia, en este caso, tenemos:

$$\#B(C) = m+1 = \sum_{j < n} h_j + h_n^{i_0} + 1$$

Si se tiene $n = s_{q+1}$ (para el índice $i_0 \in I$), con las mismas notaciones del caso anterior se tiene que $C_{i_0}^{(m-1)}$ es transversal al divisor total en un punto de cruzamiento (pues el punto siguiente

será libre por 4.1.3) mientras que $C_{j_0}^{(m-1)}$ es todavía tangente al divisor, como consecuencia se tiene:

$$\#B(C) = m = \sum_{j < n} h_j + h_n^{i_0} = \sum_{j < s_{q+1}} h_j + k_{q+1}^{i_0}$$

c) Obsérvese que conocida la clase de equisingularidad de las ramas C_1, \dots, C_d los enteros $\#B(C)$ y $\#B^*(C)$ son datos equivalentes al par de contacto (q, c) de la curva C y por tanto a $\gamma^0, \tilde{\gamma}^0, \gamma$ y $\tilde{\gamma}$ (2.4.18).

4.2. EL GRAFO DUAL

4.2.0 Introducción.- Sea C una curva algebroide, reducida y plana con d componentes irreducibles. Sea $\pi = \pi_1 \dots \pi_N: S_N \rightarrow S_0$ una sucesión de transformaciones cuadráticas de $S_0 = \text{Spec}(k[[X,Y]])$ en la situación final descrita en 4.0.2. Es decir:

a) $\pi^{-1}(C) = \bar{C}^{(N)}$ tiene por singularidades únicamente puntos de cruzamiento normales.

b) $(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{N-1})^{-1}(C) = \bar{C}^{(N-1)}$ tiene puntos singulares que no son de cruzamientos normales.

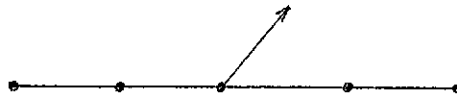
c) $\pi_N: S_N \rightarrow S_{N-1}$ es la explosión en los puntos de $\bar{C}^{(N-1)}$ que no son de cruzamientos normales.

Consideramos el divisor excepcional de π , $E = \pi^{-1}(0_0)$ es una curva conexa con un número finito de componentes que denotaremos con E_j para $j \in \mathbb{N}$. Asociado al divisor excepcional total E construimos un grafo de la siguiente forma:

- i) Por cada componente irreducible de E ponemos un punto.
- ii) Dos puntos, correspondientes a los divisores E_i, E_j ; se unen por un segmento si y sólo si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$
- iii) Para cada componente conexa $C_i^{(N)}$ de $C^{(N)} = \bar{C}^{(N)} - E$ colocamos una flecha en el punto correspondiente al único divisor E_j que verifica $C_i^{(N)} \cap E_j \neq \emptyset$.

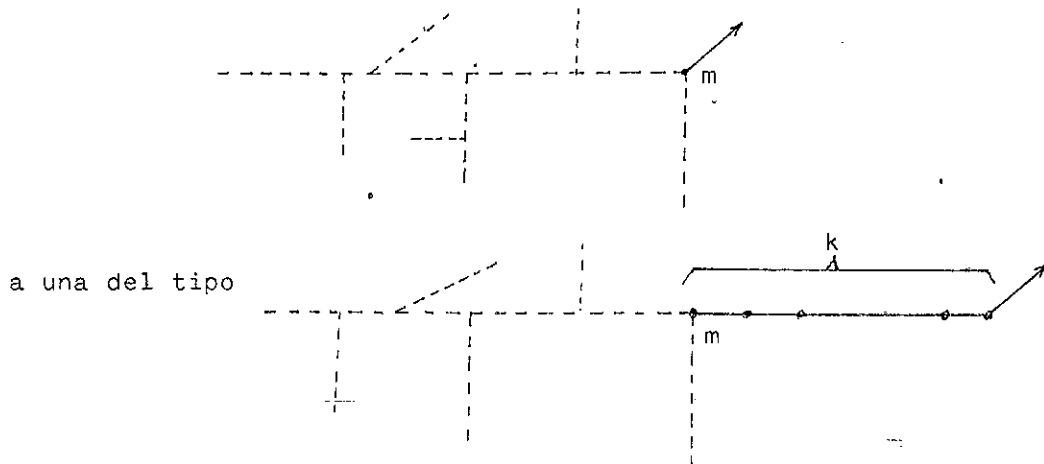
Por ser E conexo, el grafo que se obtiene por este procedimiento es un grafo conexo con tantas flechas como ramas tiene la curva C de partida.

4.2.1 Nota.- a) El grafo dual tal y como lo hemos definido en 4.2.0 no determina la clase de equisingularidad, por ejemplo el grafo



corresponde a las curvas de ecuaciones: $y^3 - x^7$, $y^5 - x^7$, $y^5 - x^8$
 Y claramente no son equisingulares.

b) Sean $O_N^1, O_N^2, \dots, O_N^d$ los d puntos infinitamente próximos de multiplicidad 1 en el N -ésimo entorno infinitesimal, es decir: $\{O_N^1, \dots, O_N^d\} = C^{(N)} \cap E$. Si hacemos k transformaciones cuadráticas en uno de ellos en el grafo pasamos de una situación del tipo



a una del tipo

situación que como detallaremos más tarde no aporta una nueva información sobre la curva de partida.

4.2.2 El grafo dual pesado

a) Como hemos mencionado en el apartado a) de la Nota anterior el grafo dual no determina la clase de equisingularidad de la

curva C . Una forma de corregir este hecho es asignar unos pesos a las componentes del divisor excepcional. Haremos la asignación de la manera siguiente:

Sea $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq N$, la sucesión de transformaciones $\pi_i: S_i \longrightarrow S_{i-1}$, resultado de hacer explosión en los puntos del $(i-1)$ -ésimo entorno infinitesimal que no son de cruzamientos normales, produce un número finito de divisores E_{i_1}, \dots, E_{i_s} ; a todos ellos asignaremos el peso i , es decir $p(E_{i_j}) = i$, $1 \leq j \leq s$. En otros términos, si $E(i) = (\pi_1 \cdot \dots \cdot \pi_i)^{-1}(O_0)$ y $\pi_i^{-1}(E(i-1))$ es la transformada estricta de $E(i-1)$ por π_i ; a cada componente irreducible E_{i_j} de $E(i) - \pi_i^{-1}(E(i-1))$ le asignaremos $p(E_{i_j}) = i$. Puesto que por ser este procedimiento obtenemos todas las componentes irreducibles del divisor excepcional total, $E(N) = E = \pi^{-1}(O_0)$ hemos asignado un número natural a cada una de las componentes irreducibles de E .

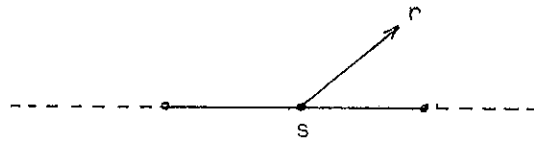
4.2.3 Definición.- Sea C una curva algebroide, reducida y plana, llamaremos grafo dual de C y lo denotaremos $G(C)$ al grafo pesado construido en 4.0 con la asignación de pesos de 4.2.2.

4.2.4 Nota.- A) Con las notaciones de 4.0, sea n un entero con la condición $1 \leq n \leq N$ y consideramos la composición de transformaciones cuadráticas:

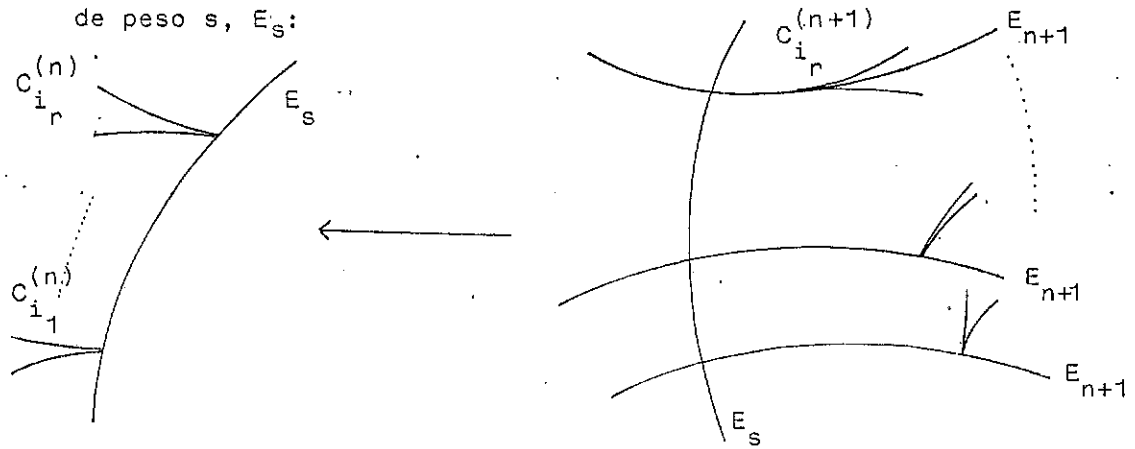
$$\pi(n) = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \dots \cdot \pi_n: S_n \longrightarrow S_0.$$

Para el divisor excepcional $E(n) = \pi(n)^{-1}(O_0)$ podemos formar su grafo dual en la forma descrita en 4.2.0 y con los pesos asignados en 4.2.2. Denotaremos dicho grafo por $G(n-)$ y le llamaremos grafo

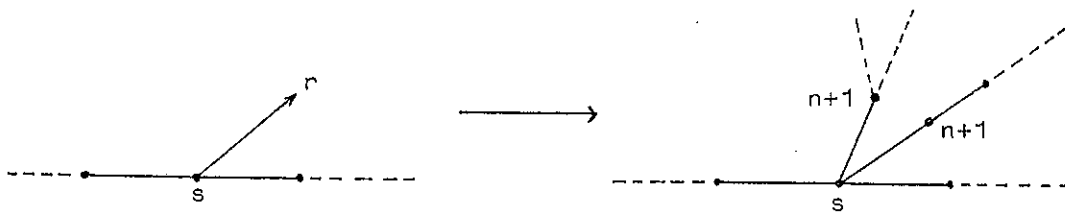
dual de nivel n de C . Las transformadas estrictas de las ramas C_1, \dots, C_d de C son d curvas irreducibles que cortan a determinados divisores de $E(n)$, cada una de ellas a lo sumo a dos de ellos. Si las componentes $C_{i_1}^{(n)}, \dots, C_{i_r}^{(n)}$ cortan sólo al divisor de peso s de $G(n-)$ denotaremos esta situación colocando una flecha con peso r en el divisor de peso s :



Las sucesivas transformaciones cuadráticas en los puntos infinitamente próximos correspondientes a $C_{i_1}^{(n)}, \dots, C_{i_r}^{(n)}$ afectan al grafo $G(n-)$ únicamente añadiendo nuevos divisores que cortan al divisor

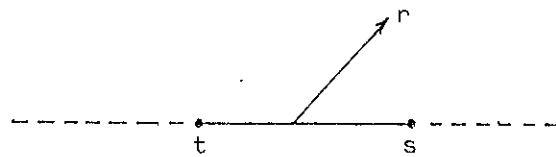


no afectando al resto del grafo $G(n-)$:

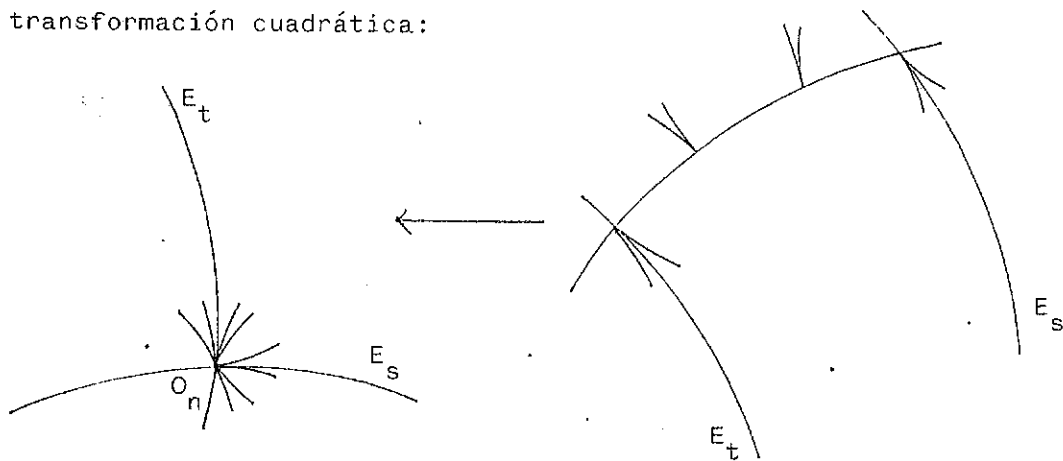


De manera similar si las componentes $C_{i_1}^{(n)}, \dots, C_{i_r}^{(n)}$ cortan todas ellas a los divisores de pesos t y s , E_t y E_s ; se tiene

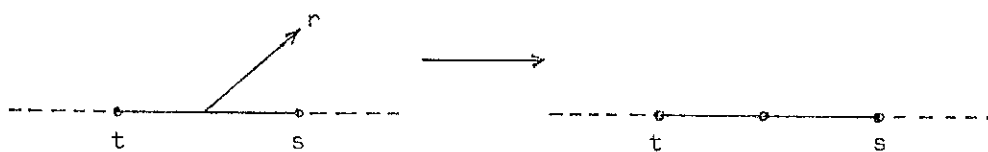
que para cada j , $1 \leq j \leq r$, $C_{i_j}^{(n)} \cap E(n) = E_t \cap E_s$ y representaremos esta situación por



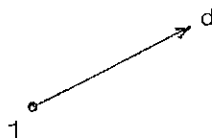
Las transformaciones cuadráticas en el punto $E_t \cap E_s$ afectan únicamente a $G(n-)$ en el lugar que señala la flecha, así una transformación cuadrática:



se traduce en términos del grafo dual:



b) Se puede formar entonces el grafo dual $G(C)$ partiendo de $G(1-)$:



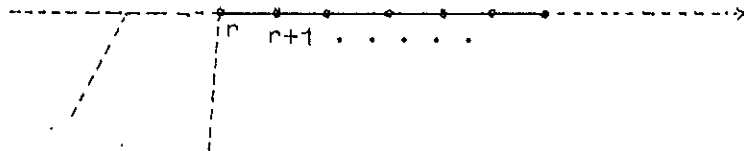
y modificándolo de acuerdo a lo que ocurre en cada nueva explosión:

$$G(1-) \xrightarrow{\pi_2} G(2-) \xrightarrow{\pi_3} \dots \xrightarrow{\pi_N} G(N-) = G(C)$$

Se puede ir un poco más allá tomando una categoría en la que los objetos son grafos pesados con las condiciones adecuadas y de manera que π_2, \dots, π_N sean morfismos en ella, de esta manera podemos tomar el sistema inductivo

$$S: \{ G(1-) \rightarrow G(2-) \rightarrow \dots \rightarrow G(N-) \rightarrow G(N+1-) \rightarrow \dots \}$$

y definir el grafo dual como el límite inductivo del sistema S. No entraremos en esta construcción, basta decir que la diferencia entre el objeto $\varinjlim S$ y el grafo dual definido en 4.2.3 estriba en que una flecha colocada en el divisor de peso r de $G(C)$ se sustituye en el $\varinjlim S$ por una secuencia infinita del tipo:

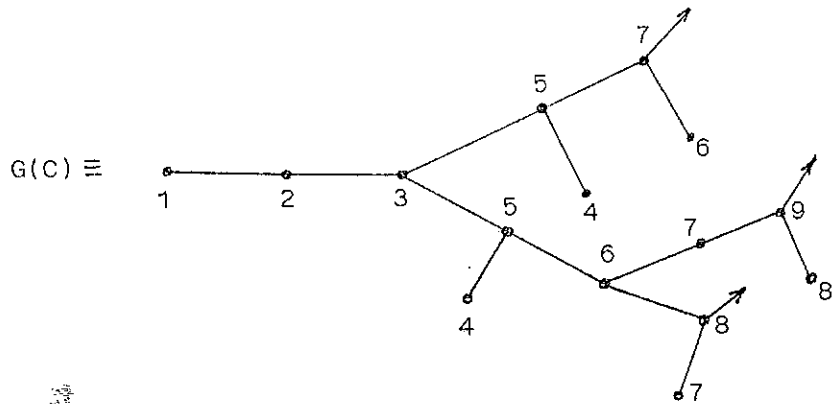


C) Si partimos de $G(C)$, los comentarios A) y B) de la presente nota nos proporcionan el método para calcular a partir de él el grafo de nivel n , $G(n-)$. Basta omitir todos los divisores, es decir los puntos de $G(C)$, con peso mayor estrictamente que n sin eliminar los segmentos que los unen. Gráficamente:

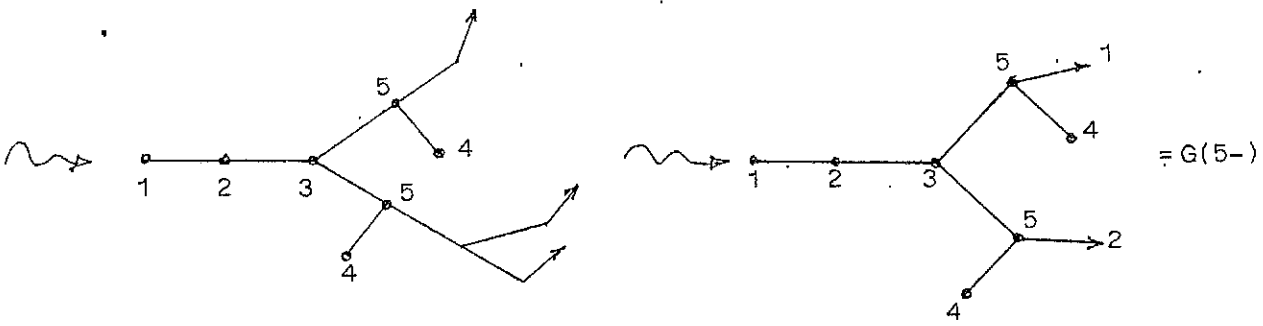
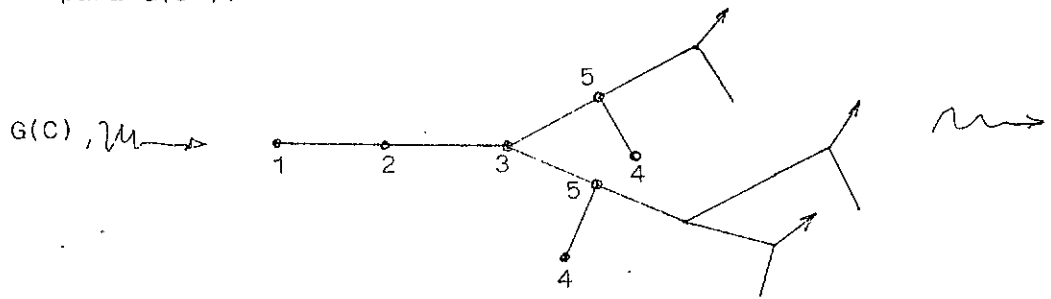


Omitimos después los segmentos que no unen dos puntos o bien un punto y una flecha y todas las flechas con origen en un mismo punto las agrupamos en una sola con peso el número de ellas.

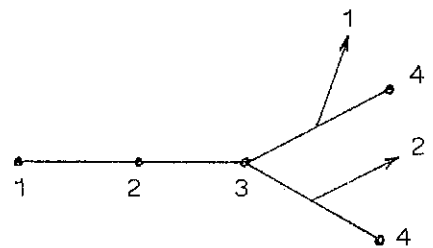
Por ejemplo, para



obtenemos para $G(5-)$:



y para $G(4-)$:



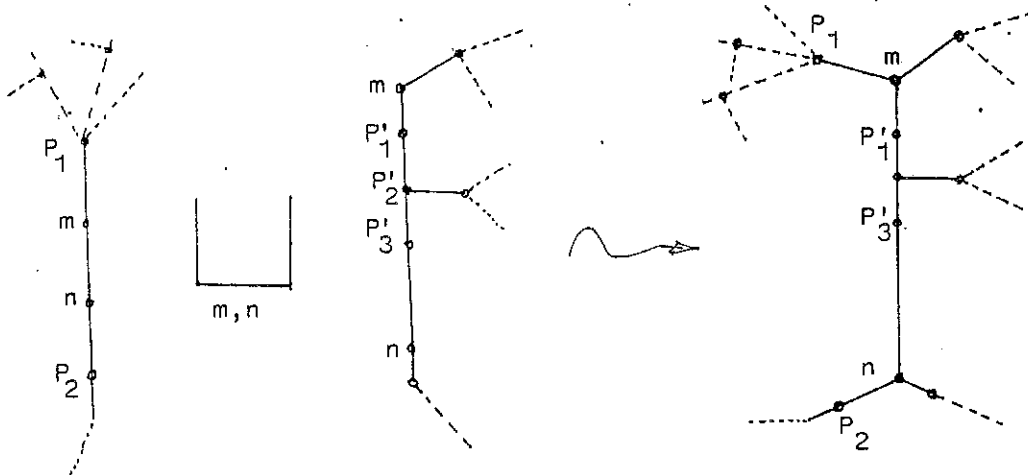
La prueba formal de este hecho es inmediata de los comentarios en A) por inducción sobre el número natural $N-n$.

4.2.5 Adjunción de grafos

A) Sean G y G' dos grafos pesados, conexos de manera que en cada uno de ellos existe un único punto con peso n ; $Q \in G$, $Q' \in G'$. Podemos construir un nuevo grafo, que denotaremos por $G \sqcup_n G'$ identificando los puntos $Q \in G$ y $Q' \in G'$ que verifican $p(Q) = p(Q') = n$.

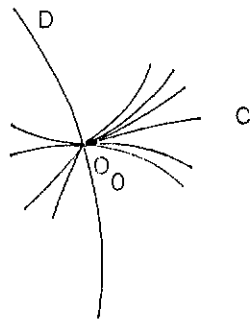
B) Sean ahora G y G' dos grafos pesados y conexos ^(tales) que existen dos únicos puntos $Q_1, Q_2 \in G$ (respectivamente $Q'_1, Q'_2 \in G'$) con pesos m y n respectivamente, $m \neq n$. Supongamos además que en G se da una situación del tipo $\cdots \text{---} \overset{m}{\bullet} \text{---} \overset{n}{\bullet} \text{---} \cdots$, es decir Q_1 y Q_2 son puntos consecutivos.

Podemos construir $G \sqcup_{m,n} G'$ como el grafo resultante de unir G y G' mediante la identificación $Q_1 \equiv Q'_1, Q_2 \equiv Q'_2$ y omitiendo el segmento que une a Q_1 con Q_2 en G .



4.2.6 Grafos condicionados

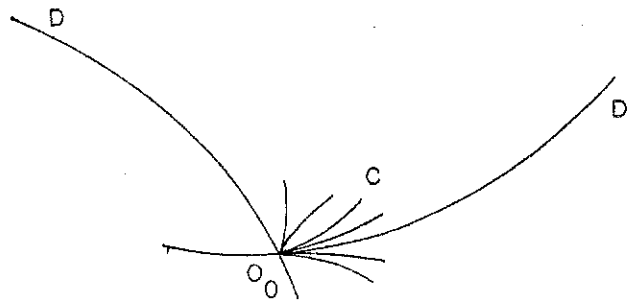
A) Sea C una curva algebroide, lisa, reducida, contenida en una superficie algebroide lisa S_0 , sea D una curva algebroide lisa contenida en S_0 a la que asignaremos de partida un peso n , $p'(D) = n$.



Podemos tomar $\pi : S_N \rightarrow S_0$ una resolución de la singularidad de C, de la misma manera que en 4.0 para una curva plana, y $\pi^{-1}(O_0) = E$ su divisor excepcional. Consideramos también la transformada estricta de D, que denotaremos también por D, y asociado a $E \cup D = \pi^{-1}(D)$ construimos el grafo dual como en 4.2.0 y asignamos a las componentes de E, E_i , los pesos $p'(E_i) = p(E_i) + n$ donde $p(E_i)$ es el asignado en 4.2.2 (en particular el primer divisor tiene peso $n+1$).

Al grafo resultante le llamaremos grafo dual de C condicionado a (D, n) .

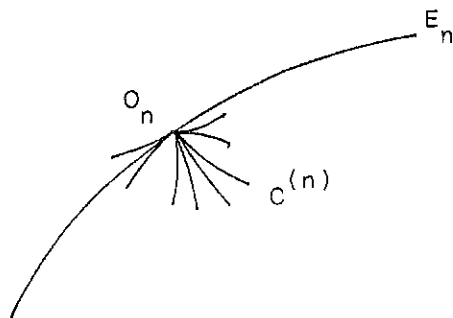
B) En la situación descrita en A) sean ahora D y D' transversales y lisas con pesos $p'(D) = m < n = p'(D')$.



Podemos construir el grafo dual asociado al divisor $E \cup D \cup D' = \pi^{-1}(D \cup D')$ de manera que si E_i es una componente irreducible de E damos $p'(E_i) = p(E_i) + n$ siendo p la asignación de pesos descrita en 4.2.2. Al grafo resultante le llamaremos grafo dual de C condicionado a (D, m) y (D', n) .

C) Volviendo a nuestra situación de partida, sea C una curva reducida y plana con d componentes irreducibles. Sea n un entero $1 \leq n \leq N$ y supongamos que en el n -ésimo entorno infinitesimal de O_0 hay un único punto infinitamente próximo O_n . El divisor excepcional $E(n)$ es entonces $E_1 \cup \dots \cup E_n$ con $p(E_i) = i$ y denotamos por $C^{(n)}$ la transformada estricta de C por $\pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$.

Si O_n es un punto libre, es decir $O_n \in E_n$ y $O_n \notin E_i \quad \forall i \neq n$:

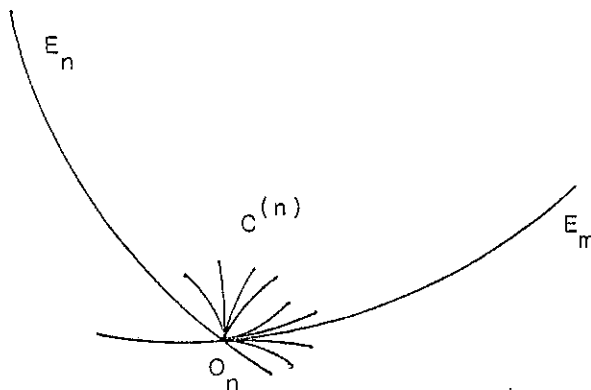


Podemos considerar el grafo de $C^{(n)}$ relativo a (E_n, n) descrito en A) que denotaremos por $G(n+)$, es claro que los grafos $G(n-)$ y $G(n+)$ verifican las condiciones de 4.2.5 A) y además claramente se tiene:

$$\underline{G(C) = G(n-) \bigsqcup_n G(n+)}$$

Si O_n es un punto satélite se tiene necesariamente

$$O_n = E_n \cap E_m, \quad \exists m < n:$$



y tomamos el grafo de $C^{(n)}$ relativo a $(E_n, n), (E_m, m)$ descrito en B que denotaremos por $G(n, m, +)$, como antes $G(n-)$ y $G(n, m+)$ verifican las condiciones de 4.2.5 B) y se tiene además:

$$G(C) = \underbrace{G(n-) \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} G(n, m+)}_{m, n}$$

D) Los grafos $G(n+)$ ó $G(n, m+)$ se calculan a partir de $G(C)$ sin mayores problemas, pues hemos visto ya como calcular $G(n-)$ y se trata únicamente de "invertir" la operación de adjunción descrita en 4.2.5.. En la práctica basta omitir los puntos de peso menor estrictamente que n , excepto el de peso m para el caso $G(m, n, +)$.

4.2.7 Nota.- Si P es el punto del grafo dual correspondiente al divisor E_P , denotaremos por $T(P)$ el conjunto de divisores que cortan a E_P y denotaremos por $\tau(P)$ su cardinal, es decir $\tau(P)$ es el número de segmentos que parten de P en el grafo dual. Utilizaremos también las notaciones:

$$\tau^+(P) = \#\{\text{divisores } E / E \cap E_P \neq \emptyset \text{ y } p(E) > p(E_P)\}$$

$$\tau^-(P) = \#\{\text{divisores } E / E \cap E_P \neq \emptyset \text{ y } p(E) < p(E_P)\}$$

Si P es un divisor con peso n , si no da lugar a confusión nos referiremos a él simplemente por el punto n del grafo dual, así escribiremos $\tau(n), \tau^+(n), \tau^-(n)$ en lugar de $\tau(P), \tau^+(P), \tau^-(P)$.

Si P verifica $\tau(P) \geq 3$ diremos que P es un punto de bifurcación, si es $\tau(P) = 1$ diremos que P es un extremo del grafo dual.

4.2.8 Nota.- Supondremos ahora que C es una curva irreducible de desarrollo de Hamburger-Noether:

$$(D): \{z_{j-1} = \sum_0^{h_j} a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1} \mid 0 \leq j \leq s_g\}$$

En este caso el árbol de puntos infinitamente próximos es una sucesión:

$$\{O_0, O_1, O_2, \dots, O_n, \dots\}$$

y el divisor excepcional total está formado por los divisores E_1, E_2, \dots, E_N de manera que $O_i \in E_i$ y además $p(E_i) = i$. En este caso será $N = \sum_{j < s_g} h_j + k_g$, y denotaremos por $H(j) = \sum_{i \leq j} h_i$ para $0 \leq j \leq s_g - 1$. Los enteros h_j señalan en la sucesión de puntos infinitamente próximos el número de ellos con multiplicidad exactamente $n_j, 0 \leq j \leq s_g$.

Los resultados que daremos a continuación proporcionan la descripción completa de $G(C)$ para el caso en que C es irreducible.

4.2.9 Lema. - Para cada entero $n \geq 1$ existe un único entero $m(n) > n$ tal que E_n y $E_{m(n)}$ se cortan. Además se tiene:

$$a) m(n) \neq n+1 \iff E_n \text{ es tangente a } C^{(n)} \iff m(O_n) < m(O_{n-1}) \iff$$

$$\iff n = H(r), \exists r \in \{0, 1, \dots, s_g - 1\}.$$

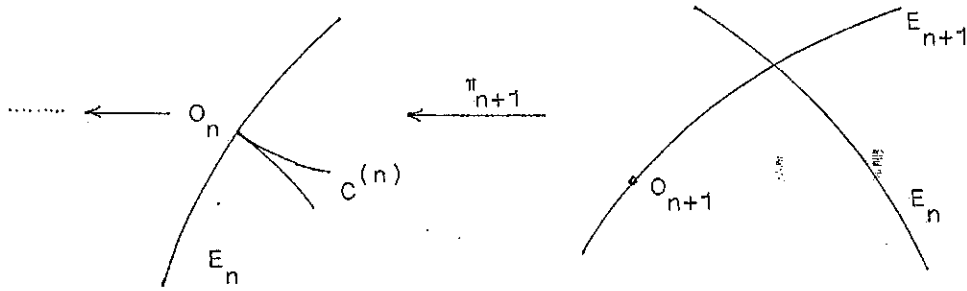
b) En el caso a) se tiene:

$$n = H(r) \implies \begin{cases} m(n) = H(r+1)+1 & \text{si } r \neq s_t - 1, \forall t \in \{1, \dots, g\} \\ m(n) = n+k_t & \text{si } \exists t \text{ con } r = s_t - 1. \end{cases}$$

$m(O_n)$ denota la multiplicidad en el punto O_n de la transformada estricta de $C, C^{(n)}$.

Demostración:

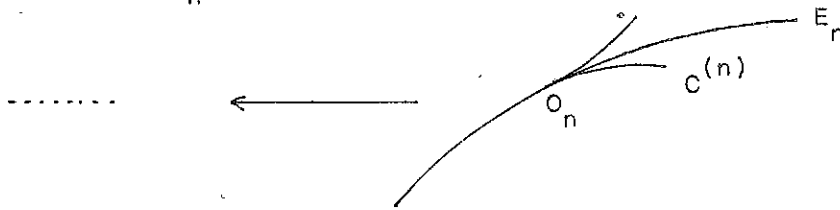
Supondremos en primer lugar que $m(O_n) = m(O_{n-1})$, esto quiere decir que la transformada estricta de C , $C^{(n)}$, no es tangente a E_n . La situación geométrica es entonces de la forma:



(ocasionalmente, puede aparecer un divisor E_s con $s < n$ transversal a E_n en O_n , aunque no afecta para nada a la intersección de E_n con E_{n+1}).

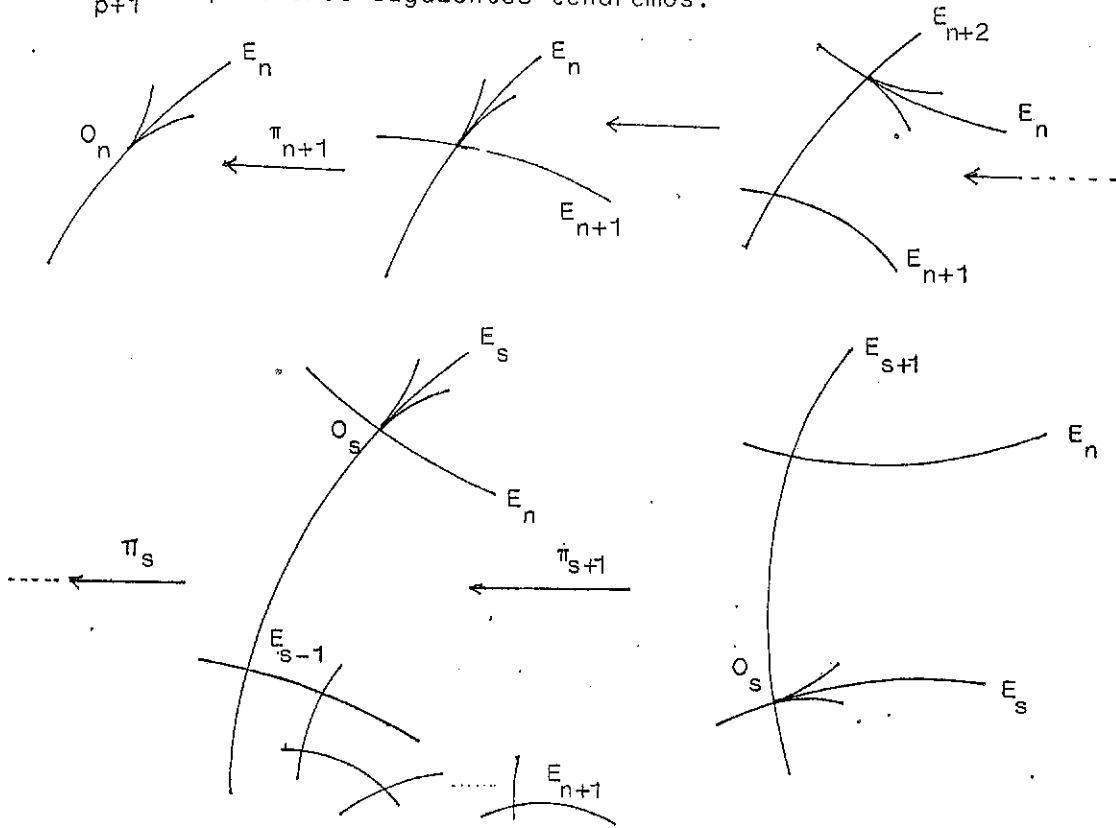
Las transformaciones cuadráticas posteriores, efectuadas en puntos infinitamente próximos a O_{n+1} no afectan en nada al hecho $E_n \cap E_{n+1} \neq \emptyset$ y claramente los nuevos divisores no cortarían a E_n . Por lo tanto en este caso tenemos probado el Lema.

Supongamos que se tiene $m(O_n) < m(O_{n-1})$, es decir $C^{(n)}$ es tangente a E_n .



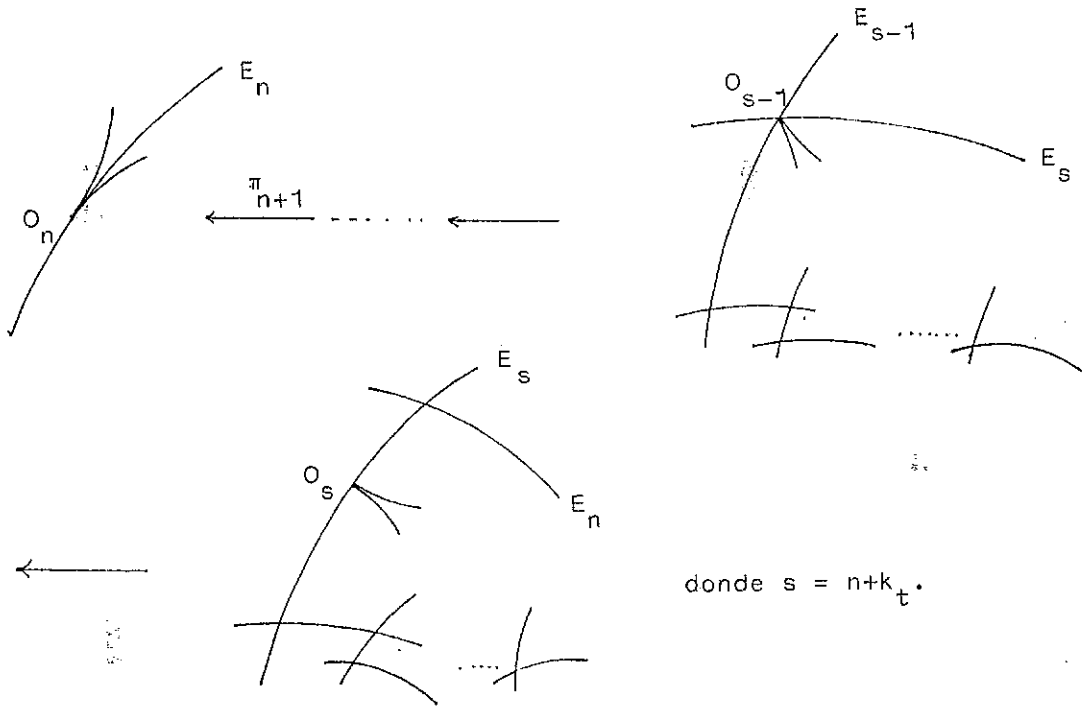
Sea entonces $p = \{0, 1, \dots, s_g - 1\}$ con $n = \sum_{j \leq p} h_j = H(p)$ (pues la segunda equivalencia es clara por [18] 2.2.10). En la sucesión de puntos infinitamente próximos aparecen entonces h_{p+1} puntos de multiplicidad igual a $m(O_n)$.

Si tenemos $p \neq s_t - 1, \forall t = 1, 2, \dots, g$; los puntos $O_n, O_{n+1}, \dots, O_{n+h_{p+1}-1}$ tienen todos ellos la misma multiplicidad, además $O_{n+1}, \dots, O_{n+h_{p+1}}$ son puntos satélites. Al efectuar las h_{p+1} explosiones siguientes tendremos:

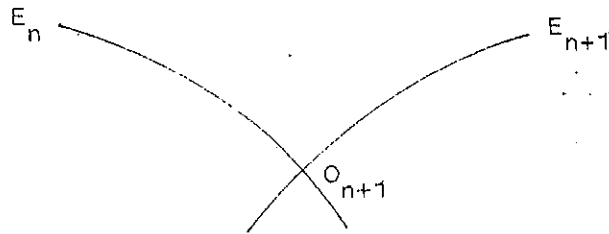


donde $s = \sum_{j \leq p+1} h_j = H(p+1)$. Es decir E_n corta a E_{s+1} y soló a E_{s+1} .

Nos resta únicamente el caso $p = s_t - 1$ para $t \in \{1, \dots, g\}$. En este caso los puntos O_{n+i} para $i = 0, 1, \dots, h_{s_t} - 1$ tienen todos la misma multiplicidad, pero O_n, \dots, O_{n+k_t-1} son puntos satélites, mientras que $O_{n+k_t}, \dots, O_{n+h_{s_t}-1}$ son libres; tenemos entonces la situación:



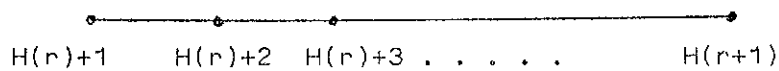
Esto finaliza la prueba, pues si $m(n) \neq n+1$ necesariamente se tiene $O_{n+1} = E_n \cap E_{n+1}$ en la etapa $(n+1)$ -ésima:



y por lo tanto en la etapa anterior $C^{(n)}$ es tangente a E_n .

4.2.10 Construcción de $G(C)$. Como consecuencia del Lema anterior tendremos:

a) La secuencia de divisores de pesos: $H(r)+1, H(r)+2, \dots, H(r+1)$ aparece en $G(C)$ siempre de la forma:



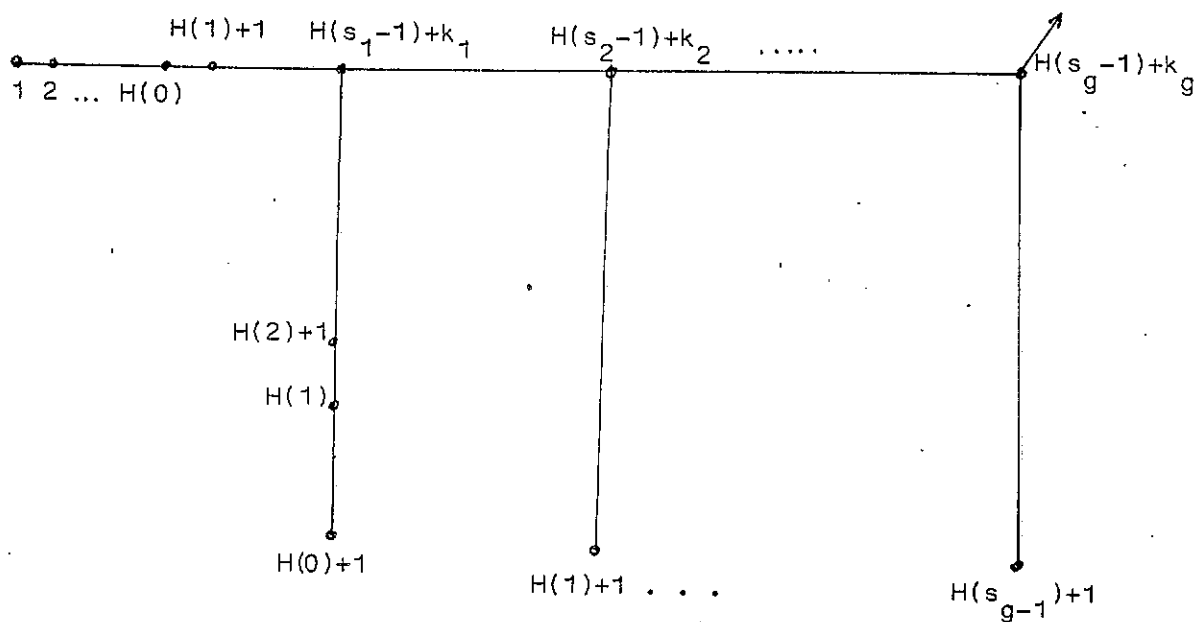
b) Para cada entero $n > 1$ existe un único $k(n) < n$ de manera que E_n y $E_{k(n)}$ se cortan, excepto en los casos siguientes:

b-1) Si $n = H(s_t) + 1$ con $t \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ no existe $k(n)$

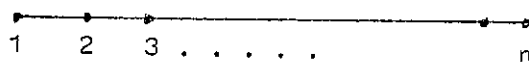
b-2) Si $n = H(s_t - 1) + k_t$, $t \in \{1, 2, \dots, g\}$ existen exactamente dos, es decir $\tau^-(n) = 2$ y es $T^-(n) = \{n-1, H(s_t - 1)\}$.

c) Los únicos puntos de bifurcación de $G(C)$ son los g puntos de peso $n = H(s_t - 1) + k_t$ para $t = 1, 2, \dots, g$. Para cada uno de ellos es $\tau(n) = 3$.

d) Los únicos extremos de $G(C)$ son los $g+1$ puntos de pesos $H(s_t) + 1$.



e) Es claro que el grafo dual, con los pesos anteriores, determina por completo la clase de equisingularidad de la curva de partida. (Comenzando por el peso 1, tomamos la mayor secuencia posible de la forma:

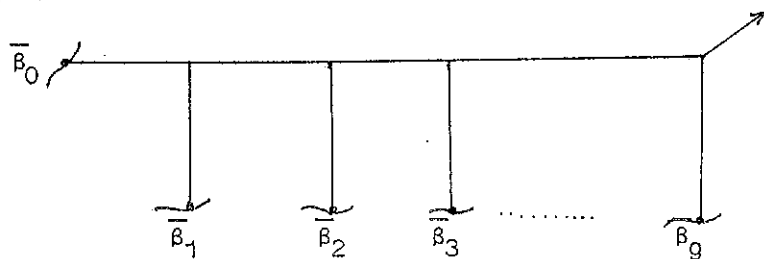


se tiene entonces $n = h_0$, continuamos el proceso ahora con h_0+1 y obtenemos h_1 , etc. Los números $h_0, \dots, h_{s_1-1}, k_1, h_{s_1}, \dots, k_g$; determina la clase de equisingularidad de la curva C).

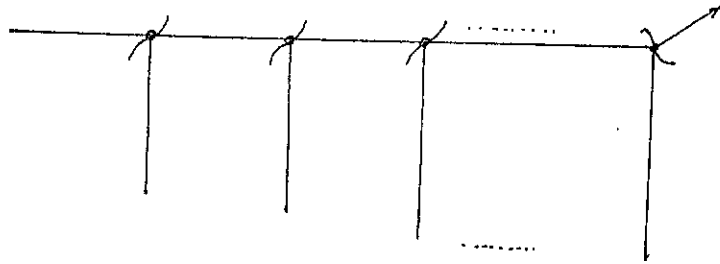
4.2.11 Nota.- Si C_n es una curva irreducible de género n con contacto maximal de dicho género con nuestra curva de partida C, del hecho ([18] 4.2.9) de que el desarrollo de Hamburger-Noether de C_n se puede obtener por un tratamiento genérico del Desarrollo H-N de C en la fila libre n-ésima, se tiene que su transformada estricta aparece en S_N como una curva lisa transversal al divisor de peso $\sum_{j \leq s_n} h_j + 1$ en un punto regular del divisor total.

También se da la recíproca, es decir si tomamos $N = \sum_{j \leq s_g} h_j + k_g$ y $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_N: S_N \rightarrow S_0$ la resolución de la singularidad de C, un germen de curva lisa, D, que corte al divisor de peso $\sum_{j \leq s_n} h_j + 1$ en un punto regular del divisor total $\pi^{-1}(0)$ verifica que $\pi(D)$ es una curva de género n con contacto maximal de dicho género.

Puesto que los divisores de peso $\sum_{j \leq s_n} h_j + 1$ corresponden a los extremos libres del grafo dual, abusando del lenguaje podemos decir que los valores del contacto maximal de C se realizan con curvas regulares en los extremos libres del grafo dual:



Un cálculo simple nos permite asegurar que si D es una curva regular transversal a un divisor que es además de bifurcación entonces $(\pi(D), C)/m(\pi(D))$ es uno de los cocientes polares de la curva (véase [73], [60], [49]). Es decir los cocientes polares se alcanzan con curvas regulares en los puntos de bifurcación.



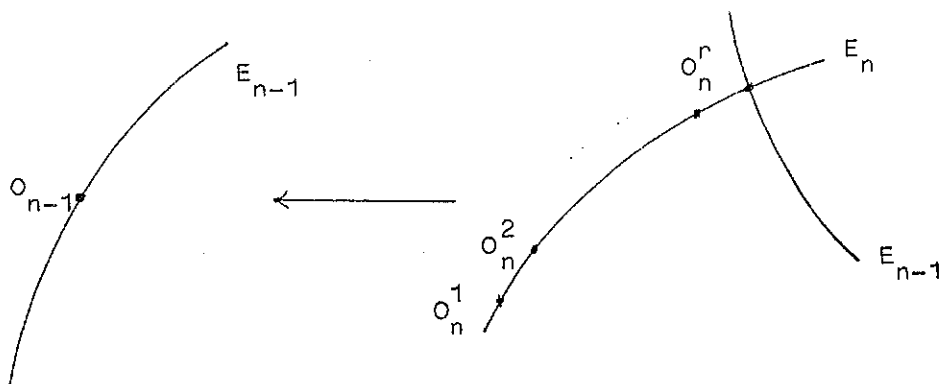
4.2.12 Nota.— Volvemos de nuevo al caso general, es decir C es una curva algebroide, reducida y plana con d ramas que denotaremos por C_1, \dots, C_d . Construiremos en primer lugar su grafo dual $G(C)$ por inducción sobre el número de ramas.

Supongamos que O_{n-1} es el último punto infinitamente próximo común a todas las ramas de la curva C (su cálculo depende únicamente del par de contacto (q, c) de la curva C , véase 4.1.5) y sean O_n^1, \dots, O_n^r los puntos infinitamente próximos en el n -ésimo entorno infinitesimal, es $r > 1$ dada la elección de O_{n-1} .

Podemos suponer construido el grafo de nivel n de la curva C , $G(n-)$; pues $G(n-)$ coincide con el grafo de nivel n de cualquiera de sus componentes. Consideramos, para $1 \leq i \leq r$ el conjunto:

$$A_i = \{j \in I / C_j^{(n)} \cap E(n) = O_n^i\}$$

Se tiene $I = A_1 \cup \dots \cup A_r$, $r > 1$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$.



Para cada uno de los puntos O_n^1, \dots, O_n^r consideramos la curva $C_{A_i}^{(n)}$, transformada estricta de C_{A_i} , y construimos el grafo dual $G_i(+)$ de $C_{A_i}^{(n)}$ condicionado a los divisores $E_i \subset E(n)$ tales que $O_n^i \in E_i$ (véase 4.2.6). Obsérvese que $O_n^i \in E_n$ y a lo sumo dos de los puntos del conjunto $\{O_n^1, \dots, O_n^r\}$ están en más de un divisor. El grafo $G_i(+)$ depende únicamente del grafo dual de la curva C_{A_i} , $G_i = G(C_{A_i})$ pues $G_i(+)$ = $G_i(n, m, +)$ si $O_n^i \in E_m$ con $m \neq n$ y $G_i(+)$ = $G_i(n+)$ si O_n^i está únicamente en E_n .

Denotaremos por \sqcup la operación de adjunción:

$$G(n-) \sqcup G_i(+) = \begin{cases} G(n-) \sqcup_n G_i(+) & \text{si } G_i(+) = G_i(n, +) \\ G(n-) \sqcup_{m,n} G_i(+) & \text{si } G_i(+) = G_i(n, m, +) \end{cases}$$

Puesto que las sucesivas transformaciones cuadráticas en un punto O_n^i no afectan en nada al resto de los puntos, tenemos entonces:

4.2.13 Proposición.— Con las notaciones de 4.2.12 se tiene:

$$G(C) = G(n-) \sqcup G_1(+) \sqcup \dots \sqcup G_r(+)$$

4.2.14 Nota.- Sea (q,c) el par de contacto de la curva C , como en 3.3.8 consideramos los conjuntos:

$$J_1 = \{i \in I / c = l_q^i + 1\}$$

$$J_2 = \{i \in I / c \leq l_q^i\}$$

Si I_1, \dots, I_r son las clases de equivalencia de R_{γ_0} sobre el conjunto de índices $I = \{1, 2, \dots, d\}$ supongamos que $J_1 = I_{s+1} \cup \dots \cup I_r$ y $J_2 = I_1 \cup \dots \cup I_s$. Diferenciaremos tres casos distintos para el cálculo de $G(C)$:

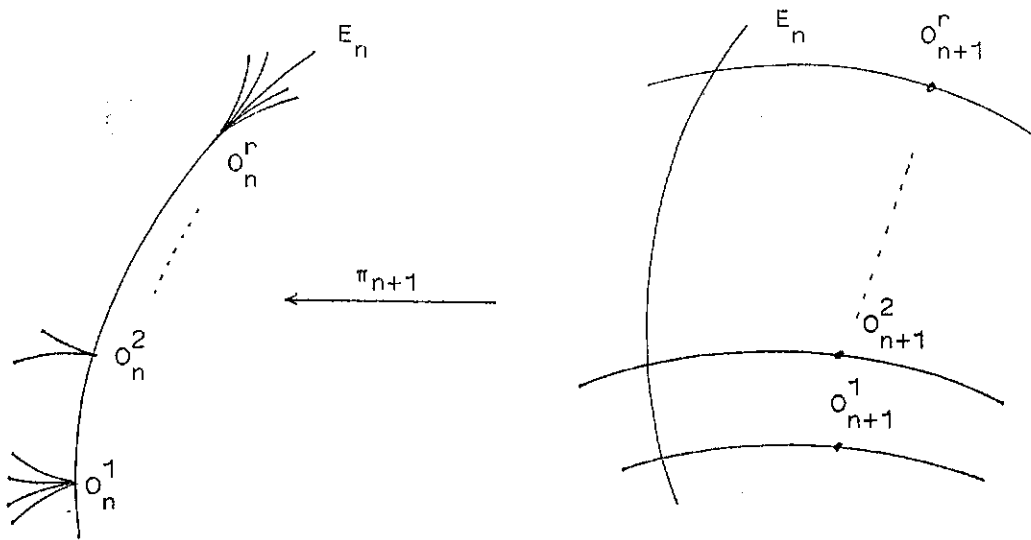
- A) $J_1 = \emptyset$
- B) $J_2 = \emptyset$
- C) $J_1 \neq \emptyset, J_2 \neq \emptyset$.

Como en 4.2.12 O_{n-1} será el último punto infinitamente próximo común a todas las ramas.

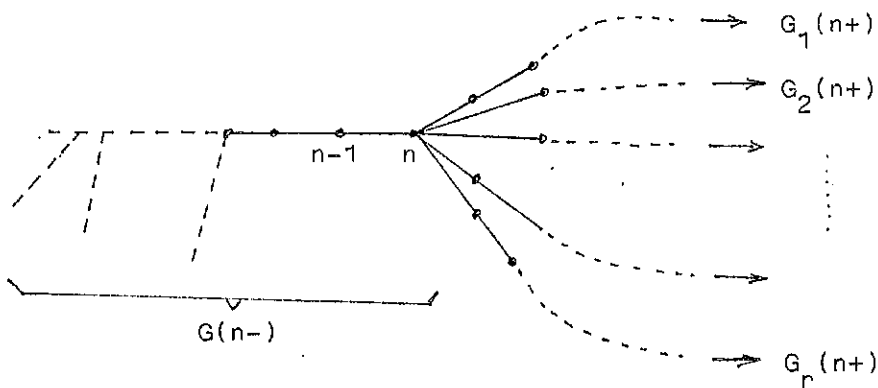
4.2.15 (Caso A) de 4.2.14).- En este caso se tiene $c \leq l_q^i$, $\forall i \in I$, y $n = H(s_q - 1) + k_q + c$. Después de $n-1$ transformaciones cuadráticas los desarrollos de H-N de las ramas transformadas comienzan por:

$$z_{s_q-1} = a_{s_q, k_q+c}^i z_{s_q} + \dots$$

Puesto que $a_{s_q, k_q+c}^i \neq a_{s_q, k_q+c}^j$ si $i \neq j$ (1.1.5) en $C^{(n-1)}$ aparecen r tangentes distintas, y por tanto tenemos $O_n^1, O_n^2, \dots, O_n^r$ puntos distintos, uno por cada clase de equivalencia de R_{γ_0} . Observemos que los puntos O_n^1, \dots, O_n^r del divisor E_n son todos libres:



Si G_i es el grafo dual de la curva $C_{I_i} = \bigcup_{j \in I_i} C_j$ se tiene entonces $G(C) = G(n-) \bigsqcup_n G_1(n+) \bigsqcup_n \dots \bigsqcup_n G_r(n+)$, gráficamente:



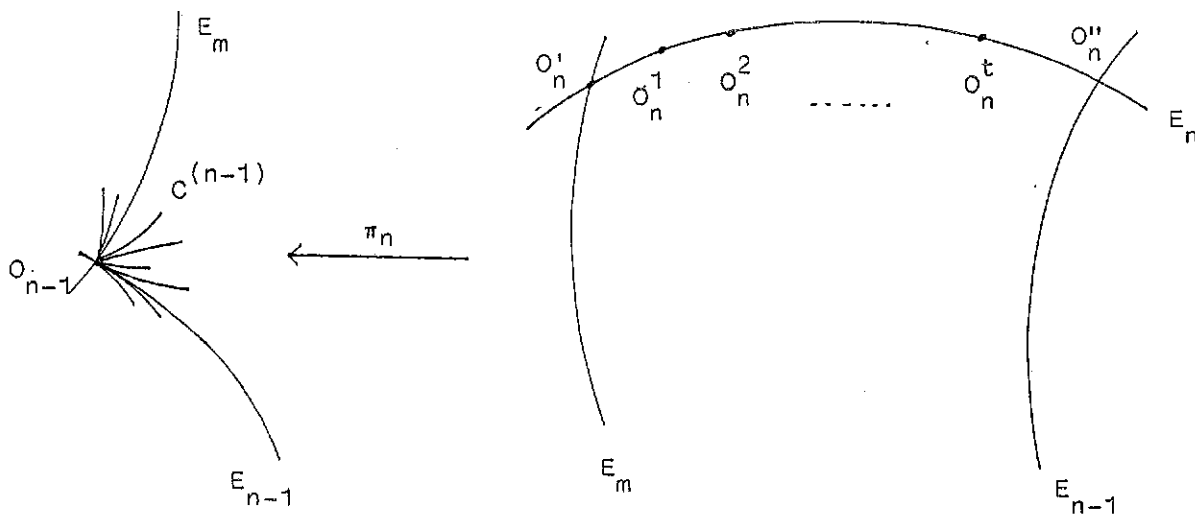
Para el único punto de peso n tenemos:

$$- \tau^+(n) = r$$

$$- \tau^-(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } c > 0 \\ 2 & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

4.2.16 (Caso B) de 4.2.14).- Se tiene en este caso $c = 1_{q+1}^i$
 $\forall i \in I$; además O_{n-1} es necesariamente un punto satélite y $n > H(s_q) + 1$.

La transformada estricta de $C, C^{(n-1)}$, tiene necesariamente más de una tangente.



Sean $\{O_n^1, \dots, O_n^t\}$ los puntos infinitamente próximos a O_{n-1} que son además libres, necesariamente el punto O_n^1 ó el punto O_n^t (ó ambos) es también uno de los puntos infinitamente próximos a O_{n-1} pues en caso contrario el par de contacto de C sería $(q+1, 0)$.

El conjunto de índices $j \in I$ de manera que $C_j^{(n-1)}$ pasa por el punto O_n^1 es una de las clases de equivalencia para R_{γ_0} (ver 4.1.4 d) supondremos que se trata de I_1 . Análogamente supondremos que $C_{I_i}^{(n)} \cap E(n) = O_n^i; i = 1, \dots, t$. Nótese que las clases de equivalencia I_1, \dots, I_t se caracterizan por verificar: $n = H(s_{q+1}^r - 1) + k_{q+1}^r, r \in I_i$.

De forma similar consideramos los conjuntos:

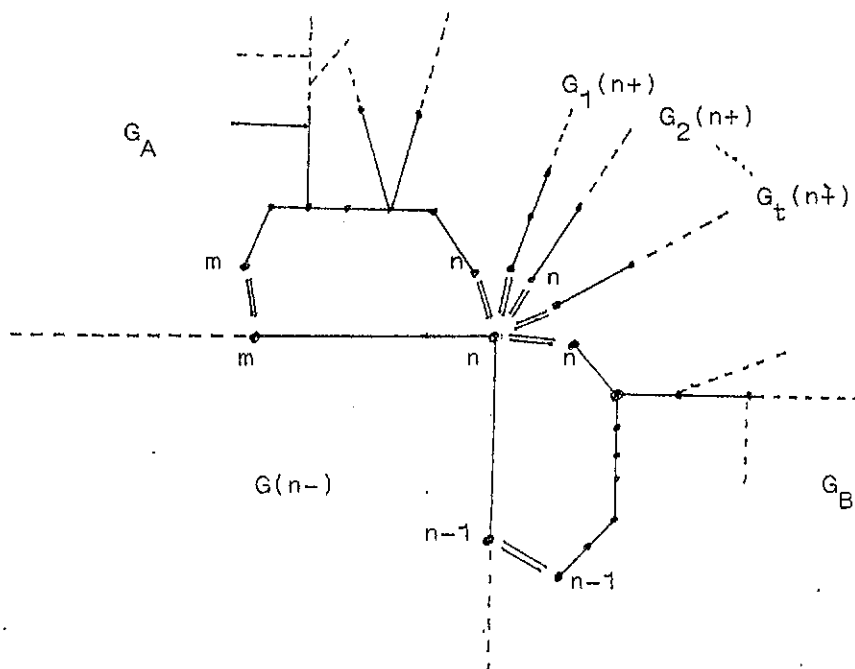
$$A = \{i \in I / C_i^{(n)} \cap E(n) = E_n \cap E_m\}$$

$$B = \{i \in I / C_i^{(n)} \cap E(n) = E_n \cap E_{n-1}\}$$

Denotamos por G_A (resp. G_B) el grafo dual de la curva

$C_A = \bigcup_{i \in A} C_i$ (resp. $C_B = \bigcup_{i \in B} C_i$) y para $1 \leq i \leq t$ por G_i el grafo dual de la curva C_{I_i} . Se tiene entonces:

$$G(C) = G(n-) \underset{m,n}{\sqcup} G_A(m,n,+) \underset{n,n-1}{\sqcup} G_B(n,n-1,+) \underset{n}{\sqcup} G_1(n+) \underset{n}{\sqcup} \dots \underset{n}{\sqcup} G_t(n+)$$



4.2.17 (Caso C) de 4.2.14).- En este caso se tiene

$J_1 \neq \emptyset \neq J_2$. El entero n es en este caso:

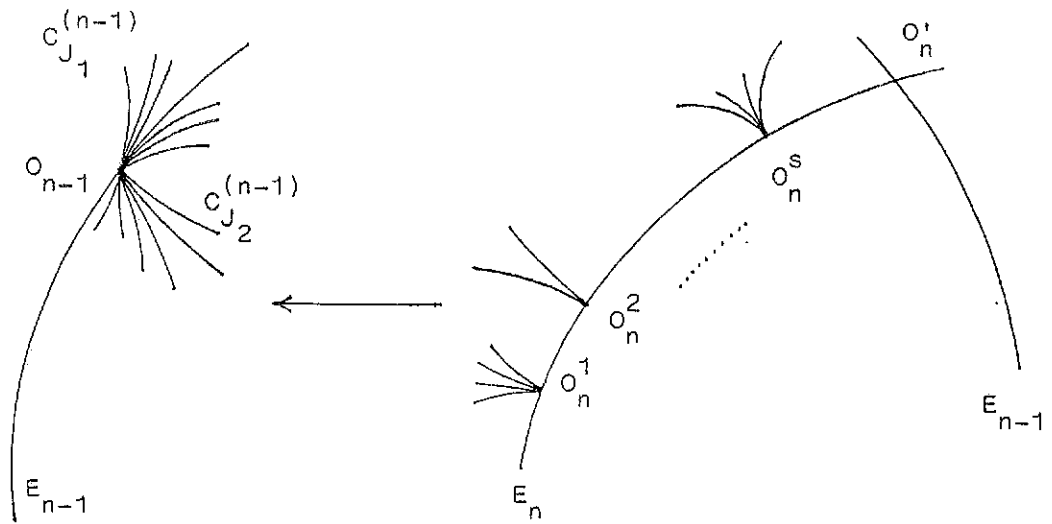
$$n = H(s_q - 1) + k_q + c.$$

Puesto que $c = l_q^i + 1$, $\forall i \in J_1$, $C_{J_1}^{(n-1)}$ es tangente al divisor E_{n-1}

(pues $n = H(s_q^i)$ si $i \in J_1$), las ramas que forman $C_{J_2}^{(n-1)}$ son en

cambio todas transversales a E_{n-1} y aparecen tantas tangentes dis-

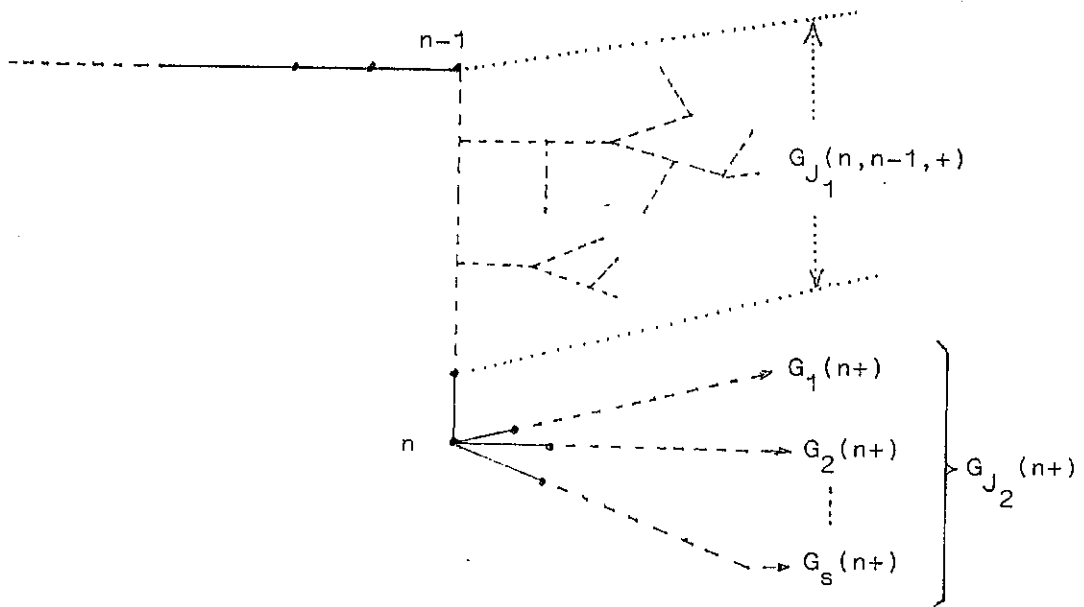
tintas como clases hay en el conjunto J_2 , es decir s .



Consideramos entonces los grafos duales de las curvas $C_{I_1}, C_{I_2}, \dots, C_{I_s} : G_1, G_2, \dots, G_s$ y denotamos por G_{J_1} el grafo dual de la curva C_{J_1} . Se tiene:

$$G(C) = G(n-) \bigsqcup_n G_1(n+) \bigsqcup_n \dots \bigsqcup_n G_s(n+) \bigsqcup_{n,n-1} G_{J_1}(n,n-1,+)$$

es decir:



4.2.18 Teorema.- El grafo dual de una curva C es un dato equivalente a la clase de equisingularidad de la curva.

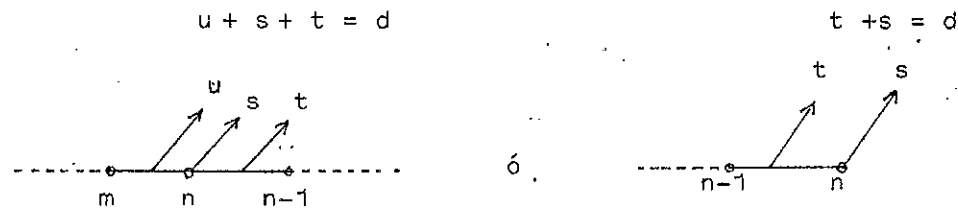
Demostración: Haremos la prueba por inducción sobre el número de ramas d . Para $d = 1$ el resultado es 4.2.10 e).

En el caso general, consideramos el entero n dado por la condición:

$$n = \sup\{k \in \mathbb{N} / \exists_1 Q \in G(C) \text{ con } p(Q) = n\}.$$

Puesto que con peso $n+1$ aparecerá más de un punto, es claro que n es el número de puntos infinitamente próximos comunes a todas las ramas, el último de ellos es entonces O_{n-1} .

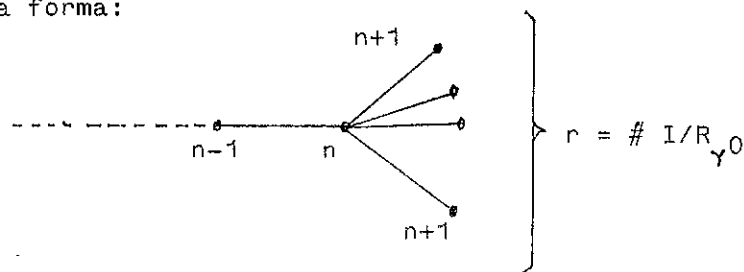
Podemos formar, a partir de $G(C)$, el grafo dual de nivel n (véase 4.2.4 c)), $G(n-)$. Puesto que todos los puntos del n -ésimo entorno infinitesimal están sobre el divisor E_n tenemos una situación del tipo:



Por la definición de n , los números u, s, t verifican:

- $u + s + t = d$
- $u < d, t < d, s \leq d$.

En el caso $s = d$, todos los puntos infinitamente próximos en el n -ésimo entorno infinitesimal (necesariamente más de uno) son puntos libres, estamos pues en la situación A) de 4.1.14 y $G(n+1, -)$ tendrá la forma:



El grafo $G(n+)$ está formado entonces por r grafos $G_1(n+), \dots, G_r(n+)$ "pegados" por el divisor n y se tiene que $G(C_{I_i}) = G(n-) \bigsqcup_n G_i(n+)$, $i = 1, \dots, r$ son los grafos de las curvas C_{I_1}, \dots, C_{I_r} . Por hipótesis de inducción finaliza la prueba, pues n permite calcular el par de contacto.

Supongamos $s < d$, en este caso necesariamente es $u > 0$ ó $t > 0$ y nos encontramos en uno de los casos B) ó C) de 4.2.14. Observemos además que es $u = 0$ si y sólo si es $J_1 \neq \emptyset$ y $J_2 \neq \emptyset$ (Caso C) (resp. $u \neq 0$ si y sólo si $J_2 = 0$, es decir estamos en el caso B)).

Correspondientes a las partes de G que hemos "colapsado" en cada una de las flechas tenemos los grafos siguientes: Si es $s > 0$, $G_s(n+)$; si es $u > 0$, $G_u(m, n, +)$; si es $t > 0$, $G_t(n, n-1, +)$ (todos ellos grafos conexos) de manera que es

$$G(C) = G(n-) \bigsqcup_n G_s(n+) \bigsqcup_{m,n} G_u(m, n, +) \bigsqcup_{n, n-1} G_t(n, n-1, +)$$

y podemos considerar

$$G_D = G(n-) \bigsqcup_n G_s(n+) \quad \text{si es } s > 0$$

$$G_A = G(n-) \bigsqcup_{m,n} G_u(m, n, +) \quad \text{si es } u > 0$$

$$G_B = G(n-) \bigsqcup_{n, n-1} G_t(n, n-1, +) \quad \text{si es } t > 0.$$

Obsérvese que si nos encontramos en la situación de 4.2.16, los grafos G_A y G_B que hemos construido corresponden a los grafos duales de las curvas C_A y C_B respectivamente para los conjuntos de índices A y B allí definidos; mientras que G_D sería el corres-

pendiente a la curva $C_{I_1} \cup \dots \cup I_t$, es decir el que hemos denotado en 4.2.16 por $G_1(n) \sqcup_n G_2(n) \sqcup_n \dots \sqcup_n G_t(n)$.

Si tenemos $u = 0$ (es decir estamos en 4.2.17), G_A no aparece y G_B es el grafo dual de la curva C_{J_1} mientras que G_D corresponde a la curva C_{J_2} .

Los grafos G_A, G_B, G_D son entonces grafos duales de curvas con un número de ramas estrictamente menor que d y por hipótesis de inducción podemos calcular la clase de equisingularidad de las curvas C_A, C_B y C_D . Por 4.1.5.c) n nos permite calcular el par de contacto y como consecuencia las multiplicidades de intersección que restan y finaliza la prueba.

4.2.19 Nota.- El procedimiento para calcular los grafos duales de las ramas componentes es más simple que el que proporciona el Teorema anterior.

Basta partir de la flecha que señala la componente en cuestión y recorrer todo el grafo hacia atrás quedándonos únicamente con los puntos que tienen pesos estrictamente decrecientes. El procedimiento nos lo dictan los resultados 4.2.9 y 4.2.10, no entraremos en más detalles y veremos la rapidez del método con un ejemplo:

Por el Teorema 4.2.18 este problema está íntimamente relacionado, en realidad es el mismo, con los resultados expuestos en el epígrafe 1 del Capítulo I, en particular 1.1.8.

4.2.21 Definición.- Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \leq \min\{H(s_{g_1} - 1) + k_{g_1}, H(s_{g_2} - 1) + k_{g_2}\}$

G_1 y G_2 son n -compatibles si se tiene $G_1(n-) = G_2(n-)$.

Sea $\sigma = \sup\{n / G_1(n-) = G_2(n-)\}$, diremos entonces que G_1 y G_2 son compatibles de nivel σ .

4.2.22 Lema.- Sea p el índice de separación del tipo de equisingularidad de las clases de equisingularidad definidas por G_1 y G_2 . Se tiene entonces:

$$\rho = \#\{P \in G_1(\sigma-) / \tau(P) \geq 3\}$$

Demostración.- Puesto que ρ es por definición (1.1.1)

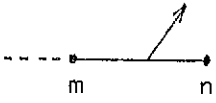
$\rho = \max\{n / h_j^1 = h_j^2 \quad \forall j < s_n, k_i^1 = k_i^2 \quad \forall i \leq n\}$ y claramente $\sigma > H(s_p - 1) + k_p$ se tiene la desigualdad:

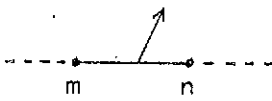
$$\rho \leq \#\{P \in G_1(\sigma-) / \tau(P) \geq 3\}$$

Se tiene una desigualdad estricta si y sólo si $\sigma > H(s_{p+1} - 1) + k_{p+1}$ pero esto implica de manera evidente $h_j^1 = h_j^2, \forall j < s_{p+1}$ y $k_{p+1}^1 = k_{p+1}^2$ que es absurdo por la definición de ρ . (Véase 4.2.10).

4.2.23 Nota.- Si en $G_1(\sigma-)$ y $G_2(\sigma-)$ marcamos con una flecha el lugar que ocupan los puntos infinitamente próximos O_σ^1 y O_σ^2 tal y como lo hemos hecho en 4.2.4, las flechas aparecen en distinta

posición en $G_1(\sigma-)$ y $G_2(\sigma-)$ pues en caso contrario tendríamos $G_1(\sigma+1,-) = G_2(\sigma+1,-)$ en contra de la definición de σ .

Si tenemos  en $G_2(\sigma-)$ (resp. en $G_1(\sigma-)$) consideramos $G_2(m,n,+)$ (resp. $G_1(m,n,+)$), se tiene entonces $G_2 = G_2(\sigma-) \sqcup_{m,n} G_2(m,n,+)$ (resp. $G_1 = G_1(\sigma-) \sqcup_{m,n} G_1(m,n,+)$). Podemos tomar en este caso el grafo $G = G_1 \sqcup_{m,n} G_2(m,n,+)$ (resp. $G = G_2 \sqcup_{m,n} G_1(m,n,+)$). Puesto que siempre se da la situación

 bien en $G_2(\sigma-)$, bien en $G_1(\sigma-)$ hemos definido en este caso lo que llamaremos operación de adjunción de orden σ de los grafos G_1 y G_2 . Denotaremos el grafo dual resultante por G_σ .

4.2.24 Proposición.- En las condiciones y con las notaciones anteriores consideremos el conjunto:

$$B = \{H(s_r - 1) + k_r + c \mid 0 \leq r \leq \rho, 0 \leq c \leq \min\{l_r^1, l_r^2\}\}$$

Sea G el grafo dual de una curva con dos ramas C_1 y C_2 de grafos duales G_1 y G_2 , G es entonces un elemento del conjunto:

$$\mathfrak{G} = \{G_1 \sqcup_n G_2(n+) = G_2 \sqcup_n G_1(n+) \mid n \in B\} \cup \{G_\sigma\}$$

(Compárese con 1.1.7 y 1.1.8).

Demostración:

Utilizando las notaciones de 1.1.8, las posibles multiplicidades de intersección entre C_1 y C_2 son los elementos del conjunto

$$A = \{\xi(q,c) \mid 0 \leq q \leq \rho, 0 \leq c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}\} \cup \{\xi(\rho)\}$$

ó equivalentemente, los posibles pares de contacto son los elementos del conjunto:

$$A' = \{(q,c) / 0 \leq q \leq \rho, 0 \leq c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}\} \cup \{(\rho, \min\{l_\rho^1+1, l_\rho^2+1\})\}$$

Tanto A como A' están en correspondencia biyectiva con el conjunto B definido en la proposición, es inmediato que si el par de contacto es (q,c) con $0 \leq q \leq \rho, 0 \leq c \leq \min\{l_q^1, l_q^2\}$ el grafo dual es entonces:

$$G = G_1 \bigsqcup_n G_2(n+) = G_2 \bigsqcup_n G_1(n+)$$

donde $n = H(s_q - 1) + k_q + c$. Si se da la multiplicidad más alta posible, es decir el par de contacto es $(\rho, \min\{l_\rho^1 + 1, l_\rho^2 + 1\})$ el grafo resulta ser:

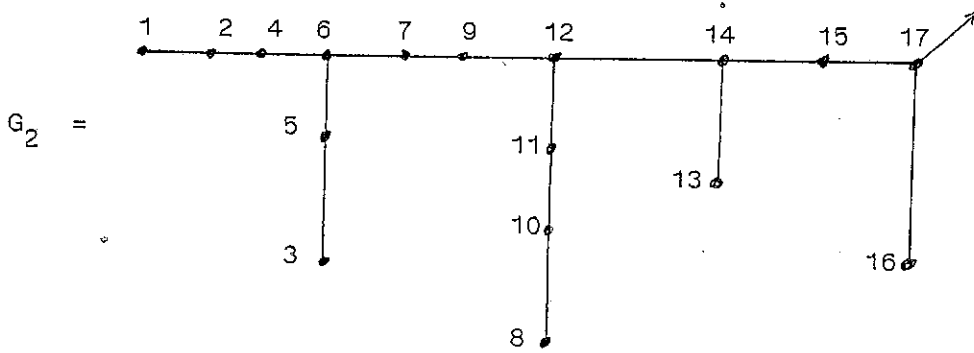
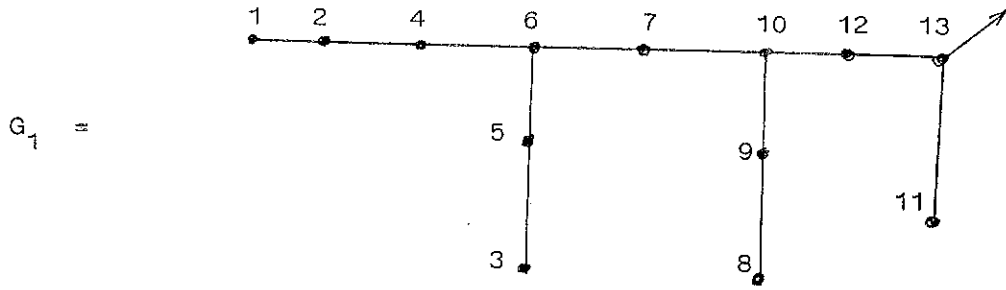
$$G = G_\sigma$$

4.2.25 Nota.- a) Nótese que el caso en que

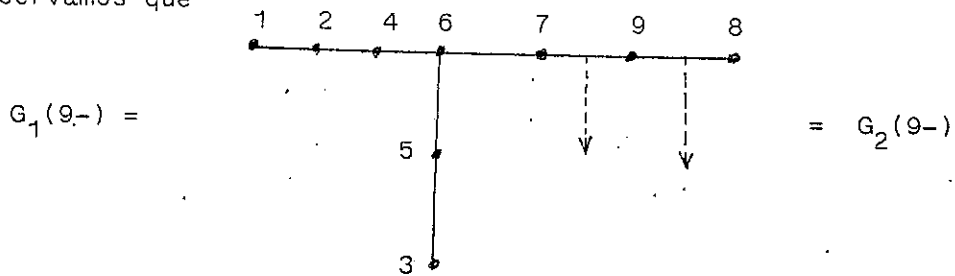
$c = \min\{l_\rho^1 + 1, l_\rho^2 + 1\}$, que era el más complicado de describir en 4.2.13, 4.2.14, 4.2.16, 4.2.17, en el caso de dos ramas se describe de una forma relativamente sencilla, pues es la única forma de unir G_1 y G_2 conservando el mayor número de divisores comunes.

b) Estos últimos resultados (4.2.20 - 4.2.24) se pueden extender al caso de varias ramas con la complicación evidente, pues las posibilidades se entrecruzan y se multiplican. La formación del grafo en que las componentes tienen la multiplicidad más alta posible se puede hacer sin grandes complicaciones.

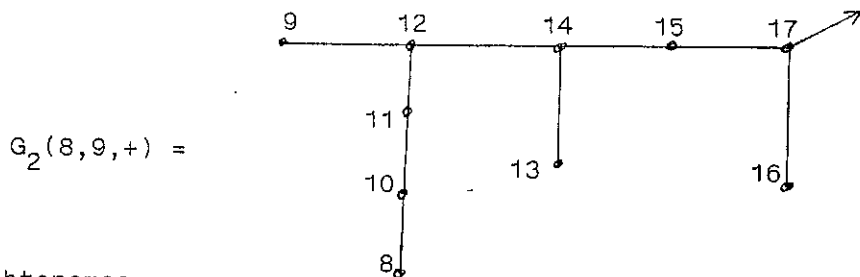
4.2.26 Ejemplo



Observamos que



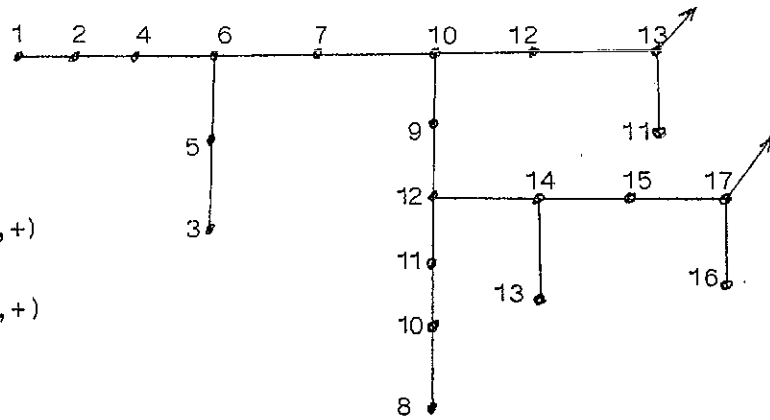
En $G_1(10-)$ el 10 aparece entre 7 y 9, en cambio en $G_2(10-)$ aparece entre 8 y 9, por tanto $G_1(10-) \neq G_2(10-)$. Formamos $G_2(8,9,+)$:



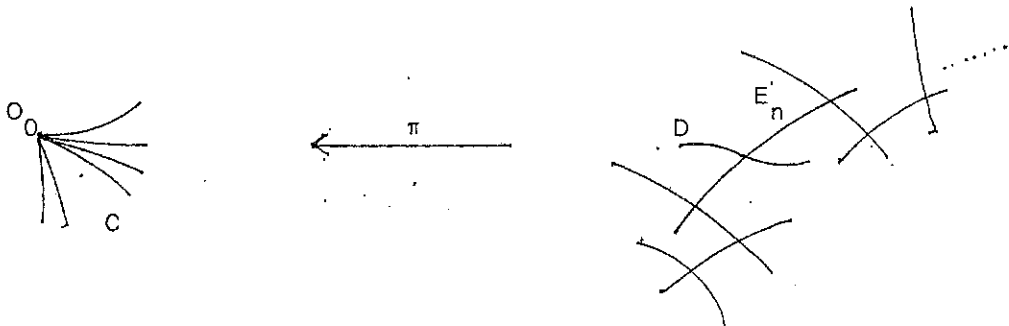
y obtenemos:

$$G_{\sigma} = G_1 \begin{array}{|c|} \hline 8,9 \\ \hline \end{array} G_2(8,9,+)$$

$$= G_2 \begin{array}{|c|} \hline 7,9 \\ \hline \end{array} G_2(7,9,+)$$



4.2.27 Nota.- Consideramos un punto del grafo dual de la curva C y su divisor asociado E_n en el divisor excepcional total E . Consideramos una curva $D \subset S_N$ lisa y transversal al divisor E_n en un punto no singular de la transformada total de la curva C , $C^{(N)} \cup E$.



Consideramos $\pi(D) \subset S_0 = \text{Spec } k[[X,Y]]$, $\pi(D)$ es una curva irreducible y plana.

4.2.28 Teorema

a) Sea D una curva en las condiciones de 4.2.27 en un divisor E_n que corresponde a un extremo libre de $G(C)$, $\underline{v}(\pi(D))$ es entonces uno de los valores del contacto maximal de C . Recíprocamente, si F es una curva irreducible tal que $\underline{v}(F) \in V(C)$, la transformada estricta de F por π es una curva lisa y transversal a un divisor que corres-

ponde a un extremo libre de $G(C)$.

b) De forma similar al apartado a) γ^0 (ver 1.2.4) se alcanza mediante una curva D en las condiciones de 4.2.27 situada en el divisor de peso $\sum_{n < q} (l_n + 1) + c$, divisor que se localiza en $G(C)$ como el último divisor libre común a todas las ramas.

Demostración:

El apartado b) es claro observando el desarrollo de $H-N$ de una curva h con $\underline{v}(h) = \gamma^0$ (ver 1.2.4), utilizando 4.1.4 y los resultados sobre la formación del grafo dual.

En cuanto al apartado a), razonaremos por inducción sobre el número de ramas utilizando los Teoremas sobre la formación inductiva de los valores del contacto maximal 3.3.9 y 3.3.11.

El caso $d = 1$, está ya comentado en 4.2.11. Por otra parte los valores del contacto maximal de géneros $-1, 0, 1, \dots, q-1$ verifican claramente el resultado por los mismos argumentos utilizados en 4.2.11.

Si suponemos $J_2 = \emptyset$, claramente se tiene el resultado para género q y por el Teorema 4.2.13 y 4.2.16 los extremos libres de $G(C)$ restantes son extremos libres de los grafos $G(C_{I_1}), G(C_{I_2}), \dots, G(C_{I_r})$ por hipótesis de inducción por 3.3.11 se tiene el resultado.

Supongamos $J_2 \neq \emptyset$ y $n = H(s_q) + 1$, por 4.2.17 se tiene:

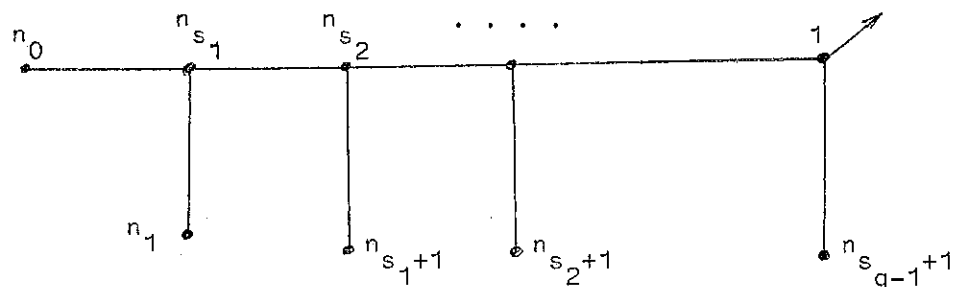
$$G(C) = G(n-) \bigsqcup_n G_1(n+) \bigsqcup \dots \bigsqcup_n G_s(n+) \bigsqcup_{n, n-1} G_{J_1}(n, n-1, +)$$

donde $G_i = G(C_{I_i})$ y $J_2 = I_1 \cup \dots \cup I_s$. Los extremos libres de $G(C)$ no estudiados todavía, son todos ellos extremos libres de $G_1(n+), \dots, G_s(n+), G_{J_1}(n, n-1, +)$ y por tanto de $G_1, G_2, \dots, G_s, G_{J_1}$. De nuevo por hipótesis de inducción y por 3.3.1i se tiene el resultado.

4.2.29 Nota.- a) Puesto que en $G(C)$ podemos localizar sin mayores problemas los puntos libres del árbol de puntos infinitamente próximos, en virtud de 4.1.4 es posible reproducir con facilidad R_{Y^0} y por lo anterior el A.C.P de la curva en cuestión.

b) Hemos visto desde el comienzo una forma de asignar pesos a $G(C)$ en función del árbol de puntos infinitamente próximos. Se pueden utilizar también muchas otras formas de pesos $G(C)$ que permiten incluso obviar todos los divisores y quedarnos únicamente con la "silueta" de $G(C)$. Describiremos algunos:

b-1) En el caso irreducible, si para el divisor E_n consideramos el entero $(C^{(n)}, E_n) = m(O_{n-1})$, el grafo



contiene toda la información necesaria.

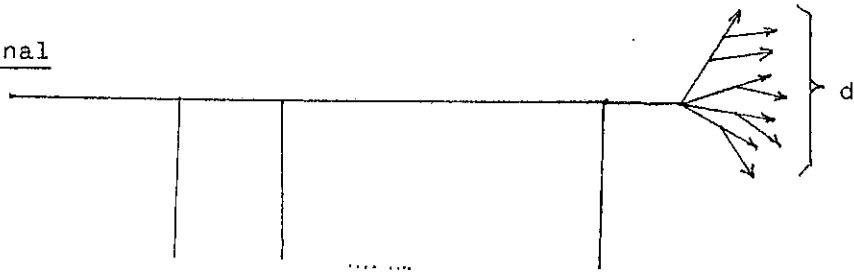
b-2) En el caso general, podemos colocar en los extremos libres los valores del contacto maximal y en los extremos con flecha los valores $V_{\infty}(C)$.

Es claro que estos pesos son suficientes.

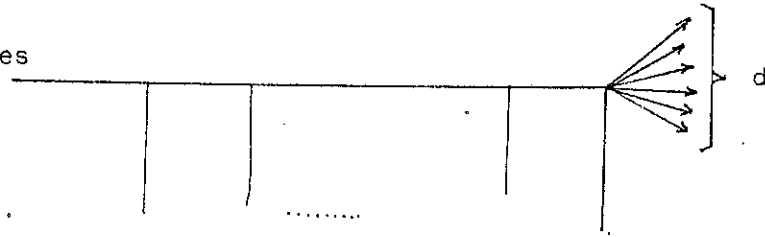
b-3) Podemos distribuir los pesos que aparecen en el A.C.P. en el grafo dual mediante el Teorema 4.2.28 colocándolos en el divisor adecuado. De esta forma lo que hacemos es colocar el A.C.P. en $G(C)$

4.2.30 Ejemplos.- Siguiendo con la gama de ejemplos de 1.3.12, el caso A) lo hemos descrito suficientemente.

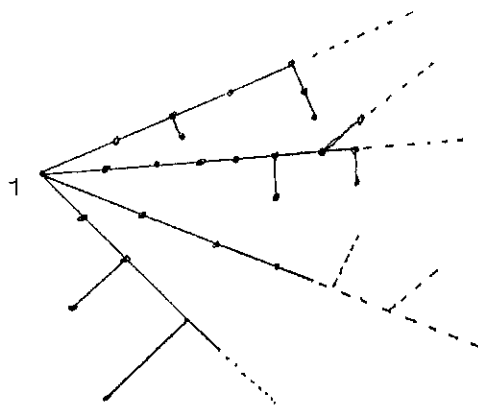
B) Caso diagonal



Si $\#I/R_0 = d$ es



C) Caso multitangente:



BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABHYANKAR, S.S. "Inversion and invariance of characteristic pairs". Am. J. Math. 89, 363-372 (1967).
- [2] ABHYANKAR, S.S. "Expansion techniques in algebraic geometry". Tata Lecture Notes 57. Bombay (1977).
- [3] ABHYANKAR & MOH, "Embeddings of the line in the plane". Journal für Mathematik. Band 276; 148-166 (1977).
- [4] ABHYANKAR & SINGH, "Embeddings of certain curves in the affine plane". Am. J. Math. 100, 99-175 (1978).
- [5] ANCOCHEA, G. "Curvas algebraicas sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cualquiera". Mem. de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales. Madrid 1947.
- [6] ANGERMULLER., G. "Die werthehalbgruppe einer ebenen irreduziblen algebroiden Kurve". Math. Z. T 53, 267-282 (1977).
- [7] APERY, R. "Sur le branches superlineaires des courbes algebriques". C.R. Acad. Scr. Paris 222, 1198-1200 (1945).
- [8] ATIYAH-MAC.DONALD; "Introduction to commutative Algebra". Adison-Wesley, Publis. Co. London (1969).
- [9] AZEVEDO, A. "The Jacobian ideal ot a Plane Algebroid Curve ". Thesis. Purdue University, Indiana (1967).
- [10] BAYER, V. "Semigroup of two irreducible algebroid plane curves". Manuscripta Math. 48, 207-241 (1985).
- [11] BERTIN, J. & CARBONNE, P. "Semigroups d'entiers et applica-

- tions aux branches". J. Algebra 49 (1977).
- [12] BOLLAERTS, D. "On the Poincaré series associated to the p -adic points on a curve". Preprint. Leuven (1985).
- [13] BOURBAKI, N. "Algèbre commutative". Hermann. Paris (1967).
- [14] BRAUNER, K. "Zur Geometrie der Funktionen Zweier Komplexen Veränderlichen". Abh. Math. Sem. Hamburg, 6, 1-54 (1928).
- [15] BRESINSKY, H. "Semigroups corresponding to Algebroid branches in the plane". Proc. of the Am. Math. Soc. 32, 381-384 (1972).
- [16] BUCHWEITZ, R.O. "On Zariski criterion for equisingularity and non-smoothable monomial curves". Communication en Arcata (1981).
- [17] BURAU, W. "Kennzeichnung der Schlangkonoten". Abh. Math. Sem. Hamburg, 9, 125-133 (1932).
- [18] CAMPILLO, A. "Algebroid curves in positive characteristic". L.N.M. Vol. 813. Springer-Verlag. Berlin and New York (1980).
- [19] CAMPILLO, A. "Semigrupos de valores de singularidades de curvas analíticamente reducibles". Actas IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. Vol. I. pp. 449-452. U. de Salamanca (1982).
- [20] CAMPILLO, A., "Hamburger-Noether Expansions Over Rings". Trans. of Am. Math. Soc. 279, 377-388 (1983).
- [21] CAMPILLO, A. "On saturation of curve singularities (any characteristic)". Proc. of Sympos. in Pure Math. Vol. 40. Part. 1, 211-220, (1983).
- [22] CAMPILLO, A. "Arithmetical aspects of saturation of singularities". Aparecerá en Publications of the Banach Center.

- [23] CASAS-ALVERO, E. "On the singularities of Polar Curves".
Manuscripta Math. 43, 167-190 (1983).
- [24] CASAS-ALVERO, E. "Infinitely near imposed singularities and
singularities of polar curves". Preprint. Univ. Central Bar-
celona (1986).
- [25] DELGADO, F. "Semigrupo de valores de singularidades de curvas
reducidas". Aparecerá en actas del VII Congreso de Matemáti-
cas de Expresión Latina. Coimbra 1985.
- [26] DELGADO, F. "Maximal elements and Symmetry of the semigroup
of values of a curve singularity with several branches". Ex-
tracta Mathematicae, 1, nº 1, 12-14 (1986).
- [27] DELGADO, F. "Sobre las componentes irreducibles de la polar
genérica de una singularidad de curva plana con varias ramas".
Aparecerá en Actas XI Jornadas de Matemáticos Hispano-Lusos.
Badajoz 1986.
- [28] DELGADO, F. - NUÑEZ, C. "Monomial Rings and Saturated Rings"
Aparecerá en Actas II Congreso de Geometría Algebraica de La
Rábida (1984). Travaux in Cours. Ed. Hermann.
- [29] EISENBUD, D & NEUMANN, W.D. "Three-dimensional link theory
and invariants of plane curve singularities". Annals of
Math. Studies 110. Princeton University Press (1985).
- [30] ENRIQUES, F. & CHISINI, O. "Teoría Geométrica delle equazio-
ni e delle funzioni algebriche". Vol. 2. Libro quarto.
Bologna (1918).

- [31] EPHRAIM, R. "Special polars and curves with one place at infinity". Proc. of Symp. in Pure Math. 40 I. Am. Math. Soc. 353-361 (1983).
- [32] GABRIELOV, A.M. "Polar curves and Intersection Matrices of singularities". Invent. Math. 54, 15-22, (1979).
- [33] GANONG, R. "On plane curves with one place at infinity". Journal fur Mathematik. B 307-308. 173-193 (1978).
- [34] GARCIA, A. "Semigroups associated to Singular Points of Plane Curves". J. Reine. Angew. Math. 336, 165-184 (1982).
- [35] GARCIA, A. "The Semigroup of a singular point of a curve with two equisingular branches". Manuscripta Math. 44, 51-58 (1983).
- [36] GORENSTEIN, D. "An arithmetic theory of adjoint plane curves". Trans. Amer. Math. Soc. 72 414-436 (1952):
- [37] GRANJA, A. "Invariantes de equisingularidad de curvas planas". Tesis Univ. Valladolid (1985).
- [38] GRANJA, A. "Curvas analíticas planas con contacto en la base Apery". Preprint. Univ. De Valladolid (1986).
- [39] HÀ HUY & LÊ-DŨNG-TRÀNG "Sur la topologie des polynômes complexes".
- [40] HERZOG, J. "Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings". Manuscripta Math. 3 (1970).
- [41] HIRONAKA, H. "Introduction to the theory of infinitely near singular points", Mem. de Matem. del Inst. Jorge Juan. CSIC Madrid (1974).

- [42] IGUSA, J.I. "Complex powers and asymptotic expansions I) y II)"
J. Reine. Angew. Math. 268/269, 110-130 (1974) y 278/279
357-368 (1975).
- [43] KUNZ, ERNST "The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring". Proc. Amer. Math. Soc. 25 748-751 (1970).
- [44] KUNZ, E. & WALDI, R. "Über die Derivationsmodule und das Jacobi ideal von Kurvesingularitäten". Math. Z. 187, 105-123 (1984).
- [45] KOO, TZE-CHAR & LU; YUNG-CHEN "ON analytic function germs of two complex variables". Topology 16, 299-310 (1977).
- [46] LÊ-DŨNG-TRÀNG "Noeuds Algébriques" Ann. Inst. Fourier, 23, 117-126. Grenoble (1972).
- [47] LÊ-DŨNG-TRÀNG, C.P. RAMANUJAM "The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type". Am. J. Math. 98, 67-78, (1976).
- [48] LÊ-DŨNG-TRÀNG "Comunicación en 'Open problems in Theory of singularities'". Conference on Theory of singularities. Katata (1980).
- [49] LÊ-DŨNG-TRÀNG "Courbes polaires et résolution des courbes planes". Actas del II Congreso de Geometría Algebraica de La Rábida (1984). Aparecerá en Travaux in Cours. Hermann.
- [50] LÊ-DŨNG-TRÀNG "Exposants polaires et résolution des surfaces". Comunicación en 3^{er} Congreso de Mathématiciens Vietnamiens. Julio 1985.
- [51] LEJEUNE-JALABERT, M. "Sur l'équivalence des courbes algébriques des plans. Coefficients de Newton". Thèse. Paris VII (1973).

- [52] LIBGOBER, A. "A characterization of plane curve singularities with one characteristic pair". Am. J. Math. 505-507 (1983).
- [53] LIPMAN, J. "Stable ideals and Arf Rings". Am. J. Math. 93 649-685 (1971).
- [54] LIPMAN, J. "Absolute saturation of one dimensional local rings". Am. J. Math. 97, 771-790 (1975).
- [55] LOESER, F. "Exposant d'Arnold et sections planes". C.R. Acad. Sc. Paris, 298, 485-488 (1984).
- [56] LOESER, F. "Une estimation asymptotique du nombre de solutions approchés d'une equation p-adique". Preprint. Paris (1985).
- [57] LUENGO, I. "A counterexample to a Conjecture of O. Zariski". Mat. Ann. (1985).
- [58] LUENGO, I. "On the equations defining a singularity". Preprint. Univ. Complutense Madrid (1980).
- [59] MATSUMURA, H. "Commutative Algebra. 2^a Ed." Benjamín (1980).
- [60] MÉRLE, M. "Invariants polaires des courbes planes". Invent. Math. 41, 103-111 (1977).
- [61] MILNOR, J. "Singular points of complex hypersurfaces". Ann. of Math. Stud, 61. Princeton Univ. Press (1968).
- [62] MOH, T.T. "On Characteristic pairs of algebroid plane curves for caractéristique p". Bull. Inst. Math. Sinica 1, 75-91 (1973).
- [63] MOH, T.T. "On analytic irreducibility at ∞ of a pencil of curves". Proc. Am. Math. Soc. 44, 22-24, (1974).

- [64] NEUMANN, W.D. "Invariants of plane curve singularities" in *Noeuds., Tresses et singularités*, Monographie N° 31 de l'Enseignement Math. 223-232 (1983).
- [65] NUÑEZ, C. "An Elementary proof of the invariance and inversion of characteristic pairs". *Extracta Mathematicae*, 1, n°1, 6-8 (1986).
- [66] NUÑEZ, C. "Tesis en Preparación". Valladolid 1986.
- [67] PINKHAM, HENRY C. "Deformations of algebraic varieties with G_m action". *Asterisque* n° 20 (1974).
- [68] PINKHAM, H. "Courbes planes ayant une seule place à l'infini". *Publications de l'Ecole Polytechnique*, Paris (1978).
- [69] SANCHEZ GIRALDA, T. "Introducción a la teoría de dilataciones. Equisingularidad de curvas planas según O. Zariski". *Tópicos en Algebra y Geometría* 380-506. Univ. Valladolid (1985).
- [70] SPIVAKOVSKY, M. "Sandwiched singularities of surfaces and the Nash resolution for surfaces". Tesis Harvard University, Mayo 1985.
- [71] TEISSIER, B. & LÉ-TEISSIER "Cycles evanescentes, sections planes et conditions de Whitney I y II". *Singularités à Corgèse*. *Asterisque* 7/8. *Proc. of Simp. in Pure Math*, 40-2, 65-104 (1983).
- [72] TEISSIER, B. "The hunting of invariants in the geometry of discriminants". *Proc. Nordic Summer School (Oslo)*. Noordhoff, Groningen, 565-677 (1976).
- [73] TEISSIER, B. "Variétés polaires I. Invariants polaires des

- singularités d'hypersurfaces". Invent. Math. 40, 267-292 (1977).
- [74] TEISSIER, B. "Resolution simultanée I y II". Seminar sur les singularités des surfaces L.N.M. 777. Springer-Verlag (1977).
- [75] VICENTE, J.L. "Singularidades de curvas algebroides alabeadas". Tesis, Madrid 1973.
- [76] WALDI, R. "Wertehalbgruppe und singularität einer ebeden algebraischen kurve". Dissertation. Regensburg (1972).
- [77] WALKER, R. "Algebraic curves". Dover Inc. New York (1962).
- [78] ZARISKI, O. "On the topology of algebroid singularities". Am. J. Math. 54, 433-465 (1932).
- [79] ZARISKI, O. "Studies in Equisingularity". (I) Am. J. Math. 87, 507-535 (1965). (II) Am. J. Math. 87, 972-1006 (1965). (III) Am. J. Math. 90, 961-1023 (1968).
- [80] ZARISKI, O. "Contribution to the problem of equisingularity" C.I.M.E. Varenna. Septembre (1969).
- [81] ZARISKI, O. "General theory of saturation and saturated local rings". (I) Am. J. Math. 93, 573-648 (1971). (II) Am. J. Math. 93, 872-964 (1971). (III) Am. J. Math. 97, 415-502 (1975).
- [82] ZARISKI, O. "Algebraic Surfaces" (2^o Ed.) Springer-Verlag. Berlin-New York (1972).
- [83] ZARISKI, O. "Le problème des modules pour les branches planes" Cours de l'École Polytechnique. Paris (1973). Appendice de B. Teissier.
- [84] ZARISKI, O.-SAMUEL, P. "Commutative algebra". Van Nostrand. Princeton (1958).

