DISCURSO DE INGRESO

DEL

EXCMO. SR. D. JESÚS ILDEFONSO DÍAZ DÍAZ

El mundo de la ciencia

y

las matemáticas del mundo

CONTESTACIÓN

DEL

EXCMO. SR. D. ALBETO DOU MAXDEXÀS

MADRID, 19 DE NOVIEMBRE DE 1997

Índice general

DISCURSO DE INGRESO

DEL

EXCMO. SR. D. JESÚS ILDEFONSO DÍAZ DÍAZ

El mundo de la ciencia

y

las matemáticas del mundo

Capítulo 1
A modo de introducción

Excmo. Sr. Presidente,
Excma. Sra. Presidenta del Instituto de España,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, Señores:

1.1. Agradecimiento inicial

Mis primeras palabras no pueden ser más que de sincero y profundo agradecimiento a los miembros de esta Real Academia por haberme confiado la responsabilidad de compartir sus tareas como miembro de número.

Paralelamente a la sana aspiración de que los trabajos de un científico sean aceptados en las revistas más prestigiosas del campo, parece también obvia la necesidad de contribuir al fortalecimiento del entorno más inmediato. Así, una buena parte de mi actividad científica ha estado ligada, en particular, a esta corporación desde mis comienzos profesionales. A partir de 1991 venía colaborando en sus actividades como Académico Correspondiente; de hecho, mi primer trabajo científico y otros posteriores, han sido publicados en su revista así como varias monografías que aparecieron como Memorias. Es, por tanto, un motivo de inmensa satisfacción formar parte ahora de esta corporación. Sin pretender caer en una falsa modestia, he de decir que me han asaltado serias dudas sobre lo acertado de vuestra elección desde que ésta se produjo. Me vienen constantemente a la cabeza mis innegables limitaciones y, a la vez, las muchas virtudes de tantos colegas que aún no han visto reconocidas aquí sus excepcionales carreras profesionales, pese a habérseles otorgado ya, en otros foros, importantes responsabilidades como miembros de una élite científica internacional. Podéis estar seguros de que, en lo que a mí concierne, volcaré todo mi entusiasmo y energías en la responsabilidad que ahora asumo intentando superar mis deficiencias y que velaré por aunar los mejores servicios de mis compañeros y colegas.

De mis maestros, de muchos de vosotros, he aprendido que nada hay más productivo que trabajar siendo consciente de las propias posibilidades y limitaciones, sin pretender metas imposibles pero sin carecer por ello de afán de progreso. Me anima conseguir un mayor acercamiento entre nuestra Academia de Ciencias y la comunidad matemática española. La vitalidad de las instituciones científicas debe estar en concordancia con la de la comunidad científica. Habría que lograr que esto fuese una realidad permanente en nuestro país. Diviso que el camino por recorrer es aún largo y no cabe conformismo autocomplaciente alguno que ralentice la marcha.

1.2. J.M. Torroja Menéndez

Quisiera dedicar, ante todo, unas palabras de recuerdo a quien durante más de veinticinco años ocupó el lugar que ahora me ofrecéis. Me refiero al añorado Profesor D. José María Torroja Menéndez, uno de los promotores principales del alto desarrollo que la geodesia tiene en nuestros días en este país y portador del apellido Torroja, tan unido a la historia de esta Academia desde hace más de un siglo.

Su especialización científica no coincidía con la mía pero compartíamos algunas inquietudes comunes, como por ejemplo el interés y curiosidad por los fenómenos geofísicos. No fui alumno suyo durante mis estudios de licenciatura ni de doctorado, aunque desde que acabé la carrera hasta su fallecimiento realizábamos nuestro quehacer cotidiano en la misma Facultad. La fina ironía de su singular personalidad, pese a su aparente seriedad, han quedado en mi recuerdo. En cualquier caso, mi conocimiento de él y de su obra no es lo suficientemente profundo como para que pueda valerme por mi mismo para ilustrar su figura. Permitidme pues que acuda a otras fuentes.

Comenzó su discurso de ingreso en esta Academia, *La geodesia en la era del espacio* [186], leído el 25 de Junio de 1969, señalando la emoción que le embargaba al ingresar en una corporación como ésta en la que su abuelo, Eduardo Torroja Caballé, había sido miembro de

1893 a 1918 y su padre, José María Torroja y Miret, entre 1920 y 1954, ocupando éste el cargo de Secretario General de la Academia desde 1934 hasta su fallecimiento, lo que por unos años llevó acarreado el fijar su vivienda en el edificio de la Academia, recuerdos de infancia a los que aludió con nostalgia. Finalmente dos tíos suyos también portaron una medalla de la Academia: Eduardo Torroja y Miret, entre 1944 y 1961 y Antonio Torroja y Miret, entre 1947 y 1974 que fue el único de los aludidos presente en el acto de su ingreso. Tampoco se pueden olvidar los eficaces servicios de su hermana Isabel Torroja Menéndez como Secretaria administrativa de la Academia.

Su discurso respondía fielmente al lema que figura en la medalla de Académico: *Observación y Cálculo*. Su ya dilatada experiencia en observatorios como el del Ebro, el de Georgetown en Estados Unidos, su ingreso en el Instituto Geográfico en 1942 y en el cuerpo de Astrónomos del Observatorio de Madrid en 1952, y sus importantes contribuciones referentes a aspectos primordialmente experimentales de la geodesia, como por ejemplo para la observación de los eclipses de Sol (la *cámara Torroja-Bonguera* que llegó a tener un importante impacto internacional en el eclipse de 30 de Junio de 1954) hasta aspectos más teóricos como los problemas de la mecánica celeste, fueron resaltados en su investidura en el discurso de contestación que le dirigió el Padre Antonio Romañá Pujó, otro de los grandes precursores de la geodesia actual.

La obra del profesor Torroja fue ilustrada recientemente con motivo del homenaje que le brindó la Academia el 13 de Diciembre de 1995[1]. Sus facetas docentes e investigadoras, su papel como promotor de la geodesia y astronomía en nuestro entorno, su actividad en las ciencias geográficas y por último, su huella en la Real Academia fueron recordadas por compañeros, colegas y discípulos con gran profusión de detalles. Valgan, pues, las páginas de la publicación de ese homenaje como sustituto de mis pocos recursos para recordar a tan querida persona.

1.3. Una difícil elección

Antes de pasar al motivo de mi discurso he de empezar señalando lo arduo que ha sido para mí cumplir con esta tarea por múltiples motivos. El primero de ellos nace de mi poca habilidad para expresar mis ideas

[1] *Homenaje al Excmo. Sr. D. José María Torroja Menéndez*, 1996, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

con la amenidad y arte que requieren una ocasión y una audiencia como ésta.

Recientemente, por azar, leí un texto de Pedro Salinas en su obra *El defensor* (Salinas [167]) que ilumina mis recelos en el cuidado de nuestro idioma:

> El hombre que no conoce su lengua vive pobremente, vive a medias, aún menos ¿No nos causa pena, a veces, oír hablar a alguien que pugna, en vano, por dar con las palabras, que al querer explicarse, es decir, expresarse, vivirse, ante nosotros, avanza a trompicones, dándose golpazos, de impropiedad en impropiedad, y sólo entrega al final una deforme semejanza de lo que hubiese querido decirnos?... Hay muchos, muchísimos, inválidos del habla, hay muchos cojos, mancos, tullidos de la expresión. Podrán aquí salirme al camino los defensores de lo inefable, con su cuento de que lo más hermoso del alma se expresa sin palabras. Puede existir lo más hermoso de un alma sin palabra, acaso. Pero no llegará a tomar forma humana completa, es decir, convivida, consentida, comprendida por los demás.

Me reconozco en ese batallón de cojos y tullidos de la expresión. No se me oculta que estos resquemores con la lengua son comunes a muchos científicos pues, si bien el cultivo de la ciencia[2] no está reñido con el de la expresión oral y escrita, y de hecho hay notables y conocidas excepciones de personas que han mostrado una sobresaliente capacidad en ambos campos como fue el caso de Julio Rey Pastor[3], sin embargo, no es raro que la ciencia nos haga un poco ciegos de poesía, miopes al menos, tullidos de la expresión en palabras de Salinas[4].

En fin, no puedo más que pediros un poco de tolerancia que a modo de bastón me permita comenzar a andar. ¡Qué lástima no poseer una voz

[2] La utilización del singular o el plural y el uso de mayúscula o minúscula para las iniciales de conceptos como el de ciencia o matemáticas son cuestiones de una profunda epistemología. Utilizaré las minúsculas cuando se entiendan como nombres genéricos. No he encontrado una respuesta diafana a la primera cuestión por lo que haré uso de ambas posibilidades según el contexto.

[3] Véase su discuso de recepción como miembro de la Real Academia de la Lengua Española en 1954, *Algebra del lenguaje* (reproducido en Rey Pastor [160]).

[4] La manera como “contamos” los científicos nuestra ciencia fue el objeto del discurso inagural de J.J. Etayo [55].

privilegiada para haber reemplazado este discurso por un bello canto! ¡Qué lástima no ser pintor para haberlo sustituido por un cuadro![5]

Quizás una de las mayores dificultades para llevar a cabo una tarea de esta naturaleza radique en la elección del tema del discurso. Parece natural que un primer elemento en tal decisión pueda venir del análisis de las características de la audiencia, del lugar y de los medios con los que se llevan a cabo estos discursos. Es una frustrante realidad que el lenguaje especializado de nuestra ciencia hace difícilmente inteligible la descripción de "nuestros cuadros", de nuestras inquietudes científicas, incluso ante una representación distinguida de las distintas especialidades como es la que representáis vosotros, miembros de esta Academia. Qué decir tiene que más dificil aún lo es ante otras personas presentes: familiares y amigos, a quienes agradezco de corazón que hoy compartan este acto conmigo.

Parecería pues conveniente prescindir de la alusión al campo concreto de la actividad científica del orador para abordar, en cambio, algunos temas de interés para un mayor número de personas. Y he de decir que así lo tuve en cuenta al comienzo de la gestación de esta tarea. Mi pretensión inicial fue aportar un pequeño mosaico de reflexiones sobre el mundo de la ciencia, su sociología y en particular sobre aspectos relacionados con la transmisión, divulgación y comunicación de los científicos con su entorno humano.

Hasta aquí no parece muy descabellado mi intento. Más dudosa es mi habilidad para salir airoso de esa faena. Hasta ahora yo era un matemático *normal* [6] sin arriesgarme a empresas heterodoxas en mi contexto como la que acabo de describir. Mi "campo de acción" era el de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales y sus aplicaciones y sólo en muy contadas ocasiones me había atrevido a pequeñas incursiones en otros terrenos, por lo que me sentía seguro de saber por donde me andaba. En ese ambiente, aventuras tan inciertas como la que ahora emprendo son poco menos que tenidas como una insensata prodigalidad de un tiempo precioso y en el peor de los casos un coqueteo superficial y deshonroso con materias especulativas como la sociología, la filosofía y la psicología. He de reconocer que he quedado fascinado por lo que he encontrado en mi excursión. Me ha sorprendido descubrir las incursio-

[5] ¡Que afortunados fueron Teresa Berganza y Antonio López!

[6] La noción de *ciencia normal* fue acuñada primeramente por Kuhn en [100] (véase la sección 2.4); aquí, sin embargo, la calificación de normal se refiere a un sentido más convencional como en Davis y Hersh [37].

nes anteriores de tantos matemáticos *normales.* De hecho la estatura de muchos de ellos me llevaba a preguntarme qué diablos hacía yo en esas tareas en las que no se prueba ningún teorema sino que sólo se escribe sobre la matemática o la ciencia en general. Me estimula pensar que una y otra cosa sean, quizás, empresas compatibles.

Durante el tiempo de preparación de este discurso no dudé en mi decisión de abordar este tipo de temas generales; sin embargo, a medida que consultaba los discursos de Académicos anteriores, la mayoría de ellos dedicados a campos especializados de la ciencia, iba quedando más claro para mí su gran valor testimonial, no sólo como reflejo de las actividades del Académico en cuestión, sino sobre la disciplina científica que, en cierta forma, es objeto de reconocimiento con la elección de un nuevo Académico.

Quedaría pues en deuda con el pequeño trozo de la ciencia que vengo cultivando si no completara esta obra con tres pinceladas, necesariamente esquemáticas, que describieran esa parcela. Personalmente, siempre me he sentido más motivado por cultivar la matemática cuando ésta pretende abordar, desde su óptica, los problemas y retos del mundo que vive fuera de las propias matemáticas: la matemática en clara conexión con el mundo de la naturaleza y de las actividades humanas. Es lo que, siguiendo a Germain [71], podríamos llamar *matemáticas del mundo* y que en el ambiente académico viene siendo conocido como *matemática aplicada*.

1.4. Reconocimiento a mi entorno

Una deuda dificil de saldar es la que debo a mi entorno, a mi familia, a mis amigos y colaboradores. Siempre encontré un mensaje profundo en una canción de John Lennon y Paul McCartney que desde 1967 mi generación no ha parado de oir una y otra vez: *With a little help from my friends.* La voz de Ringo Starr nos susurra los valores de la amistad que nos impulsa a luchar por nuestras metas. La carrera de un científico no es fruto aislado de un solo motor y desde luego yo declaro aquí que he “volado y vuelo” con muchos motores. Desgraciadamente me es imposible mencionar a cada una de las personas que han compartido o comparten conmigo la aventura científica, pero no quiero dejar de manifestar, aquí, mi reconocimiento y gratitud hacia todos ellos.

Lo que debo a mis padres, Rafaela y Antonio, es mucho más que la formación de lo que más valor tenga de mi personalidad. Siempre me he considerado un privilegiado por ser el hermano menor de Antonio, Rafael, Rosa María y Gregorio. ¡Que suerte recibir de ellos los libros bien subrayados! Bueno, a mi hermano Gregorio, Goyo entre sus muchos amigos, le debo algo más: su disponibilidad para las labores científicas. Mi esposa, Cuayi, y mis hijos, Vicente y Amanda, son lo más valioso de mi vida. Ellos son sufridores permanentes de la particular profesión de matemático. Sin ellos no habría tenido el aliento y el estímulo que tanto me han impulsado.

Capítulo 2

La comunicación en el mundo de la ciencia

Como he señalado, la comunicación de la ciencia, las relaciones entre los cultivadores de sus distintas disciplinas y el resto de la gente que vive en su misma época y que comparten por este motivo los mismos problemas humanos y los mismos dilemas que parecen tener una influencia determinante en el futuro han sido temas que siempre han atraído mi atención y acompañado mi actividad científica de una manera soterrada, como si fuese música de fondo. Me preocupa la dificultad que encuentro para compartir con otros los temas que atraen mi atención y curiosidad.

En la vida de un matemático, y con toda seguridad de otros científicos, el problema de la comunicación de conocimientos se presenta bajo diferentes aspectos que corresponden a *círculos* de personas con diferentes niveles de conocimientos científicos: un primer círculo, el más inmediato, es el formado por los colegas que comparten la misma especialización. Algo más alejado, pero aún bastante próximo, se encuentra el de los especialistas de otras disciplinas. Un tercer círculo se refiere a aquellas personas con las que nos relacionamos en el contexto de la enseñanza. Finalmente, aparece el "gran público" al que va dirigida la divulgación. Esos diferentes ambientes dan lugar a distintas *interfases* entre los sujetos de la ciencia. Permitidme que analice algunos aspectos de la transmisión de la ciencia entre esos distintos ambientes y que para ello invierta el orden con el que los he aludido anteriormente.

2.1. El gran público: Divulgación

2.1.1. Matemáticas, ciencia y tecnología

Comenzaré refiriéndome a la divulgación de las matemáticas. Es esta una tarea nada sencilla, por no decir muy difícil. Los artificios técnicos de esta ciencia, su formalismo y simbolismo, sus tecnicismos a veces desconcertantes enmascaran su naturaleza. Incluso personas con estudios superiores están convencidos de que no son capaces de entender casi ningún razonamiento matemático. Ya desde la Antigüedad los avances científicos eran ininteligibles para un auditorio de cultura general. Los esfuerzos por difundir el espíritu matemático a través de ingeniosos juegos matemáticos con carácter lúdico tienen mucho valor pero pueden dar una idea equivocada de un mundo mucho más complejo y rico. Pero, ¿de dónde proviene tal complejidad?

Siguiendo a Ian Stewart [179] podemos recurrir a la descripción de otro arte difícil, el de la música, para ilustrar la matemática. Pensad por un momento cómo reaccionaría un músico si oyese una descripción lacónica de la música como una distribución casi desordenada de innumerables notas y silencios en un pentagrama. ¿Quién puede negar que tal enjambre de símbolos es capaz de transmitir sentimientos, tragedias y hasta de describir paisajes o evocar el ruido relajante de los pájaros? Aunque por todos es conocido que la matemática y la música poseen muchos puntos en común no es menos cierto que hay una diferencia innegable entre ellas: el músico es capaz de traducir ese rosario de notas en un producto asequible de asimilar hasta para el auditor más profano. Desgraciadamente, esto no es tan fácilmente materializable en matemáticas.

Se puede disfrutar de la música como oyente, como intérprete y como compositor. En matemáticas el nivel máximo de apasionamiento se da en la creación y, desgraciadamente en menor grado, desde la posición del intérprete o profesor. Aún más triste es reconocer que la condición de oyente en matemáticas no está al alcance de cualquiera. Pero la creación en matemáticas no se limita a la investigación. El placer de encontrar respuesta a una cuestión, a una curiosidad, es algo fácilmente apreciable por uno mismo, independientemente de la relevancia que tenga tal hallazgo.

Las matemáticas no son sólo símbolos y cálculos. Esto no es más que lo equivalente de las notas y el pentagrama. Las matemáticas son ideas: es decir, el estudio de esas ideas, de sus relaciones, y extensiones. La buena matemática no se contenta sólo con proporcionar soluciones a numerosos problemas: trata de comprender por qué se dan tales soluciones, por qué adoptan formas concretas, y todo ello valorando la economía del pensamiento. Es esto lo que la hace profunda y bella a la vez. Más adelante me referiré a la naturaleza de la matemática y su compleja estructura, que la hace mostrarse unas veces pura y otras aplicada.

Pero, en realidad, muchas de las razones que hacen difícil la divulgación de la matemática aparecen también, aunque en diferente medida en otras ciencias. Se requiere una mínima curiosidad en el receptor, y en el caso de las matemáticas esta curiosidad ha de ser aún mayor. Uno podría intentar buscar una buena definición de lo que es la ciencia. La heterogeneidad de lo que se persigue es una labor aún más ardua que en el caso de la matemática. Renuncio a acudir a profundas definiciones nacidas de la filosofía. La solución más inmediata, acudir a los diccionarios, tampoco es de gran utilidad (la respuesta encontrada en el *Vocabulario Científico y Técnico* de esta Real Academia[1] y la que ofrece el de la Real Academia de la Lengua[2] no son enteramente coincidentes). Al igual que Wagensberg [188] podemos convenir que la ciencia es el conocimiento elaborado con el método científico. Ahora sólo queda dar sentido a este último término. Un método cualquiera es científico si respeta tres grandes principios generales: los de *objetividad, inteligibilidad y el dialéctico.* Podemos catalogar de objetivo un método si ante varias formas de observar un objeto o un fenómeno elige la opción que afecte menos a los detalles de la observación. El método es inteligible si sus objetos temáticos son considerados de manera más compacta que su mera representación. Finalmente, es dialéctico si el conocimiento se arriesga a ser derribado por la experiencia[3]. Según estos principios tan generales, los métodos usados por los psicólogos o los sociólogos, por ejemplo, no son menos científicos que lo son los métodos de los matemáticos y lo físicos. La aplicación de los métodos científicos requiere en todo caso la creatividad y la originalidad de la persona, lo que hace de la ciencia una faceta dignificante y sustancial del ser humano.

---

[1] *Vocabulario Científico y Técnico,* 1996. Tercera edición, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Espasa Calpe, Madrid.

[2] *Diccionario de la Lengua Española,* 1992. Vigésima Primera Edición, Espasa Calpe, Madrid.

[3] Véase Popper [149].

La tecnología es quizás uno de los eslabones fundamentales de la ciencia con la sociedad. *El Vocabulario Científico y Técnico,* antes citado, da de la palabra tecnología el siguiente significado:

> Utilización sistemática del conjunto de conocimientos científicos y empíricos para alcanzar un resultado práctico: un producto, un proceso de fabricación, una técnica, un servicio, una metodología.

Según señala Sánchez Ron [169]:

> La historia muestra que la relación entre ciencia y tecnología es compleja, variable a lo largo del tiempo y en ambos sentidos. Está muy extendida la opinión de que la tecnología no es sino ciencia aplicada, pero, sin ir más lejos, la máquina de vapor fue anterior a la ciencia que formalizó los principios en los que se basaba: la termodinámica. El ejemplo del desarrollo del electromagnetismo durante el siglo XIX ilustra magníficamente esta faceta de las relaciones entre ciencia y tecnología.

Vivimos en una época en la que la ciencia, la tecnología y, en especial, el ordenador han impregnado de un inconfundible estilo a nuestra cultura y a nuestras relaciones humanas. Se hace poco menos que necesario mantener una reflexión profunda y colectiva sobre el impacto del desarrollo científico y tecnológico en la sociedad, los riesgos y oportunidades que se presentan en esta nueva etapa de la cultura humana, la percepción social de los avances conseguidos, etcétera. En esa reflexión, la propia comunidad científica tiene mucho que decir al resto de la sociedad.

2.1.2. Necesidad de la divulgación

La ciencia ha de progresar en libertad, sin restricciones dictadas por la sociedad de la época, ni por el acoso de las aplicaciones inmediatas[4]. Sin embargo, es claro que la sociedad necesita elementos de juicio para

[4]Con frecuencia, las ideas nacen en un tiempo muy distinto al que se aplican. Un conocido ejemplo es el de la teoría de las cónicas, estudiadas por Apolonio en el siglo III antes de Cristo y usadas con éxito por Kepler al comienzo del siglo XVII para expresar las leyes del movimiento de los planetas.

asimilar los avances y aplicaciones de la ciencia de su tiempo. La opinión pública tiene una decisiva influencia en la "ética" del desarrollo de la ciencia, en la benigna o nociva materialización de las aplicaciones de los descubrimientos científicos y de las innovaciones tecnológicas. De hecho, el mayor o menor desarrollo de unas especialidades científicas frente a otras está, en última instancia, en manos de la opinión pública. El desarrollo de una sociedad depende del balance armonioso e integrador entre las múltiples formas del pensamiento humano: la ciencia, el arte, la literatura. En una palabra, de su cultura.

No cabe esperar que sea a través, únicamente, de un mayor aprendizaje de los saberes científicos como se avanzará hacia una mayor formación y cultura de toda la población. El desconocimiento de la mayoría de ella en el dominio científico y técnico puede ser considerado hasta "necesario" en el momento actual. La ciencia es interesante e importante pero el arte, la literatura y muchas otras cosas lo son igualmente. La cuestión es, pues, cómo operar con el desconocimiento científico[5].

A la hora de diseñar un proyecto divulgador habría que partir de que buena parte del conocimiento científico es poco menos que inaccesible: la mayoría de los ciudadanos poseerá enormes lagunas en ciencia, como nos ocurre también a los científicos cuando se nos saca de nuestro campo de competencia. La especialización del saber, lejos de ser un síntoma externo, desafortunado y pasajero, de una crisis originada por el avance científico es, por el contrario, una condición íntima que permanecerá a lo largo del tiempo. Según comentaba K. O. Friedrichs a J. L. Lions, a comienzos de los sesenta:

> Un científico debe saber en cada momento lo que hay que conocer y lo que conviene ignorar ([113]).

Recientemente, el bioquímico Erwin Chargaff, de la Universidad de Columbia (Nueva York), reclamaba *el derecho a no saber* ante el acoso comunicativo a que estamos sometidos. Pero la ignorancia científica más imperdonable no es la de la población normal sino la que muestran, incluso alardeándose de ello, algunas personas con responsabilidades

[5]En [69], Alberto Galindo saca a colación lo que él llama el *principio de conservación de la ignorancia* de Harrison: cuanto más se avanza en el conocimiento de una materia más consciente se es de la ignorancia. La ignorancia docta (consciente) sustituye a la ignorancia indocta (inconsciente) y, en consecuencia, la ignorancia total se mantiene.

públicas o con un gran poder de mimetismo en la sociedad. Desgraciadamente, esta actitud contagia malignamente a un buen número de ciudadanos.

Frente a estas limitaciones de partida, habría que lograr que el mayor número posible de hombres y mujeres accediesen no sólo al placer del conocimiento, sino también al del descubrimiento científico, por muy modesto que éste fuera, e independientemente de que otros hubieran pasado ya por allí. Es algo tangible, algo que casi se puede saborear con los labios. Como decía Albert Einstein:

> La restricción del conocimiento adormece el espíritu filosófico de un pueblo y conduce a su pobreza espiritual, lo que hace que la comunidad sea fácilmente manipulable.

El objetivo debe ser incentivar el espíritu crítico y la capacidad de discernimiento en el seno de la sociedad. La actividad científica va ligada a la idea de progreso y su divulgación tiene una función social en la generación de valores. La atención pública que generan los debates sobre bioética, las aventuras de las exploraciones espaciales, los retos entre el hombre y la máquina (con el ajedrez como excusa) son difícilmente superables.

La sociedad actual requiere un cuidadoso y permanente análisis de los conocimientos científicos mínimos en cada nivel educativo. Un pretendido bombardeo de ciencia sería innecesario y, de hecho, claramente imposible. La matemática y otras ciencias están siendo utilizadas como filtro de discriminación y esto lleva a la sociedad a confundir cuáles son sus verdaderos fines. Se trataría de convencer a la mayoría de que las matemáticas, las ciencias, no son un juego obligatorio y perverso por el que hay que pasar para obtener cualquier titulación, por muy modesta que sea. El orden seguido usualmente en la enseñanza a todos los niveles del proceso deductivo debería ser sometido a permanente revisión, dando mayor énfasis a la intuición y experimentación previa motivadora que a la presentación de unos resultados mágicos y, la mayoría de las veces, ajenos.

Hace unos meses que se han hecho públicos los resultados de un ambicioso estudio estadístico sobre los conocimientos matemáticos de los jóvenes de diversos países. Me refiero al informe TIMSS[6] que ha quebrado numerosas creencias estereotipadas, tales como que los jóvenes

[6] Vease, por ejemplo, The Economist, 29 de marzo, 1997, pp. 21-25.

más adiestrados en matemáticas son los de los dos países económicamente poderosos como Estados Unidos o Alemania. El informe, realizado mediante un test común a numerosos chicos de 13 años de 41 países, deja claro que el buen termómetro no es el estado de la investigación superespecializada, sino otros baremos entre los que se cuenta la valoración que la sociedad de cada país hace de la ciencia y de los científicos.

2.1.3. *La polémica de la ciencia española*

La valoración social de la ciencia española ha sido motivo de encendidos debates a lo largo de los últimos dos siglos dando lugar a todo un capítulo de la Historia de España conocido como *la polémica de la ciencia española*. Curiosamente, la polémica se desató con el articulo "Espagne" del francés Nicolás Masson de Morvilliers [120] aparecido en la sección de "Geographie Moderne" de su *Encyclopédie Méthodique* publicada en 1782. La Revolución Francesa no estaba lejana y España era tema propicio para criticar las instituciones feudales y los valores que entonces se pretendía sustituir.

En el fondo, la cuestión no era realmente la cultura científica de esa España sino la utilidad de las ciencias físico-naturales para promover el bienestar y el desarrollo del país frente a una concepción tradicional que se limitaba a las ciencias teológicas y militares a las que debíamos nuestra grandeza.

Curiosamente, la contestación se produjo inicialmente fuera de nuestras fronteras por parte de José Cavanilles [27], botánico español residente en París y por Carlo Denina [40], funcionario de la corte de Federico II de Prusia. El Marqués de Floridablanca confió a Juan Pablo Forner la tarea de defender la monarquía y la ciencia española y éste adoptó una postura apologética de la situación presente viendo en el cultivo de las ciencias naturales un germen de incredulidad y de desórdenes sociales. Por su parte, L. Cañuelo, editor del semanario *El Censor*, tomó el asunto como principal argumento de sus discursos semanales contra las instituciones feudales españolas. Al debate se sumaron conocidos literatos de la época como Iriarte, Samaniego y otros.

La polémica quedó en suspenso a fines del siglo XVIII por el endurecimiento de la política de Carlos IV y los problemas de los renovadores, entre ellos Cañuelo, con la Inquisición. Es también indicativo que, pese a este debate (o quizás motivado por él), se produjo en el último tercio del siglo XVIII un impulso en las ciencias que no tendría parangón hasta comienzos de nuestro siglo. A este período sigue el que Jose María López Piñero [116] cataloga como *período de catástrofe de la historia contemporánea de la ciencia española*: a la desorganización de la vida y de las instituciones científicas, consecuencia de la Guerra de la Independencia, siguió una inmovilización y separación de Europa, durante el reinado de Fernando VII.

Con la creación de la Real Academia de Ciencias, en 1851, y también de las Facultades de Ciencias, Escuelas de Ingenieros y otras instituciones, se logró un impulso científico que revivió la polémica. En su discurso de ingreso, el mismo año 1851, Zarco del Valle [193] hizo un llamamiento a retomar las tareas científicas. Con el discurso de ingreso en la Real Academia del polifacético y laureado José de Echegaray [51], titulado *Historia de las matemáticas puras en nuestra España*, en 1866, la polémica se desata nuevamente. El discurso fue tachado de maldito contra la patria y su historia en la prensa de la época, siendo de resaltar la réplica de Felipe Picatoste [145].

La polémica se reabrió veinte años después con la Primera República en 1873 y la Restauración Monárquica de Alfonso XII, esta vez en el círculo de las revistas literarias, mediante réplicas entre Manuel de la Revilla y Marcelino Menéndez Pelayo y otros. Reseñemos, en particular, el articulo "La ciencia española bajo la inquisición" de José del Perojo [143]. La modestia de la contribución española a la ciencia se hizo evidente pese a los esfuerzos del erudito Marcelino Menéndez Pelayo (1856-1912) por mostrar lo contrario: en su célebre obra *La ciencia española* [122] la matemática no tenía derecho más que a una lista bastante incompleta de libros. El riesgo de valorar lo mediocre era inevitable.

Se hacía necesario un estudio más profundo de la historia científica del país, y así el discurso de ingreso en esta Real Academia de Fernandez Vallín [61], en 1893, llevaba como título *Cultura científica de España del siglo XVI.* Replicando a este discurso Menéndez Pelayo escribiría:

> En este país de idealistas, de místicos, de caballeros andantes, lo que ha florecido siempre con más pujanza no es la ciencia pura (de las exactas y naturales hablo), sino sus aplicaciones prácticas y en cierto modo utilitarias [123].

La necesidad de una política científica hacia el futuro tiene su espoleta en una conferencia de Jose Carracido en el Ateneo de Madrid, en 1896 ([26]). Sin embargo, es en el Discurso de ingreso en la Real Academia de Ramón y Cajal [155], el 5 de Diciembre de 1897, hace ahora 100 años, donde se presenta de manera clara una propuesta de remedios tras analizar nuestro atraso científico y sus causas. Su sobresaliente genialidad obtuvo apoyo oficial creándose la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, en 1907, lo que significó una regeneración científica sin igual hasta entonces. Nacía una generación gloriosa que incluía, además de nuestro primer Nobel, científicos de la talla de Leonardo Torres Quevedo y tantos otros, y que sería tan analizada después por Ortega y Gasset, Laín Entralgo y otros distinguidos pensadores[7].

No por ello *la polémica* amainaba. José Comas Solá escribía en *La Vanguardia* de Barcelona en 1903 [29]:

> Respiramos sólo aires africanos, nos adormece la indolencia musulmana.

Pero, sobre todo, sería la desafortunada frase de Miguel de Unamuno, ¡*Que inventen ellos!*, la que desencadenaría una cascada de contestaciones desde el mundo científico, como la de nuestro insigne Julio Rey Pastor, o la de literatos como Pio Baroja, desde una postura apartada del "patriotismo de derechas". Más tarde, Américo Castro aportaría un tercer punto de vista en el que se entronca la polémica con las peculiaridades de la constitución de España en la Edad Media y su subsiguiente conflictivo periodo.

Desde el impulso regenerador de Cajal hasta nuestros días, el panorama científico ha ido en evidente progreso aunque no de manera uniforme en el tiempo. En matemáticas, la figura de Julio Rey Pastor[8] (1888-1962), quizás el más distinguido matemático de la historia pasada española, inunda la escena más allá incluso de la primera mitad del siglo y deja una profunda huella que cambió el rumbo de las cosas estableciendo una escuela de prestigiosos alumnos, algunos de los cuales integrais esta Real Academia.

Hoy en día es un hecho reconocido internacionalmente que disponemos de un prestigioso plantel de investigadores, integrados en el ámbito

[7] Véase , por ejemplo, Laín [101] y [102].

[8] Por cierto Rey Pastor también aportó su visión particular de *la polémica* en varias ocasiones (vease por ejemplo [156], [158]).

de los países más activos de la ciencia. El sector de la investigación pública ha aumentado de forma sustancial sus recursos económicos y humanos y los veinte años de democracia constitucional, recientemente celebrados, han aportado la serenidad social necesaria para el desarrollo científico. Aunque *la polémica* está ya superada, no conviene olvidar que mientras nuestro país debatía la conveniencia de hacer ciencia, otros países ya la hacían[9]. Una consulta a la cronología simultánea de la superación de *la polémica* y de los avances científicos producidos en nuestros países vecinos es altamente recomendable (aunque también muy deprimente) como cura de humildad. Algunas instituciones empresariales ven claras conexiones entre ese azaroso pasado y el atraso económico relativo[10]: somos uno de los últimos paises de la Unión Europea en nivel de desarrollo económico pese a la reciente euforia que a veces se infunde desde algunos medios de comunicación.

El pasado mes de agosto de 1996, un grupo de científicos españoles sacaron a la luz el llamado *Manifiesto de El Escorial*[11], en el que se proponía que la ciencia fuese una cuestión de Estado, con obvia repercusión en la salud de la innovación tecnológica, necesaria en esta época de competitividad empresarial de la Europa Unida en la que ahora vivimos. Allí se afirmaba que “mientras en España no se establezca una relación más fluida entre la ciencia y sus aplicaciones, las empresas españolas estarán en desventaja frente a sus competidores extranjeros”. Se instaba a que las empresas absorban investigadores, a crear sus propios laboratorios y a establecer acuerdos con centros públicos de investigación, instando también a estos últimos a una mayor sensibilidad sobre la problemática de innovación empresarial.

El Manifiesto ha sido una valiosa aportación para la reflexión colectiva de políticos, empresarios, investigadores, prensa y, en general, del conjunto de la sociedad española. La mejoría del nivel científico observada en el país no ha tenido igual repercusión en la competitividad de las empresas. El desequilibrio entre nuestros adelantos en ciencia y en nuestra capacidad para aplicarla no es algo específico de nuestro país,

[9]La *polémica de la ciencia* es aún objeto de consideración como lo muestra la “Mesa Redonda”, presidida por el historiador M. Artola en la Facultad de Filosofía de la UCM el 20 de Mayo de 1997 como parte de los actos celebrados en homenaje a Lain Entralgo por su 90 aniversario.

[10]Vease el *Documento para el Debate sobre el Sistema Español de Innovación*, Fundación COTEC para la Innovación Tecnológica, Madrid, 1997.

[11]El PAÍS, 17 de Agosto, 1996.

pero no parece que lo mejor sea esperar a ver qué hacen otros afectados. Sería conveniente convencer al empresario español de la necesidad de invertir en innovación como hoy lo hace en *marketing* o en mejorar su logística[12]. Sánchez Ron [169] se pronuncia al respecto en los siguientes términos:

> El problema es relevante porque la diferenciación entre ciencia básica y tecnología no es siempre clara, y el desarrollo científico depende crucialmente de la capacidad tecnológica y, por tanto, de la base industrial de los países. Es dificil alcanzar y mantener una buena capacidad científica sin un sistema dedicado a buscar aplicaciones a la misma y, por tanto, sin un sistema industrial que sea demandantemente activo de nuestro potencial científico.

2.1.4. ¿Dos culturas?

Si bien el panorama científico español es ya más concorde con el papel que desempeña nuestro país en la esfera europea e internacional, es un hecho constatable que la valoración social de lo científico dista aún mucho de lo que se puede apreciar en otros países de nuestro entorno. Aunque sea sólo uno más de los muchos detalles anecdóticos que fundamentan la anterior observación, opuestamente a lo que sucede en Francia, podríamos comparar las poquísimas y modestas convocatorias de premios científicos en nuestro país con la multitud de premios literarios.

Esta apreciación entronca con lo que el inglés C.P. Snow llamó *el Problema de las dos culturas* [175]. Científico por formación y escritor por vocación, como decía él, Snow supo plantear en su libro por primera vez el tema de la escisión entre la comunidad de los científicos y el mundo de los intelectuales de corte tradicional, convirtiendo el tema en un centro de apasionadas polémicas[13]. Según él, existía un abismo de incomprensión mutua, algunas veces de hostilidad y desagrado. Los

[12] Al *Manifiesto de El Escorial* le han seguido un buen número de acciones paralelas. En particular merece una especial mención el documento de la Fundación COTEC antes citado.

[13] En la segunda edición de su libro Snow señala que después de haber publicado la primera edición conoció que antes que él otros *aprendices de brujo* como Jacob Bronowski en 1955 y Merle Kling en 1957 anticipaban con bastante aproximación esta separación de mundos.

no científicos tienden a pensar que los científicos son gente desmedida, jactanciosa, optimista por pura superficialidad, por ignorancia de la condición del hombre. Por otra parte, los científicos creen que los intelectuales literarios carecen de visión anticipadora, y que cualquiera con un poco de ingenio podría dar curso a un aluvión de estos dimes y diretes subterráneos. Su libro (texto de una conferencia impartida en 1959) originó una encendida polémica alimentada por la réplica del profesor de literatura de la Universidad de Cambridge F.R. Leavis, quien negaba a la ciencia el estatus de cultura[14] [15].

Tanto por un lado como por el otro, esas opiniones no están desprovistas de algún fundamento, pero obedecen a simplificaciones no siempre válidas y son tergiversaciones de una realidad más compleja y rica en matices. Existen numerosas interrelaciones entre esas dos culturas: el arte, la filosofía, la comunicación, etc, y en particular la matemática es uno de los mayores puentes entre esas dos concepciones[16]. De hecho, la clasificación de la matemática como ciencia exclusiva ha sido objeto de debate por prestigiosos pensadores que reclaman para ella un lugar cercano a la filosofía[17]. En la historia del pensamiento humano ha habido una constante interacción entre filosofía y matemáticas[18]. La historia de las matemáticas y, más en general, de la ciencia están repletas de casos en los que la creatividad de los científicos no se restringía a su disciplina ([39]). Más recientemente, la psicología, la sociología, la lingüística y muchas otras parcelas de esa otra cultura, según Snow, se han acercado de manera fructífera a la matemática[19]. Es claro que esa matematización de la sociedad tiene sus ventajas y sus riesgos (ver [38], [139]) pero deja claro que en la actualidad no se puede hablar de una separación en dos culturas disjuntas sino más bien de una única cultura. Un polifacético científico y pensador, Alfred North Whithehead llegó a

[14] Posiciones pesimistas sobre la interrelacion ciencia/sociedad no cesarán nunca de producirse (véase una muestra reciente en [150]).

[15] En nuestro país varios autores han abordado la *polémica de las dos culturas*, (véase, por ejemplo, Fernandez-Rañada [60] y Lamo de Espinosa [104], quien adivina en la terminología *el huerto y la nave*, de Fray Luis de León, esa misma dicotomía).

[16] A lo largo de la historia son numerosos los escritos sobre religión llevados a cabo por científicos de todas las disciplinas (véanse las exposiciones de Dou [49], Fernandez-Rañada [59] y sus referencias).

[17] Hay, incluso, quien reclama para las matemáticas un lugar entre las artes ([20]).

[18] Este es uno de los temas centrales desarrollados por Miguel de Guzmán en [79].

[19] La matemática se ha adentrado en la historia bajo el nombre de *Cliometría* y no faltan incursiones de argumentos matemáticos en la teoría y práctica del derecho (vease [13], [58], [165] y sus referencias).

escribir ([190]):

> No llegaré tan lejos como para decir que una historia del pensamiento sin un profundo estudio de las ideas matemáticas de las distintas épocas sería como omitir el personaje de Hamlet en la obra que lleva su nombre. Sería demasiado. Pero, sin duda sería como suprimir el personaje de Ofelia,..., encantadora y algo loca. Admitamos que la investigación matemática es una divina locura del espíritu humano, un refugio contra la urgencia de los hechos contingentes.

Pero además, la batalla de las dos culturas (si es que en algun momento existió) ha sido ganada por la tecnología. Snow sugiere que a la revolución industrial le siguió una revolución científica más sutil que proviene de la aplicación de la ciencia a la industria no ya como ocurrencia de pintorescos inventores sino como recurso sistemático, sugiriendo sus comienzos en los años del siglo en los que por vez primera se hizo un uso industrial de las partículas atómicas. Más recientemente, somos testigos de la revolución informática que Snow no tuvo ocasión de conocer. Hoy es más que nunca la época de la ciencia. Se calcula que un noventa por ciento de todos los científicos habidos y presentes están activos en la actualidad. Estas revoluciones científicas alejan aún más a las minoritarias posiciones radicales achacadas a ciertos intelectuales literarios de los problemas que la humanidad tiene planteados. De hecho, cada vez es más frecuente observar a expertos en humanidades aprovechando como usuarios todo el potencial que la tecnología informática les ofrece.

Inseparablemente de su intrínseco carácter cultural, la ciencia pretende mejorar la calidad de vida y ésta es una finalidad que la hace plenamente humana. Para la mayoría de los seres humanos la expansión de la revolución científica representa una esperanza de mejora de la calidad de vida y en algunos casos de supervivencia[20]. El reto que se nos plantea es lograr que no sea sólo una minoría quien tenga el privilegio de disfrutarla[21].

[20] La simbiosis inseparable entre los valores felicidad, ciencia y cultura fue el objeto de una interesante y densa conferencia por Martín Municio [129].

[21] En Brockman [24] se propone una *tercera cultura* surgida de aquellos científicos que mediante libros de divulgación, más o menos elevada, se comunican directamente con el gran público exponiendo sus puntos de vista sobre los temas más fronterizos de sus investigaciones.

2.1.5. El científico divulgador

Volviendo a la cuestión de la divulgación, quisiera ocuparme por un momento del científico experto como un primer agente divulgador. Para el científico experto la divulgación suele ser una tarea ardua porque, en general, es un mal comunicador. Cuando explica algún tema al gran público procura quedarse en la descripción de los detalles, terreno donde se encuentra cómodo y en el que puede evitar interpretaciones abusivas. El problema es que de esta manera es muy difícil captar la imaginación del público[22]. Se precisaría que una buena parte de los científicos se formaran como comunicadores para conseguir que los conceptos e ideas con los que trabaja la ciencia pasaran a integrarse en los flujos de discusión cultural. Esta tarea no es sencilla. Calvo Hernando [25] afirma:

> El estudio de la expresión de los contenidos científicos para el público constituye un conjunto fascinante de disciplinas en el que confluyen la lingüística, junto con la semiótica, la filosofía y la lógica, la sociolingüística y la psicolingüística y, más allá del universo de la lengua, la ética, la teoría de la información, la comunicación no verbal, la sociología, la antropología, y, por último, las tecnologías de la comunicación.

Por otra parte, la comunicación pública, la divulgación, no goza de la opinión favorable de los propios científicos para quienes la misión de las instituciones a las que pertenecen consiste, exclusivamente, en la formación de estudiantes y la producción de nuevos conocimientos. Hasta ahora, esta posición era un reflejo del escaso interés del gran público y de los medios de comunicación de masas por la información científica y técnica. Ahora bien, las realidades del mundo contemporáneo han hecho cambiar la actitud de los mismos como lo prueban numerosos estudios sobre el tema. Hoy en día, el público, en general, demanda información científica y técnica y el mayor obstáculo para una mejor difusión de esta información se encuentra en el propio seno de las instituciones científicas.

[22]En el bello cuento de Azorín titulado *La ecuación (*[11]) se narra la historia de un comediógrafo que se vuelve loco por haber perdido la “ecuación” que le había llevado a la sintonía con el público y al éxito y que perdió desde que, por influencia de sus familiares, comenzó a emplear un léxico más culto.

Los investigadores consideran la divulgación como una pérdida de tiempo, una depreciación del verdadero saber, una actividad ajena a la vida científica; es decir, un desvío de energías y de fondos. Dentro de una comunidad científica, decir de un investigador que "se dedica a la divulgación" suena un poco a que "es realmente incapaz de hacer otra cosa, así que se dirige al gran público". Una de las razones de ese distanciamiento viene de que hoy en día, incluso el mejor especialista científico no conoce más que una parte de su propia especialidad y en mucho menor grado las relaciones con otras ramas de su disciplina. Este honesto reconocimiento no debería conducir a la duda en la transmisión de conocimientos que pueda enriquecer a otras personas y que de hecho enriquecería también al divulgador: explicar a otros la naturaleza de la ciencia, sus problemas y sus herramientas repercute finalmente en una más clara y profunda comprensión por parte del que divulga.

Divulgar se tolera y se respeta cuando lo lleva a cabo alguna celebridad científica coronada por una carrera repleta de títulos y de altos reconocimientos, lo cual no deja de ser una paradoja[23].

En contraste con esta situación, entre los responsables de entidades científicas es cada vez más obvio que la divulgación ante los no especialistas es también rentable para sus instituciones. De esa manera se mantienen buenas relaciones con las personas con capacidades de decisión en su entorno.

El científico tiene también mucho que ofrecer al gran público tras haber acumulado experiencia en un cierto campo de estudio pese a ser consciente de desconocer en el mismo grado incluso hasta otros aspectos de los mismos problemas que considera. Debería estar preparado para exponer honestamente sus propias certezas, dudas y problemas en esa dirección. De hecho hay numerosos antecedentes en la literatura científica que tienen mucho de divulgación de esa experiencia[24]. Limitándome únicamente al campo de las matemáticas hay que citar los famosos estudios sobre la psicología de la creación matemática debi-

[23]Quizás, por esta condición de veteranía el brillante matemático inglés G. H. Hardy catalogaba la divulgación y la reflexión sobre la filosofía de la ciencia como *experiencia melancólica* [84]. El libro contiene un largo prólogo de C.P. Snow.

[24]Algunas recientes incursiones de científicos en el campo de la divulgación han sido, de hecho, verdaderos *best sellers* como es el caso de los libros de Hawking [85] o Penrose [141]. Son varios los autores españoles que se podría citar a este respecto. Una lista medianamente exhaustiva sería a todas luces incompleta. Sólo quisiera resaltar aquí las númerosas traducciones a otros idiomas del libro de Guzmán [80] y la tercera edición , en menos de dos años, del de Pérez Mercader [142].

dos a Poincaré, Hadamard y Birkhoff[25]. Por otra parte, el hacer matemático no es neutral para el hacer filosófico y así, por ejemplo, la concepción platónica de la matemática ha sido objeto continuo de debate desde los griegos hasta nuestros días[26]. Otro tipo de divulgación a cargo de científicos, que no pretende entrar en las entrañas de su quehacer científico, se refiere al objetivo de difundir un campo de conocimientos entre un público con una mínima cultura científica. Ejemplos recientes cercanos para este autor son los libros de Ekeland [53], Lions [108] y Guzmán [81]. Los meritorios intentos de llegar al gran publico, presuponiendo una menor formación del potencial lector, tienen otra naturaleza. A este género pertenecen, entre otros, los libros de Davis y Hersh [37], [38], Stewart [179] y Guzmán [80]. Manteniéndome aún en el campo de las matemáticas, quisiera señalar que son pocos los intentos realizados por divulgar al gran público el fundamental papel que la matemática está desempeñando en los progresos de otras ciencias y de la tecnología. Ahora que el programa espacial americano ha vuelto a la actualidad con la exploración de Marte es una lástima que no se haga ninguna referencia a la contribución matemática en esa complicada empresa. Lo mismo sucede en temas tan dispares como el diseño de coches, aviones, trenes de alta velocidad, numerosos avances en la tecnología médica (corazón artificial, tomografías, resonancia magnética,...), técnicas audiovisuales[27], etc. La modelización y visualización por ordenador lleva a una realidad virtual que ha reemplazado a la simulación analógica de épocas pasadas.

No sería inútil recurrir a un enfoque estratégico con el fin de cambiar la orientación adversa de los expertos hacia la divulgación, mediante ayudas selectivas estimulantes, contactos fluidos con el mundo de la comunicación, etc.[28] Es claro que la divulgación efectuada por un experto no puede pretender, de manera directa, contribuir a la ciencia especializada puntera, pero, al ensanchar los horizontes, puede contribuir a que la ciencia sea más humana y más cercana para el resto de la sociedad.

[25] Véase Muir [128] para un tratamiento reciente del tema así como las referencias a los citados estudios.

[26] Véase, a este respecto, el análisis realizado por Javier de Lorenzo en [117].

[27] Para una descripción de las herramientas de Análisis Numérico empleadas en la elaboración de la primera pelicula comercial integramente generada por computador (*Toy Story*) véase [76].

[28] Afortunadamente en esa dirección van algunas iniciativas recientes emprendidas por diversas instituciones, entre las que se encuentra esta Real Academia.

2.1.6. Periodismo científico. Otros medios

La sociedad en que vivimos está sometida a una trepidante y continua modificación. Al transmitir esos cambios los medios de comunicación configuran la cultura general de la sociedad. La acuñada frase "información es poder" se hace evidente. De esta forma, el periodista posee una gran capacidad de manipulación de la realidad y a la vez es una fuente de formación continuada de la sociedad. Paradójicamente, en la época de la comunicación multimedia en la que nunca antes ha habido tanto volumen de información circulando por muy distintos canales nunca se ha dado una menor capacidad de discernimiento para el ciudadano medio. Uno de los problemas de nuestra época es la saturación de la información. Sin embargo, los medios de comunicación de masas (prensa, radio y televisión) uniformizan sus mensajes y contenidos. ¿Cómo y qué seleccionar? ¿Cómo sintetizar? ¿Cómo lograr unos criterios personales, una cultura, en armonía? Son preguntas que asaltan a numerosas personas y cuya respuesta se escapa del mundo de la educación, la investigación y hasta de la cultura humanista para depositarse en manos del periodista.

La ciencia es cultura y forma parte de la realidad social. Es el motor de del desarrollo tecnológico y económico de nuestra civilización. La percepción social de los avances científicos es fruto también de la calidad del periodismo científico y en alguna medida del buen entendimiento entre científicos y periodistas. No hace mucho he tenido ocasión de leer en la prensa dos artículos sobre los acontecimientos científicos más reseñables de este siglo que ahora se agota. Uno de ellos se debía a Carl Sagan, recientemente fallecido. Del otro he de confesar que no recuerdo el autor. De la larga lista propuesta por Sagan sólo unos pocos coincidían con la otra. Y es que también en la comunicación científica hay disparidad de opiniones y hasta mediatización. En un interesante articulo[29], Vladimir de Semir explica cómo los investigadores de la NASA provocaron una reacción mediática al publicar en el número de agosto de 1996 de la revista *Science* un artículo sobre la existencia de pruebas de vida extraterrestre. Las críticas desde posiciones especializadas no tardaron en aparecer acusándoles de pretender llamar la atención por basarse en indicios no concluyentes y así obtener más recursos para el programa espacial, haciéndolo coincidir con el estreno de la película de

[29] "Historia de la noticia 'más importante' de la historia", *Quark*, n^o 5, diciembre de 1996.

presupuesto multimillonario *Independence Day.* Un ejemplo, analizado por diversos autores, mostrando la diferente difusión de un país a otro de la noticia científica fue el accidente de la central nuclear de Chernobil. El episodio marcó un antes y un después de la comunicación en situaciones de crisis y tuvo un eco muy dispar en las prensas alemana, francesa, italiana y española [30]. Otro episodio, el de las "vacas locas", muestra la repercusión social y económica de los eventos científicos.

No es extraño que sean los fenómenos catastróficos de todo tipo (problemas medio ambientales, combate de enfermedades, accidentes industriales...) los que siembren preguntas e incrementen la curiosidad del ciudadano medio tras su aparición en los medios de comunicación[31]. Estos medios de comunicación se suelen abastecer de los trabajos de investigadores en revistas generales del estilo de *Science, Nature, La Recherche, Scientific American* y otras. En cualquier caso, la trascendencia de un hecho científico no es siempre la que le conceden los medios de comunicación. La publicación de una noticia científica depende más de decisiones internas tomadas por los responsables pertinentes de los medios que de la importancia de la investigación descrita.

La divulgación científica tiene un amplio eco en el mundo de la imagen. Los documentales de naturaleza científica tienen un cierto éxito de audiencia entre el gran público. De hecho, en la oferta televisiva de multitud de canales temáticos, recién llegada a nuestro país, existen varios con una programación exclusiva dedicada a tales documentales. La situación es otra en los canales televisivos habituales. La calidad brilla por su ausencia, pero no sólo en lo que a la ciencia atañe. En algunos de estos programas se presta una gran atención a personajes curiosos que, pretendiendo haber mostrado poco menos que la cuadratura del círculo, son presentados como los "buenos" de la historia mientras los científicos son los" malos", o "represores". Habría que aprovechar más los pocos documentales y *videos* que obedecen a criterios científicos y que sin embargo pretenden llegar al gran público. El carácter universal de la ciencia les confiere un valor que no se limita al interés del país o países de la lengua inicial de rodaje, por lo que, además de estimular su

[30] Véase, por ejemplo, el artículo de Marta Espar, "Chernobil: crisis nuclear e informativa. Análisis del tratamiento mediático en las prensas alemana, francesa y española", *Quark,* n^o 2, Enero-Marzo, 1996.

[31] Una clasificación de las noticias científicas en cuatro grupos distintos es propuesta en el artículo de Calvo Hernando [25]. Para un estudio, referido a Estados Unidos, de cómo se ocupa la prensa de la ciencia y la tecnología véase Nelkin [131].

producción, convendría fomentar también la versión en nuestro idioma de los más valiosos realizados fuera de nuestras fronteras.

Los canales telemáticos, tales como Internet, han revolucionado lo que hasta hace pocos años eran los medios usuales de comunicación. En la actualidad, el acceso a estos canales permite consultar millones de documentos y obtener una ingente información impensable hace tan sólo unas décadas: para ello basta con un ordenador y una línea telefónica. Es claro que no todo el mundo posee esos medios. Sin embargo, el tipo de persona que utiliza esos canales ha dejado ya de ser necesariamente un profesional de la investigación y representa un gran colectivo de personas. La cuestión de la saturación de información se presenta aquí con más intensidad que en ningún otro medio. Los cambios sociales y culturales que este fenómeno puede conllevar están siendo objeto de reflexión en numerosas tribunas[32].

Los museos son otro de los medios tradicionales de divulgación de la ciencia. El museo de ciencias tradicional solía hacer un énfasis casi exclusivo en el coleccionismo de ciencias naturales como la biología y geología. Sin embargo, la concepción actual de un museo de ciencias dista mucho de ese cliché. La polémica surgida a raíz de los Juegos Olímpicos de Barcelona por la exhibición del cuerpo disecado de un individuo de raza negra en un museo de Banyoles (Girona) puso de manifiesto el enorme contraste con los museos interactivos que hoy se localizan en varias ciudades de nuestro país en donde se da mucha mayor relevancia al mensaje afectivo y sensorial. Esta interacción también se puede exhibir con éxito en el campo de las matemáticas como lo mostró la exposición “Horizons mathématiques” que una vez diseñada en el Museo de la Ciencia de París ha recorrido numerosos países[33]. Pero además, su presencia en Internet ha multiplicado su protagonismo. Hoy ya se cuenta con páginas fascinantes que incluyen la posibilidad de realizar *virtualmente* actividades de la visita real, o de ver imágenes en directo. Todo ello sin salir de casa.

[32]Véase, por ejemplo, el artículo de Michael Kenward: “Internet y el periodista científico; utilidades y problemas”, en *Quark*, n^o 1, Octubre-Diciembre de 1995.

[33]Véase [98].

2.2. El entorno de la enseñanza

La mayoría de los investigadores científicos desempeñamos nuestra profesión en el ámbito de la universidad. Una gran parte de nuestro tiempo y de nuestras energías son dedicadas a la enseñanza. En mi caso, un rápido recuento, obviando el tiempo correspondiente a mis estancias en centros extranjeros y las muchas horas adicionales que impartí antes de alcanzar el grado de doctor, me permite afirmar que en la fecha presente habré impartido más de 5.000 horas de licenciatura y más de 1.600 horas de doctorado, además de unas 200 horas de cursos no tipificados, tales como cursos de formación a profesores no universitarios, cursos generales de iniciación a la investigación, cursos de verano, etc. Dejo aparte las conferencias impartidas sobre mis propios resultados. Estos mismos cálculos muestran que, por lo general, un profesor que se jubile a los 70 años habrá impartido más de 10.000 horas de licenciatura y más de 3.200 horas de doctorado.

Nuestra profesión está, pues, muy vinculada a la comunicación y a la pedagogía aunque paradójicamente muy pocos profesores universitarios han recibido un mínimo adiestramiento en estos dos aspectos. En un significativo artículo, [15], H. Bass señala a este respecto:

> Imaginemos a alguien intentando aprender a cantar arias simplemente acudiendo a selectas óperas, o a aprender a cocinar meramente degustando exquisitas especialidades.

En el desempeño de nuestro papel como educadores solemos guiarnos por una mezcla de intuición y experiencia propia, primero como estudiantes que fuimos en su día y después por la práctica cotidiana de nuestro quehacer científico, en el que nuestra incolmada curiosidad nos mantiene en constante proceso de aprendizaje. Sin embargo, esa experiencia personal no tiene por qué ser la más adecuada para otras personas. De hecho, me atrevo a decir que no lo es, pues, por un lado, las técnicas pedagógicas están en continua evolución (las que conocimos como estudiantes son difícilmente adaptables a las circunstancias actuales) y, por otra parte, el proceso de aprendizaje de nuestro alumnado dista mucho de las peculiaridades del nuestro. Mucho del arte de enseñar es invisible al sujeto a quien va dirigido y todo los profesores deberíamos reflexionar, indagar y dominar los secretos de ese arte.

La comunicación de la ciencia tiene unos componentes muy distintos a los de la divulgación. Esta distinta naturaleza ha llevado a pensadores de la talla de Umberto Eco a mantener posiciones muy criticas, y así, en [52], afirmaba:

> Si los *mass media* son el vehículo de la banalidad..., la universidad es por el contrario el lugar de la investigación original, de la reflexión sesuda y sufrida, que mantiene un hilo directo con la tradición, que sospecha de las novedades y de lo fácil, que quiere producir una continua revisión crítica del saber y busca el consenso de una élite.

Señala este autor la siguiente paradoja:

> Los estudiantes de Ciencias de la Información aprenden a ser periodistas según el criterio corriente, y los estudiantes de Filosofía aprenden a criticar el periodismo como una perversión del deber de búsqueda de la verdad.

Su posición es ampliamente compartida por numerosos científicos; sin embargo esa descripción de dos visiones contradictorias entre sí, no se corresponde siempre con la realidad[34] y responde más a épocas pasadas.

La enseñanza de la matemática, como la filosofía y la física, ofrece, en todos los niveles educativos, algunas peculiaridades que van más allá de los conocimientos técnicos de la disciplina: desarrollan *actitudes* de un valor universal: "enseñan a pensar" (véase [78]).

Por fortuna, en la larga historia de la ciencia, ha habido muchos científicos eminentes que sirven de modelos por extender sus reflexiones al campo de la enseñanza, si bien cada uno de ellos ligado a su época y a sus circunstancias. De nuestros matemáticos pasados quisiera destacar aquí los nombres de Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam[35]. Afortunadamente ellos crearon escuela. Su ejemplo, como pensadores de la enseñanza, ha sido seguido por algunos compañeros y, afortunadamente, también en el de la enseñanza no universitaria[36].

---

[34] En el campo de las ciencias, merecen especial distinción iniciativas como las de la Universidad Pompeu Fabra de Barcelona y muchas otras de distintos paises. Véase, por ejemplo el articulo, "La enseñanza de la comunicación científica en Europa", *Quark*, n^{o} 3, Abril-Junio, 1996.

[35] Véase, por ejemplo, Puig Adam [154].

[36] El ámbito de la enseñanza no universitaria y las inquietudes y logros de numerosas personas de ese amplio colectivo quizás no hayan recibido el reconocimiento que merecen en el ámbito científico de nuestro país, en donde los méritos investigadores parecen ser los únicos reseñables.

La perspectiva histórica es algo que se suele descuidar en la enseñanza de las ciencias. El alumno recibe un cúmulo de resultados y técnicas sin conocer bien sus autores, los problemas de su época que afrontaban, las herramientas que les eran disponibles[37]. Un mayor énfasis en el desarrollo histórico acercaría la formación científica a una formación cultural equilibrada[38].

En los últimos años, buena parte del profesorado ha participado de manera activa en el diseño de los nuevos planes de estudio de la casi totalidad de las titulaciones universitarias. Algunos, como es mi caso, incluso en más de una titulación. Hemos podido comprobar cómo, muchas veces, la ilusión inicial de llevar a cabo una actualización necesaria bajo criterios científicos se materializaba sólo en pequeños retoques a los antiguos planes que las más de las veces se lograban contra el inmovilismo y el reparto desigual de poder entre los departamentos. La sociedad demanda mantener una revisión constante de los contenidos de las materias de nuestras licenciaturas, no sólo desde el punto de vista académico-administrativo sino por la necesidad de incorporar nuevos temas y sustituir los ya menos relevantes. Limitándonos a las matemáticas, son muchas las cuestiones que nos asaltan: ¿ es cierto que los contenidos de las materias son los mismos de siempre?; si no es así ¿en qué materias ha habido importantes cambios y por qué ?, ¿por qué en otras disciplinas tales actualizaciones han sido evidentes?, ¿ es un problema de nuestro país o universal?, ¿se utilizan bien las herramientas pedagógicas de nuestros días?, ¿qué ventajas e inconvenientes tienen esas herramientas?, ¿se puede hacer amenas las matemáticas a los alumnos sin vocación de matemáticos?, ¿cual es el papel de las matemáticas en la enseñanza de otras disciplinas tales como física, química, ingenierías, etc?

El ordenador personal es, sin duda, la herramienta básica de nuestros días y ha irrumpido también en la enseñanza. Su capacidad de visualización permite obtener una fuente de intuición inagotable. Además, la capacidad de cálculo simbólico de algunos programas como *Derive, Maple, Mathematica, Matlab, Statgraphics,* etc, permite aliviar al estudiante de las labores más pesadas para concentrase en las más relevantes. Las redes telemáticas de carácter interactivo como Internet han hecho posible un nuevo modelo de universidad orientada a ofrecer enseñanzas no presenciales de gran calidad: son las llamadas “universi-

[37] No obstante, existen algunas dignas excepciones como, por ejemplo, [83].

[38] Véase, por ejemplo, Hernández [90] y su bibliografía.

dades virtuales” de entre las que la Universitat Oberta de Catalunya, fundada en 1994, es un excelente ejemplo.

Una importante faceta del quehacer cotidiano de un profesor universitario es la relación con los alumnos de tercer ciclo y en particular con aquellos a quienes les dirige la tesis doctoral. Éste es un círculo humano en el que la transmisión de conocimientos se hace de manera directa, persona a persona, y en la que siempre he encontrado una gran gratificación. La comunicación tiene aquí unas peculiaridades muy distintas a las de la enseñanza a otros tipos de alumnos. De alguna manera, se reproduce lo más digno del trato humano del “aprendiz” gremial al que se le transmite la experiencia personal, los secretos no escritos en parte alguna. Compartir su ilusión, ser testigo de sus progresos y fomentar su madurez e independencia son experiencias enriquecedoras también para el director de tesis aunque su recuerdo vaya, en ocasiones, unido a una cierta melancolía. No hay nada más satisfactorio que palpar el progreso científico en estos alumnos que, la mayoría de las veces, engrosan rápidamente nuestro círculo de amigos y colaboradores.

2.3. Comunicación entre distintos lenguajes científicos

Quisiera referirme ahora a las peculiaridades de la comunicación del científico como investigador en su relación con otros especialistas. En mayor o menor grado tal interacción siempre está presente. La especialización requerida hoy día para dar respuesta precisa a los nuevos retos que se plantean lleva consigo que las distintas ciencias hayan desarrollado lenguajes propios que de manera indirecta se presentan como exclusivistas. De hecho, sublenguajes específicos, a veces poseyendo un cierto carácter intimidatorio para el incursor ajeno, se dan también en el seno de cada una de esas ciencias[39].

[39]Una cuestión que encierra una profunda meditación ha sido planteada recientemente por el profesor Lions [112]: ¿forman parte de la ciencia los lenguajes informáticos? De forma inmediata se podría decir que la respuesta es clara toda vez que exite una *Teoría de lenguajes* ligada a la lógica matemática, de gran importancia en el diseño y funcionamiento de los ordenadores. Pero es la interpretación más general de la cuestión lo que la hace especialmente interesante. Se trata de la representación de los conocimientos y de su manipulación por procedimientos sistemáticos y abstractos. Destacados científicos como Leibniz o Babbage meditaron profundamente sobre esa interpretación general.

La compartimentización de la ciencia es uno de los riesgos puestos de manifiesto ya desde Henri Poincaré. El carácter minucioso de la investigación propicia una cierta tendencia a no ver el bosque por mirar sólo los árboles. Además, una vez que una compleja técnica de investigación es asimilada, aparece el riesgo de que la investigación degenere en un tipo de trabajo que, pese a todo, se reduce a *vueltas automáticas de tuerca* o bien a una acumulación de listados de datos sin consecuencia alguna: es la componente menos valiosa de lo que que Kuhn llamó *ciencia normal* [100][40]. No sorprende que se atribuya a un científico tan pluridisciplinar como von Neumann un implacable juicio sobre ese tipo de ciencia:

> Hay una ciencia hermosa y me pesa decir que también existe y florece una ciencia fea. Esto ocurre comúnmente cuando un campo pierde su comunicación efectiva con el resto de la ciencia y sobrevive usando criterios puramente internos de interés y validez[41].

Cada una de las grandes ciencias, cada una de sus subdisciplinas, deben su unidad a un problema central que justifica su existencia mientras esté aún sin resolver[42]. Pero esos problemas centrales no son nunca disjuntos y la interacción entre cultivadores de distintas disciplinas es poco menos que imprescindible. Un primer recurso para ilustrar la necesidad de esa interacción es apelar a los grandes proyectos multidisciplinares que han dado una impronta a este final de siglo[43], como es el caso de la carrera espacial (cómo no recordar los viajes del hombre a la Luna o, por ejemplo, la reciente aventura del estudio de Marte,...). Otro gran reto de nuestra sociedad es el de la generación de energía por métodos de bajo riesgo como la fusión nuclear (nombres como EURATOM o ITER encierran un espíritu asociacionista internacional anterior a otros nacidos de conceptos más políticos). El medio ambiente es también un

[40] Investigación basada firmemente en una o más realizaciones científicas pasadas, realizaciones que alguna comunidad científica reconoce, durante cierto tiempo, como fundamento para su práctica posterior.

[41] Aunque esta frase, recogida en el preámbulo de algunos libros de autores distinguidos, es atribuida a von Neumann no he sido capaz de hallar una referencia concreta que la incluya explicitamente.

[42] Véase el trabajo de René Thom [184].

[43] Es lo que se ha venido a denominar la “gran ciencia” (véase el libro de Derek J. de Solla Price [151]).

campo en el que la partipación de varias disciplinas es obligada y que no ha salido a la luz más que en nuestros días[44].

Pero no es necesario acudir a la macro-escala de los proyectos para poner de manifiesto el ineludible carácter multidisciplinar de la mayoría de ellos. La industria ha sido una fuente permanente de retos en los que con frecuencia no ha bastado la intervención de los ingenieros; la medicina avanzada hace ya tiempo que moviliza a un panel de especialistas que va más allá de los propios médicos y el mundo de las relaciones económico-sociales necesita también de la contribución de otras ciencias. La demanda social a la ciencia, frente a los problemas del siglo XXI, no va a ser tan sólo la de actuar como motor del progreso tecnológico sino, además, la de saber predecir y controlar el impacto de ese progreso en la naturaleza y en las propias estructuras sociales y económicas que lo sostienen.

Es claro que esos proyectos multidisciplinares, en muchos casos ligados a iniciativas privadas, no pueden autoabastecerse de personal científico y surge el contacto con los investigadores de organismos públicos y en particular con la universidad. La problemática de esa interacción es muy rica y de compleja articulación. A veces puede darse un conflicto de intereses entre tecnología y ciencia que se cifran en la reserva, o no, de la publicidad de los resultados, discriminación de temas de investigación, etc. Pese a todo, es innegable que algunas áreas científicas no existirían, ni seguirían desarrollándose, si no fuera por la financiación directa del sector industrial: ésto es especialmente patente en medicina y farmacia. La prevención de conflictos de intereses pasa por la declaración pública de las condiciones de esa interacción. En realidad, hoy día, no existe ninguna investigación que no tenga patrocinador público o privado, ni ningún proyecto que se diseñe de forma absolutamente desinteresada. Inseparable de la noble curiosidad científica[45], el investigador tiene siempre incentivos personales y profesionales que no han de ser vistos como ilegítimos. La promoción personal y el reconocimiento público son estímulos o móviles que pueden ser tanto o más

[44] Una reciente noticia de prensa (EL PAÍS, 16 de Julio de 1997) daba cuenta de un sofisticado proyecto internacional llevado a cabo en Canarias para el estudio de los aerosoles en la atmósfera y su papel en el cambio climático.

[45] A juicio de Kuhn [100], algunas de las principales razones que pueden conducir a una vocación científica son: el deseo de ser útil, la emoción de explorar un territorio nuevo, la esperanza de encontrar orden y el impulso de poner a prueba los conocimientos establecidos.

tentadores que los incentivos económicos. Pero la llamada investigación *estratégica*, aquella en la que se trabaja en proyectos de interés también para otros, tiene un valor añadido.

Obviamente, la investigación interdisciplinar no necesita su canalización como proyecto formal y de hecho es así como se da con gran frecuencia. Temas como el caos, la turbulencia y el universo fractal, entre otros, sólo han encontrado un marco de tratamiento adecuado cuando han sido sumergidos en el ámbito multidisciplinar. Es también el caso de los llamados *sistemas complejos* que aparecen en muy diferentes contextos (estado sólido, óptica, meteorología, biología, etc) en los que su comprensión no es el simple fruto de la suma del entendimiento de sus partes. Los niveles ascendentes en la jerarquía de la complejidad exhiben propiedades emergentes en cada nivel que no son predecibles desde las propiedades de las partes. Es el camino inverso al *reduccionismo* en el que se pretende concatenar todo a simples leyes fundamentales pero que difícilmente puede reconstruir un complicado universo partiendo de esas leyes. Finalmente, la posibilidad de alcanzar simulaciones numéricas por medio de los potentes ordenadores actuales ha potenciado, aún más, la colaboración interdisciplinar.

La colaboración entre científicos de distintas ramas sólo puede ser fructífera si cada uno de ellos desempeña su papel original lo mejor posible. La dificultad no radica en su distinto bagaje sino en encontrar un lenguaje común. La manera de hacer frente a la creciente especialización no pasa por intentar que todos los investigadores deban conocer "un poco de todo". Lo ideal sería que cada uno fuese experto en su materia, siendo también capaz de comunicarse eficazmente con otros de distinta formación. Ésta es una meta que bien merece la pena y los involucrados en ella salen claramente enriquecidos de la experiencia. Transferir problemas característicos, conceptos y métodos de una disciplina a otra puede servir para clarificar problemas de cada una de ellas estancados en la obscuridad. Esta actividad interdisciplinar tiene una naturaleza muy distinta a la de los periodistas científicos quienes, por motivos profesionales, se ven obligados a relatar, describir y hasta opinar hoy sobre un hecho fronterizo de una ciencia y mañana sobre la última revolución de otra. La comunicación que se produce en la investigación interdisciplinar involucra al menos a dos sujetos activos en ese proceso y el transvase de conocimientos se produce en todas las direcciones. Ese tipo de comunicación no es el más frecuente hoy día (aunque paradójicamente, hasta el siglo pasado era usual en una ciencia menos desarrollada en la que no tenía sentido la superespecialización). Se presenta, además, una dificultad adicional: cuando tal colaboración se produce, surge la difícil tarea de la evaluación de su calidad.

Creo que mis colegas de otras ciencias estarán de acuerdo al afirmar que si hay alguna ciencia con un cierto privilegio a la hora de la colaboración interdisciplinar ésa es la matemática. Su universalidad es bien conocida por todos y está fuera de toda duda. Pero además, cuando un concepto experimental nacido en otras ciencias se hace cuantitativo y se matematiza, cuando un problema se modeliza matemáticamente, su tratamiento se enriquece de manera obvia y aparece la posibilidad de su comprensión por científicos de otras procedencias[46]. Una parte importante de la matemática nace en esos intentos: es lo que mencioné al principio como *las matemáticas del mundo* y que desarrollaré en la última parte de este discurso por lo que no insistiré ahora sobre el tema.

La cooperación interdisciplinar es bastante compleja y no es sencillo encontrar medidas que la propicien. A mi juicio, debería ser cultivada ya en el periodo de formación de los científicos[47]. Nuestras antiguas Facultades de Ciencias y las favorables condiciones de equiparación con los estudios de las distintas ingenierías fomentaban una formación más íntegra en el sentido antes señalado. La división en facultades monotemáticas fue acompañada de unos planes de estudio que nacían especialmente motivados por justificar su especificidad y con ello el distanciamiento entre disciplinas alcanzó su punto máximo. Me constan intentos de superación de ese enfoque (o, más bien, desenfoque) en las comisiones que elaboraron algunos de los nuevos planes de estudios, así como en las que lo materializaron en las diferentes facultades, si bien no siempre se plasmaron en hechos consumados[48]. Queda, al menos, el colchón de los llamados *créditos de libre elección* que favorecen el contacto con temas complementarios a una formación irremediablemente monográfica.

En el capítulo del reclutamiento de profesorado y personal investigador, lo interdisciplinar no suele ser un aspecto valorado como se merece. Las barreras entre los departamentos tradicionales acentúan el

[46] Sobre los abusos y peligros de la excesiva matematización se ha escrito mucho aunque no siempre con igual certeza (véanse, por ejemplo, Davis y Hersh [38] y los comentarios de Osserman [139] a este respecto).

[47] La inserción de la asignatura *Ciencia, Tecnología y Sociedad* en el nuevo Bachillerato (BOE del 29 de enero de 1993) parece responder a esos fines.

[48] Entre las nuevas titulaciones hay algunas que nacen con un espíritu más generalista; éste es el caso, por ejemplo, de la licenciatura de Ciencias Medio Ambientales

conservadurismo de cada disciplina. La lamentable “endogamia”, tan generalizada en nuestros centros, es un obstáculo serio a la colaboración interdisciplinar. Esto influye negativamente sobre los investigadores en periodo de formación, lo que les atemoriza a lanzarse a temas novedosos y de dudosa aceptación a la hora de sus legítimas aspiraciones de contratación. Pero no todas las innovaciones administratívas de los últimos años han resultado negativas, y así, en particular, el nacimiento de los departamentos interfacultativos ha permitido establecer puentes entre el profesorado de distintos centros que en muchos casos han propiciado colaboraciones fructíferas. Sería deseable una mayor proliferación de centros o estructuras de investigación multidisciplinares como se dan ya en los paises más avanzados y de los que existen algunos precedentes en nuestro país[49]. A este respecto es también de resaltar la proliferación de reuniones ocasionales o permanentes de carácter interdisciplinar. Finalmente, quisiera señalar que esta Real Academia posee una potencialidad excepcional para llevar a cabo la difícil tarea de lo interdisciplinar; de hecho valiosas experiencias en esa dirección han tenido lugar en su seno. La posibilidad de que la ciencia ofrezca una sola voz ante la sociedad, la administración y sus estructuras científico-tecnológicas de gobierno es un privilegio que posee esta Real Academia y que resalta aún más su responsabilidad como correa transmisora de un colectivo humano complejo y en constante evolución.

2.4. El entorno de la investigación

Los avances, los progresos de la ciencia se producen mediante la investigación desarrollada tanto en centros públicos, de los que una buena parte son centros universitarios, como en centros sufragados por la iniciativa privada. El mundo de la investigación es muy complejo por lo que no será extraño que fije mi atención únicamente en algunos aspectos parciales. En particular, abordaré los complejos mecanismos del progreso científico y su conexión con la filosofía de la ciencia, así como algunos aspectos relacionados con la comunicación entre el círculo

[49]Uno de los más notables promotores de lo interdisciplinar en la historia pasada fue el geómetra Félix Klein quien entre 1888 y 1925 llevó a cabo una enérgica lucha a favor de la cooperación entre la matemática y la industria, reuniendo en Göttingen a matemáticos como Bernstein, Carathéodory, Courant, Hilbert, Landau, Minkowski y Runge, así como distinguidos ingenieros, entre ellos Loewe y Prandtl. En la actualidad ese tipo de centros existen en numerosos países.

de investigadores de una misma disciplina. Aunque me apoyaré en mi experiencia personal en el campo de las matemáticas, creo que hay muchos puntos comunes con lo que acontece en otros campos.

Los matemáticos llevamos "milenios" midiendo los avances de nuestra ciencia por los teoremas que han sido demostrados mediante el *rigor matemático*, consistente en cadenas de razonamientos lógicos conducentes desde un sistema de axiomas hasta alguna conclusión irrefutable. Desde tiempos de Pitágoras, la matemática ha sido catalogada como la disciplina constituida, únicamente, por verdades atemporales. Esa concepción ha pasado por varias y profundas crisis; la más reciente de ellas debida a la irrupción del ordenador en el proceso deductivo matemático. Perspicaces matemáticos y destacados pensadores de la filosofía de la ciencia se han ocupado de ello[50]. Parece haber un cierto consenso en situar, más o menos, el punto de partida en la llamada "crisis de fundamentos" que alcanza su cenit entre los años 1890 y 1930. En esa época irrumpe toda una serie de nuevas teorías, como las geometrías no euclídeas propuestas por Gauss, Bolyai, Lobatchevski y Riemann entre otros. Se muestran "con rigor" resultados que niegan la intuición basada en el más elemental "sentido común", como es el caso de curvas continuas sin derivada en ninguno de sus puntos o curvas que llenan un cuadrado pasando por todos sus puntos. Hilbert, en su obra maestra [91], había proporcionado una presentación axiomática de la geometría de Euclides y Cantor de la recién nacida Teoría de Conjuntos. El *Teorema de incompletitud* de Gödel [74], de 1931, mostrando la existencia de proposiciones "indecidibles", echó por tierra el programa propuesto por Hilbert. Simultáneamente, en filosofía de la ciencia, se pone en entredicho la vieja distinción entre "contexto de descubrimiento" y "contexto de justificación", usualmente atribuida a Reichenbach y fechada hacia 1930, pero que se remonta de hecho hasta Whewell y que tiene una expresión notable en matemáticas en algunos textos clásicos de Poincaré, como el que sigue (Poincaré [147]):

> Tanto la lógica como la intuición desempeñan un papel necesario. Ambas son indispensables. La lógica, la única que puede dar la certeza, es el instrumento de la demostración: la intuición es el instrumento de la invención.

[50] Véase, por ejemplo, el interesante trabajo de Jesús Hernández [89] y sus referencias.

Con esta distinción, la filosofía de la ciencia delimitaba su función de estudiar el contexto en el que habían tenido lugar los descubrimientos científicos, es decir las circunstancias psicológicas, sociales o políticas en que se habían realizado, dejando para la metodología de cada una de las ciencias la consideración de los procesos de justificación y fundamentación[51]. Lakatos, en su libro [103], criticó tal división catalogando esa concepción de "formalista" y afirma:

> El formalismo desconecta la filosofía de las matemáticas con la historia de las matemáticas, puesto que, de acuerdo con la concepción formalista de las matemáticas, éstas no tienen propiamente historia. (...) Ninguno de los periodos "creativos" de las teorías matemáticas, y difícilmente alguno de sus "críticos", habrían de ser admitidos en los cielos formalistas, donde las teorías matemáticas moran como los serafines, purgadas de todas las impurezas de la incertidumbre terrestre.

El punto de vista convencional de desarrollo acumulativo de la ciencia es puesto en cuestión por Kuhn en [100], quien profundizó en la gran dificultad para atribuir los grandes descubrimientos científicos o para ubicarlos en el tiempo, ilustrándolo mediante la consideración del descubrimiento del oxígeno, entre otros casos polémicos. Este autor afirma:

> Pero si tanto la observación y la conceptualización como el hecho y la asimilación a la teoría están enlazadas inseparablemente en un descubrimiento, éste, entonces, es un proceso y debe tomar tiempo. Sólo cuando todas las categorías conceptuales pertinentes están preparadas de antemano, en cuyo caso el fenómeno no será de un tipo nuevo, podrá descubrirse sin esfuerzo *qué* existe y *qué* es, al mismo tiempo y en un instante.

Con el fin de ilustrar la conflictiva naturaleza de los descubrimientos matemáticos, Jesús Hernández propone en [89] la consideración de los logaritmos (llamando al estudio histórico realizado por Bourbaki [21]), el progreso del cálculo infinitesimal no exento, en sus comienzos, de

[51] A mi juicio, no es descabellado encontrar antecedentes a estos puntos de vista en el pensamiento de Ortega y Gasset (véase, en particular, [136]).

errores y polémicas[52] y el “nacimiento” de la teoría de las distribuciones a la luz del tratado de Lutzen [118]). En su artículo, Hernández analiza el prerrequisito antes mencionado de Kuhn (“sólo cuando todas las categorías conceptuales pertinentes están preparadas de antemano”) y entiende que éste representa una idea de organización local -no necesariamente susceptible de una presentación axiomática- permitiendo una exposición lo suficientemente clara y ordenada, a partir de definiciones precisas, de los resultados de una teoría que englobe de manera sistemática resultados más o menos dispersos y expuestos de modo más o menos vago. A mi juicio, es el cumplimiento de ese prerrequisito lo que puede justificar un hecho que se presenta con frecuencia: investigadores geográficamente lejanos obtienen simultaneamente resultados gemelos[53].

Volviendo al rigor matemático, el impacto del teorema de Gödel fue extraordinario[54] y desde entonces ha sido explotado con fines “metafísicos” como también lo fueron en su día el segundo Principio de la Termodinámica y el de *incertidumbre* de Heisenberg. Nuevas idealizaciones, ahora más modestas, de cuándo una demostración debía ser tomada como buena aparecieron en la escena matemática. John von Neumann, en el artículo [132], escribía:

> La opinión de los matemáticos sobre el concepto de rigor ha fluctuado tan considerablemente durante mi propia experiencia, que se limita sólo a algo más de treinta años, que mi opinión personal sobre ello ha cambiado al menos dos veces. ¡Y ésto en el corto periodo de la vida de una persona! Si, por ejemplo, se considera el periodo desde comienzos del siglo dieciocho las fluctuaciones de lo que se ha entendido por rigor son mucho mayores.

Uno de los matemáticos mas profundos de nuestro siglo, Hermann Weyl, presentaba en un trabajo de 1949 [189], el carácter “irremediablemente falible” de la matemática:

---

[52]Véase, por ejemplo, el estudio de Hernández [88] sobre el “error” de Cauchy en la demostración de su teorema afirmando la continuidad de la función límite de funciones continuas.

[53]Los llamados *descubrimientos independientes múltiples* de conceptos matemáticos son la regla y no la excepción (véase, por ejemplo, Crowe [35]).

[54]Véase, por ejemplo, Dou [48].

> Hemos de estar satisfechos de que un sistema axiomático simple de matemáticas haya superado hasta el presente el "test" de nuestros elaborados experimentos matemáticos... Una matemática genuinamente realista debería concebirse, en parangón con la física, como una rama de interpretación teorética del único mundo real y debería adoptar la misma actitud sobria y cautelosa que manifiesta la física hacia las extensiones hipotéticas de sus fundamentos.

René Thom proponía en [182] lo que denominaba *concepción empirista o sociológica* del rigor matemático y que resalta su carácter *local* como propiedad del razonamiento matemático:

> Una demostración es considerada como rigurosa si los mejores especialistas en la materia no tienen nada que objetar.

A mi juicio, esta propuesta, enlaza con el pensamiento de Kuhn: las teorías científicas son aceptadas no porque sean "verdaderas" en un sentido objetivo sino también por razones sociales. La evaluación por especialistas contemporáneos de los "proyectos" de descubrimientos pasa a tener así una importancia mayor a la de periodos precedentes. Con frecuencia esta tarea de evaluación no es nada sencilla debido a la extensión y complicación de las demostraciones[55]. Ciertamente hay ramas enteras de la matemática (como es el caso del Análisis no Estandar[56]) cuya validación está continuamente en entredicho. Éste tipo de teorías corresponde a lo que Kuhn [100] denomina *paradigma*: conjunto de presupuestos, conceptos y métodos que articula la comunidad científica en grupos de seguidores. De hecho, Kuhn justifica las revoluciones científicas a partir de crisis de los paradigmas. El paso de la astronomía geocéntrica al sistema copernicano, el paso de la física cualitativa y verbal de Aristóteles a la física matemática y experimental de Galileo, son buenos ejemplos de esas revoluciones. Tales cambios fueron acompañados de convulsiones sociales y escenas patéticas como la quema pública de Giordano Bruno o la abjuración y cárcel de Galileo

[55]El reciente caso de la primitiva y extremadamente compleja demostración del último teorema de Fermat por Andrew Wiles en más de cien páginas en 1993 y su correcta presentación en colaboración con Richard Taylor en 1995 es quizás el mejor de los ejemplos.

[56]Véase, por ejemplo, Robinson [163].

Galilei (proceso que, en cierto sentido, no ha sido totalmente reparado hasta la retirada de su excomunión el año pasado). No está claro que el modelo kuhniano de las revoluciones científicas sea aplicable a la ciencia de nuestro siglo. En nuestro tiempo, éstas se han multiplicado, pero ya no tienen el carácter estridente y dramático de las renacentistas. La propuesta de Thom podría infundir serios temores si uno piensa en esos dramatismos[57]. Afortunadamente ya son historia pasada. En cualquier caso realza la problemática de los medios de validación de los descubrimientos científicos a los que me referiré más tarde.

Otro elemento catalizador de uno de los últimos cambios del concepto de rigor ha sido el ordenador, el *macroscopio* según lo denomina Prigonine [152]. En un informe de 1945, de gran valor testimonial, H. Goldstine y J. von Neumann [75] diseñaban un listado de las cualidades a requerir a los nacientes ordenadores. Su concepción nacía unida al hoy día llamado *Cálculo Científico* al que me referiré en la última parte del discurso. Las previsiones se quedaron cortas y su papel en el desarrollo de la ciencia está afectando incluso a la concepción de lo verdadero y de lo falso. Ésto ha sido señalado en el artículo de Horgan *La muerte de la demostración* ([93]) que ha tenido un cierto eco en la literatura de divulgación matemática.

Una de los primeras incursiones del ordenador en el proceso de un descubrimiento matemático fue *el problema de los cuatro colores* relativo a la posibilidad de colorear un mapa plano, infinitamente grande, de forma que ningún par de países con frontera común sean de un mismo color. En 1976, Kenneth Appel y Wolfang Haken demostraron, mediante métodos lógicos "tradicionales" que el problema se reducía al estudio de 1.482 mapas adecuadamente escogidos. Unas 1.000 horas de tiempo de cómputo más tarde, un ordenador concluyó que la conjetura era cierta. A esta demostración asistida por ordenador le siguieron otras: el llamado *problema de la reunión*, contribuciones en campos más tradicionales de la matemática como es el de la *teoría de superficies mínimas* (véase Hoffman [92]), etc. Tales demostraciones no han sido totalmente admitidas como válidas por ciertos matemáticos alegando que si los hu-

[57]En otro trabajo, [183], Thom afirma que de entre todas las disciplinas, la matemática es justamente aquella en la que el rigor es menos necesario *a priori*. A diferencia de las ciencias experimentales, los descubrimientos de las matemáticas son susceptibles de comprobación por los lectores sin necesidad de reproducir ningún complicado experimento. De esta manera, los errores constituyen un fenómeno sin importancia en la historia de las matemáticas.

manos pueden cometer errores los ordenadores también, sólo que mucho más difíciles de descubrir. En todo caso, hoy día, la matemática experimental es ya una realidad[58]: los experimentos computacionales pueden proporcionar conjeturas a problemas complejos[59]. Sin embargo, distinguidos matemáticos han ilustrado, mediante contraejemplos, los riegos de extrapolaciones basadas en experimentos con ordenador. La reciente resolución de la llamada *conjetura de Robbins*, por Larry Wos y William McCune en 1996 mediante un programa de deducción automática, ha retomado la cuestión planteada en 1947 por Alan Turing sobre si los ordenadores pueden llegar a pensar o a poseer creatividad; éste presagiaba que en unos cincuenta años, es decir ahora, la respuesta sería afirmativa. Aunque en algunos artículos de prensa se presenta el programa de Wos y McCune como una confirmación de la conjetura de Turing creo que habría que mantener un cierto escepticismo; en todo caso la respuesta dependerá de lo que se entienda por esas tareas y de la precisión de esa definición.

Con frecuencia los avances científicos se hacen públicos por primera vez en el seno de exposiciones orales, ya sea en seminarios o congresos. Ciertamente, este tipo de comunicación no basta para la validación de los descubrimientos expuestos pues no todos los pasos lógicos son explicitados con detalle ni los asistentes, en el supuesto de una audiencia de especialistas, poseen el tiempo necesario para la reflexión y confrontación con lo ya existente (recuérdese lo acontecido con la exposición inicial de Wiles sobre la demostración del Teorema de Fermat). Pese a ello, la comunicación oral en ciencia es de gran valor. El conferenciante está obligado a realizar una síntesis que muchas veces exhibe más claramente sus propósitos, ideas y métodos que la exposición escrita, donde las normas son mucho más estrictas. El oyente interesado en el tema sale claramente beneficiado por este tipo de comunicación en el que se evita la lectura de muchas páginas y libros para alcanzar una idea global, y a veces también minuciosa, de asuntos de su interés. Pero la especialización de la ciencia actual hace que con frecuencia sean pocos los asistentes a un seminario que posean un interés concreto en el tema presentado y por el contrario el interés de la mayoría de los presentes en la sala radique en distintos temas, aunque quizás de un mismo campo. No

[58]Existen varias revistas especializadas que recogen este tipo de experiencias.

[59]De hecho, los métodos experimentales en matemáticas no son nuevos y ya Gauss y otros gigantes matemáticos solían realizar numerosos cálculos experimentales antes de construir demostraciones formales.

pocas veces ese tipo de oyentes salen también enriquecidos de la experiencia al fijar su atención en aspectos que podrían ser de validez en sus respectivas líneas de investigación. Si, como ya señalé anteriormente, se piensa que nunca en la historia ha habido una cantidad semejante de investigadores científicos, es natural observar que los encuentros entre ellos, en particular los congresos, hayan alcanzado una proliferación de vértigo[60]. Incluso poseyendo las posibilidades económicas necesarias se hace imposible asistir a todos los congresos de la especialidad.

La validación de los resultados se produce, desde mediados del siglo pasado, mediante su aceptación y publicación en revistas especializadas tras un proceso de revisión por otros especialistas selecionados por el comité de redacción de la revista correspondiente y que actúan de manera anónima para el resto de la comunidad científica[61]. Aparentemente este sistema ofrece garantías pero evidentemente no escapa a la aparición de irregularidades que ponen en cuestión el mito de presentar a la ciencia como la forma más objetiva, más inteligible, más rigurosa y, por tanto, más universal de conocimiento. La calidad del proceso de validación depende no sólo de la adecuada selección de los especialistas "censores" sino también de la seriedad con que éstos desarrollen su tarea[62]. Podría pensarse que una vez publicado el artículo estará sometido al examen de toda la comunidad especializada. Lejos de ello, el número de lectores atraídos por un artículo determinado es, en casi todos los casos, muy pequeño. Pese a ello no faltan en la literatura trabajos en los que se corrigen (por el autor u otros especialistas) los errores advertidos después de la publicación. A veces las conclusiones son correctas pero los pasos empleados en su deducción son oscuros o incluso falsos. La corrección realizada por el propio autor ensalza su seriedad ética. En todo caso, estos episodios no dejan de poner de manifiesto las limitaciones del sistema. Hay, sin duda, artículos ampliamente leídos y que,

[60]En una novela reciente, David Lodge [115] realiza una ácida y humorística sátira del mundillo intelectual en la que la pareja protagonista, ambos profesores universitarios, viven prácticamente en los aviones, de congreso en congreso.

[61]Existen varias revistas, tales como *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt für Mathematik* y otras, que llevan a cabo un proceso de recensión posterior a la publicación de los artículos. En una conferencia en la Universidad Carlos III, en Marzo de 1996, B. Wegner, editor principal de *Zentralblatt für Mathematik,* indicó que en el año 1995 su revista había recensionado más de 50.000 artículos de matemáticas.

[62]La formación de "clanes" que acaparan los consejos de redacción de las revistas más prestigiosas del campo, y con ello el proceso de validación de resultados, es una compleja realidad que merecería un estudio sociológico detallado.

tras sobrevivir al análisis, ejercen gran influencia. Es entonces cuando podríamos decir que sus resultados entran a formar parte de la que podríamos llamar *parte verificada* de la ciencia.

Las redes telemáticas como Internet han propiciado la irrupción de las llamadas *revistas electrónicas.* Respetando los procedimientos de recensión clásicos, algunas de las ventajas que presentan radican en un precio más bajo de suscripción, la facilidad de copiar los textos y, lo que es más importante, un tiempo de espera de publicación (desde que el artículo es aceptado) mucho más corto que en las revistas convencionales.

Merece la pena resaltar también el papel de las monografías especializadas como medios de difusión de los avances científicos. Su objetivo suele ser el de llevar a cabo reflexiones retrospectivas o presentaciones unificadoras de resultados muchas veces dispersos en la literatura. Constituyen el paso previo a la incorporación de resultados relevantes a libros de texto, que obedecen a una finalidad más académica y pedagógica. De alguna manera, tales libros pueden ser considerados como herederos de los medios de difusión de la ciencia anteriores al nacimiento de las revistas especializadas. Permiten que un investigador interesado en la materia inicie su trabajo donde acaba el libro, concentrándose así en los aspectos más sutiles. En la actualidad se está produciendo una proliferación de este tipo de libros, entre otras cosas debido a la gran accesibilidad de los tratamientos actuales de textos. Las editoriales más prestigiosas cuentan con un elenco de distinguidos especialistas encargados de la selección y recensión de manuscritos lo que hace que ciertas series de monografías gocen de una calidad bastante uniforme.

Una vez expuestos los canales usuales de comunicación en el entorno de la investigación uno podría preguntarse sobre su propia metodología. Como señaló certeramente Ramón y Cajal en su discurso de ingreso en esta Academia (véase [155]) el 5 de diciembre de 1897, es decir hace cien años, no existen panaceas para enseñar a investigar, por mucho que excelentes tratados como el de Descartes [43] hayan sido fuente de profundas reflexiones. Según indicaba en el prólogo de su discurso, Ramón y Cajal recogía una serie de consejos, estímulos alentadores y paternales admoniciones dirigidas al novel investigador y apuntando más a la voluntad que a la inteligencia. La mayor parte de sus reflexiones, recogidas inicialmente en siete capítulos y que luego se convertirían en once en la tercera edición de 1912, sigue siendo válida en nuestros días y sólo una pequeña parte requeriría una revisión a la realidad actual, como es el caso del capítulo que titula *Condiciones sociales favorables a la obra científica* que es el que contiene más referencias a la sociedad de su tiempo y por tanto necesariamente revisable. En particular, las citas sobre el papel de la mujer son afortunadamente irreconocibles hoy día[63][64].

Quisiera terminar este capítulo con el buen sabor de boca que dejan siempre las palabras de Ortega. En su obra *En torno a Galileo* [137] sintetizaba en unas pocas palabras su idea de la ciencia con la que comulgo:

> Esta faena es la ciencia; como se ve, consiste en dos operaciones distintas. Una puramente imaginativa, creadora, que el hombre pone de su propia y libérrima sustancia; otra confrontadora con lo que no es el hombre, con lo que le rodea, con los hechos, con los datos. La realidad no es dato, algo dado, regalado sino que es construcción que el hombre hace con el material dado.

[63] La revisión del papel de la mujer en la ciencia a lo largo de la historia es un tema que ha recibido una enorme atención en la literatura. En la actualidad existen varias sociedades que se ocupan de esa problemática y que luchan por evitar discriminaciones de tiempos pasados.

[64] El mundo de la investigación en la sociedad actual llama a la necesidad de un cierto código ético, quizas aún por consolidar, que es objeto de consideración incluso en sociedades científicas especializadas (véase, por ejemplo Stakgold [177] así como el artículo de Jaffe y Quinn [95] y sus respuestas Atiyah et al [10] y Jaffe y Quinn [96], entre otras).

Capítulo 3
Sobre las matemáticas del mundo

3.1. Una actitud personal

El resto de este discurso lo dedicaré a las *matemáticas del mundo.* Pero ¿acaso hay un *mundo matemático* distinto, independiente de nuestra experiencia sensible, diferente del mundo sobre el que versan otras ciencias? Obviamente sí y basta acudir a ejemplos elementales para ilustrarlo. Podemos recurrir, por ejemplo a los números *irracionales* o a los números *imaginarios.* Su denominación no es caprichosa y apela a lo que choca con nuestro conocimiento intuitivo. Entre los primeros destacan el número π, que expresa la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, y el número $e,$ base de los logaritmos neperianos. Entre los segundos, el número imaginario por excelencia es el número $i,$ que representa algo no real: la raíz cuadrada de $-1.$ Son conceptos intelectuales, no materiales, pero que gozan de una armonía deslumbradora, y así, Leonard Euler mostró que si elevamos e a la potencia $i\pi$ resulta el número entero $-1.$ Ese mundo no es fácilmente accesible pero encierra una belleza asequible no sólo al investigador experto sino también a los que se adentran en él con curiosidad. De hecho, ese mundo matemático es más rico de lo que uno podría imaginar y así, uno de los matemáticos más eruditos del siglo, Jean Dieudonné afirmaba ([45]) que sólo el 30 o el 40 % de esta disciplina tiene como objeto suministrar y abordar modelos en relación con otras ciencias[1]. Esto da

[1] Dieudonné asegura que tal afirmación es fácilmente apreciable con sólo indagar en una revista como *Mathematical Reviews* que publica mensualmente análisis sumarios de todos los artículos aparecidos en las revistas matemáticas más relevantes.

idea de la magnitud de ese *mundo matemático*[2].

Por *matemáticas del mundo* entiendo una parcela de esa ciencia que pretende prever el comportamiento de ciertos objetos o sistemas del mundo sensible, bajo unas condiciones conocidas a partir de ciertas leyes generales que rigen esos comportamientos. En ambientes académicos correspondería a lo que actualmente suele denominarse *matemática aplicada*. Sin embargo, su descripción en subdisciplinas carece de una aceptación universal, variando de manera drástica de un país a otro[3]. Entrar en el cometido de qué es lo que engloba esa denominación académica no me parece tarea para una ocasión como ésta. Es por ello por lo que he preferido apoyarme en una denominación más ambigua.

Pero además, a mi juicio, no creo que exista una división rígida entre las matemáticas aplicables y las *otras* matemáticas. En todo caso, me adelanto a defender que la posible sutil distinción no se originaría por el distinto rigor de los argumentos matemáticos utilizados sino más bien por la motivación *proveniente del mundo real* de los problemas abordados por la *matemática aplicada*. A mi juicio, tal denominación se refiere a una colección de actividades dirigida hacia la formulación de *modelos* matemáticos, el análisis de las relaciones matemáticas que aparecen en esos modelos y la interpretación de los resultados analíticos en el marco de su pretendida aplicación. Los métodos utilizados en ese afán son tomados de todas las áreas de las matemáticas sin ninguna restricción. La universalidad de las matemáticas lleva, muy a menudo, a que un mismo análisis origine aplicaciones insospechadas en otros campos distintos.

Lo que podría diferenciar a unos matemáticos de otros es su diferente actitud. En mi caso personal, lo que encuentro atrayente es desarrollar las matemáticas que tienen claras conexiones con otras ciencias, naturales o sociales. Por mi formación inicial como matemático *puro*, no me es imposible encontrar un cierto gusto en algunas matemáticas abstractas pero ciertamente mi interés crece a medida que soy consciente de que esas matemáticas tienen alguna relevancia en las aplicaciones. El voluntario aislamiento de ciertos matemáticos que presumen de “su pureza” no me mueve en absoluto. Por el contrario, creo que es una realidad

[2]Véanse también las reflexiónes de San Juan [168] a este respecto.

[3]De hecho, limitándonos a nuestro país, no hay unanimidad de criterios, y así, por ejemplo, la interpretación que dió Rey Pastor de la *matemática aplicada* en 1961 en su discurso de contestación [159] al de Sixto Rios difiere, de manera importante, de la concreción que este *área de conocimiento* académico ha tenido en la política de plazas y de asignación de docencia desde su instauración como tal en 1986.

palpable que cada vez hay más científicos e ingenieros con una razonable formación en parcelas matemáticas de aplicación en sus disciplinas y que alcanzan a desarrollar de manera relativamente sofisticada. Basta acudir a las revistas *IEEE, Communications in Mathematical Physics, Journal of Mathematical Biology* y tantas otras, para apreciar cómo han cambiado las cosas en los últimos veinte años.

La matemática está siendo aplicada en esas áreas por numerosos científicos y no todos ellos son “profesionales de la matemática”[4]. De alguna manera se podría pensar que éstos desempeñan un papel *táctico* abordando las dificultades más inmediatas mientras que el papel del matemático aplicado tendría un carácter más *estratégico* al divisar una mayor perspectiva gracias a su mayor formación matemática. La comunicación entre tácticos y estrategas no es siempre fluida: Radon tuvo que esperar veinticinco años para que unos ingenieros vieran la utilidad de su transformada, introducida en 1917, en la construcción de máquinas de *rayos X* y, recíprocamente, con alguna frecuencia importantes problemas de la ciencia y la técnica no son abordados matemáticamente más que tras un largo periodo de indiferencia. El ejemplo de Radon, uno entre muchos otros, sirve para ilustrar lo que el premio Nobel, E.P. Wigner, denominó *la irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales* (Wigner [191]). Numerosos autores han glosado el profundo mensaje que encierra esa frase. En particular, esa efectividad resulta, además de irrazonable, insospechada cuando los resultados matemáticos que se aplican han sido introducidos previamente en otro contexto. Una de las mejores muestras de esa efectividad insospechada fue la sistematización de la *relatividad general* llevada a cabo por Einstein. Como él mismo manifestó en varias ocasiones, basado en algunos pocos experimentos cruciales comenzó a elaborar su teoría moviéndose por impulsos estéticos y filosóficos. Después consultó a especialistas de *geometría diferencial*, especialmente Grossman, y descubrió que el lenguaje que necesitaba, *la teoría de invariantes diferenciales*, ya había sido creado anteriormente como un cuerpo de resultados matemáticos sin ninguna motivación práctica especial. Esto pone de manifiesto *la unidad interna de las matemáticas* señalada por Steen [178] y tantos otros.

[4]Obviamente no es condición necesaria tener una titulación en Matemáticas para ser un buen “profesional de la matemática”. No hace falta recurrir a la historia pasada tan repleta de numerosos ejemplos notables; basta observar el panorama matemático actual para divisar frecuentes casos que despiertan gran respeto y admiración.

3.2. La calidad frente a la polémica estéril: puro *versus* aplicado

La clave de la aplicabilidad de un resultado matemático radica en su calidad, independientemente de si ha sido concebido en aras de una aplicación concreta. La vieja polémica entre *matemática aplicada* y *matemática pura,* ya iniciada con el cruce de insinuaciones entre Jacobi y Fourier a principios del XIX[5] me parece estéril e infructuosa. Tampoco es nada atrayente la cuestión de si se debería matizar entre *matemática aplicada* y *matemática aplicable*. Cuando las matemáticas involucradas son de calidad se pierde toda distinción y lo que las caracteriza es su unidad, su potencia y su universalidad. En una primera aproximación se podría decir que la matemática es buena si sobrevive y es mala si lo más correcto es ignorarla antes que desaparezca de la escena. Obviamente esto es excesivamente vago. Es claro que la noción de buena y mala matemática es casi una cuestión de gusto personal, como lo prueba la provocadora y dificilmente respetable toma de posición de algunos matemáticos relevantes (véase Halmos [82]). En cualquier caso, parece haber un acuerdo común sobre lo que son matemáticas buenas y las que no lo son. Algunos autores se atreven a hacer un listado de los criterios que definen una buena matemática (véase Saari [166]). Yo prefiero mantenerme en una cierta ambigüedad consensuada.

En realidad, la compleja dialéctica entre ciencia pura y ciencia aplicada no se limita al campo de las matemáticas y es uno de los problemas más profundos de la historia científica. De hecho, tal polémica a veces viene enunciada en términos de ciencia *versus* tecnología, reservando a la primera un carácter puro y asignando a la segunda, de manera conceptual, el papel de ciencia aplicada[6].

Volviendo a la calidad como alternativa a esta polémica, es de señalar que ese espíritu congeniador no es nuevo y ya Leonhard Euler, uno de los más grandes “matemáticos aplicados” de la historia, nos decía en 1747 (Euler [56], I.2, pp. 63-63):

> ... ni el autor es perturbado por la autoridad de los más

[5]Véase, por ejemplo, Dieudonné [45].

[6]Aunque la polémica tiene un interés actual (véase, por ejemplo, Sánchez Ron [169]), tiene antecedentes lejanos que se remontan al siglo X. Así nos lo describe el ingeniero árabe Al-Farabi (870-950) en el artículo III de su tratado [1] en el que se refiere a la difícil transición entre teoría y práctica.

> grandes matemáticos cuando declaran algunas veces que la teoría de números es sin embargo inútil y no merece investigación. En primer lugar, el conocimiento es siempre bueno en sí mismo, incluso si parece alejado del uso común. En segundo lugar, todos los aspectos de la verdad que son accesibles a nuestra mente están tan cerca unos de otros que no deberíamos rechazar ni siquiera los que no tengan utilidad. Además, incluso si la demostración de alguna proposición no parece tener un uso inmediato, sucede con frecuencia que el método por el que ese problema ha sido resuelto abre el camino al descubrimiento de resultados más útiles.

Euler conocía mejor que nadie de su tiempo la íntima relación entre la "inútil" teoría de números y el cálculo de perturbaciones para el estudio de las trayectorias de los planetas[7]. El ejemplo de Euler no es el único, ha habido, hay y habrá casos como el suyo: los más recientes de von Neumann y Wiener son reivindicados por los defensores más radicales de la matemática pura y de la aplicada.

Hubo una época en la que esa pretendida separación entre las llamadas matemáticas puras y aplicadas era ficticia pues los matemáticas cultivaban ambos enfoques, además de otras ciencias. La separación se puede decir que alcanzó su máximo con la irrupción de la matemática más abstracta desarrollada por el grupo Bourbaki aunque algunos, como Auslander y Tolimieri [9], sitúan ese máximo en la época posterior a la Segunda Guerra Mundial y con la selectiva política científica, en especial en el campo de la matemática aplicada, del gobierno de Estados Unidos.

Von Neumann expresaba en [133] su preocupación ante situaciones limite:

> Las ideas matemáticas se originan empíricamente...; una vez que son concebidas, el tema comienza a tener vida propia... Cuando una disciplina matemática se aleja de su origen empírico... se vuelve cada vez más guiado por la estética; si el alejamiento es descomunal, o si se alcanza una gran

[7]Mi profunda admiración por la figura de Euler me fue inculcada, hace ya tiempo, por Alberto Dou, estudioso y traductor de su obra (véase Dou [57]) y por Amable Liñán, para quien Euler es una constante referencia por sus pioneras y profundas aportaciones a la mecánica de fluidos.

> abstracción, el tema matemático está en peligro de degeneración.

Afortunadamente, hoy día ambos enfoques vuelven a tener numerosos puntos en común con un rico intercambio de ideas[8]. Bastiones de la matemática pura están hoy próximos a las aplicaciones y así, a modo de ejemplo, la geometría no conmutatíva tiene importantes conexiones con la mecánica cuántica y con la física del estado sólido, la teoría de nudos en topología está siendo aplicada en electromagnetismo, mecánica de fluidos, la teoría cuántica de campos y la genética molecular, etc. Lejos de haber arrinconado al *mundo de las matemáticas*, los modernos y potentes ordenadores las han enriquecido del espíritu de las *matemáticas del mundo* al hacer aplicables a problemas prácticos técnicas matemáticas de gran sofisticación.

3.3. Un adelantado a su tiempo: Arquímedes

> El Universo está escrito en lenguaje matemático.

Esta frase debida a Galileo Galilei (1564-1642)[9] encierra un profundo mensaje que caracteriza desde el Renacimiento el espíritu que anima a las *matemáticas del mundo*. El método galileano se proponía hacer mensurables los fenómenos de la naturaleza dando lugar a una ciencia cuantitativa. Antes que Isaac Newton publicase en 1687 sus *Principia* (Newton [134]) mostrando cómo a partir de unos pocos principios físicos se puede comprender, y a menudo predecir, con sorprendente precisión gran parte del comportamiento de los objetos del Universo, René Descartes había difundido su “sueño” de que la validez universal y absoluta de la matemática podría fundamentar también la totalidad del

[8] Esa interacción aparece perspicazmente observada en el libro de Pollard [148] en el que escribe: “Purifiquemos ahora lo aplicado y apliquemos lo puro..”

[9] La cita exacta es la siguiente: “La filosofía está escrita en ese grandioso libro que está continuamente abierto ante nuestros ojos (lo llamo universo). Pero no se puede descifrar si antes no se comprende el lenguaje y se conocen los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, siendo sus caracteres triángulos, círculos y figuras geométricas. Sin estos medios es humanamente imposible comprender una palabra; sin ellos, deambulamos vanamente por un oscuro laberinto” (Galilei [67], tomo 4, p. 171).

conocimiento[10]. Pero había concepciones subyacentes que procedían de pensadores todavía más antiguos que Galileo y que se remontan a la cultura helenística. Permitidme que centre mi atención, por unos instantes, en la figura de Arquímedes como uno de los precursores de esas *matemáticas del mundo*, protagonismo que quizá no esté siempre suficientemente realzado en las divulgaciones de distinguidos especialistas de ese tipo de matemáticas[11].

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) representa el espíritu adelantado de una matemática no necesariamente abstracta. Si bien cabe una natural cautela ante la multitud de leyendas que se le asocian, esas cautelas quedan disipadas ante los abundantes testimonios documentados de sus escritos que han llegado hasta nuestros días, consagrándole como uno de los científicos más originales de la Antigüedad. La universalización del idioma griego contribuía al intercambio y difusión de los progresos científicos, siendo glosada su obra por matemáticos de Alejandría de los siglos III y IV como Herón, Pappus o Theón[12]. La Constantinopla de los siglos VI al X ya le profesaba admiración y así León de Tesalónica reunió, en el siglo IX, todas las obras de Arquímedes accesibles, procurando el manuscrito que más tarde utilizaría G. de Moerbeke, en 1269, para transcribirlo al latín. Otras dos fuentes de diversa procedencia, una de ellas transmitida por la cultura árabe, completan nuestro conocimiento actual sobre la obra de Arquímedes extendida a temas como aritmética, geometría, astronomía, óptica y mecánica.

Para enmarcar adecuadamente su originalidad es preciso situarle en el contexto de su época. Los grandes matemáticos griegos anteriores a él, Tales, Pitágoras, Eudoxo, Euclides y tantos otros, concebían la matemática como una entidad abstracta, una manera de estudiar el orden majestuoso del Universo, pero nada más. Eran intelectuales exquisitos que despreciaban las aplicaciones prácticas y pensaban que ésas eran “cosas de mercaderes y esclavos”. Arquímedes compartía en no pequeña medida esa actitud pero no rehusó aplicar sus conocimientos matemáticos a cuestiones prácticas concretas. Por sus contribuciones a la estática y a la hidrostática puede ser considerado como uno de los fundadores de la física matemática. Abordó cuestiones típicas de la in-

[10] Véase Descartes [43] y el ensayo de Davis y Hersh [38].

[11] Esto contrasta con los numerosos estudios monográficos existentes sobre Arquímedes: Babini [12], Claggett[28], Dijksterhuis [46], Heiberg [86], Mugler [127] y Plutarco, Vitruvio y Tzetzes [146], Schneider [172] entre otros.

[12] No obstante, Arquímedes escribía en el dialecto dórico.

geniería helenística como la construcción de maquinaria y artefactos bélicos pero también de obras de utilidad pública, como sistemas de poleas compuestas o aparatos de extracción de agua (su célebre *tornillo sin fin*), diseño de planetarios y esferas celestes, etc. Curiosamente, su actitud frente a sus propias invenciones mecánicas ha sido tema de debate. Mientras hombres de letras como Plutarco nos lo presentan acorde con la mentalidad de los ingenieros helénicos como Ctesibio, Filón o Herón, y aun romanos como Vitrubio, valorando más la componente teórica de sus ingenios por encima de su posible rendimiento, para otros como Pappus, Gémino o Proclo, Arquímedes abanderaba el uso de nociones mecánicas incluso para abordar cuestiones geométricas, práctica censurable desde un punto de vista platónico pero que él catalogaba de "útiles para el uso de la vida".

Arquímedes no despreciaba el mecanismo lógico de Aristóteles pero supo anticiparse a las grandes épocas de la fundamentación de la ciencia moderna, matemáticas, mecánica, física, etc, de los siglos XVI y XVII pese a carecer de las herramientas del *Cálculo Diferencial* e *Integral* de Newton y Leibnitz. Utilizando de modo ingenioso la teoría de las proporciones calculó áreas y volúmenes de muchas formas geométricas distintas como la esfera, parábolas y espirales. Hoy día esos cálculos son pequeños ejercicios del *Cálculo Integral* pero él se anticipaba en casi diecinueve siglos a la introducción del *Cálculo Infinitesimal* (uno de los mayores progresos de la Humanidad en palabras de Dieudonné [45]).

En su tratado *El Método*, título abreviado de otro más largo pero quizás más significativo *Del método relativo a los teoremas mecánicos* (Arquímedes [5]), desarrolló el tratamiento de cuestiones geométricas con ayuda de consideraciones mecánicas. Se trata de una comunicación a Eratóstenes (280-192 a.C.), matemático y bibliotecario de Alejandría. La obra es también un documento sociológico de lo que podía ser la comunicación de investigaciones avanzadas entre colegas eminentes en aquella época[13]. Su gran originalidad, su genialidad, es haber mostrado que al lado de hallazgos puramente fortuitos había matemáticas, filones de inventiva que se podían y debían explotar racionalmente. Acompañando a esa heterodoxia inventiva mantenía que ésta fuese culminada mediante el método demostrativo de Pitágoras, Platón y Euclides. Las *matemáticas del mundo* no debían ser matemáticas de inferior calidad y

[13]Arquímedes tenía por costumbre enviar primero únicamente los enunciados de sus teoremas, invitando a su interlocutor a encontrar su demostración. En un segundo correo solía enviar sus propias demostraciones.

belleza a las del *mundo de las matemáticas.*

Su método inventivo es doble: para empezar introduce las consideraciones mecánicas, lejos de eliminarlas una vez hallada la solución como exigía Platón y la ciencia que afirmaba que las únicas construcciones claras de su tiempo eran las de la regla y el compás. Después, Arquímedes acude a la teoría de las razones o proporciones, a la demostración indirecta por reducción al absurdo, y a una metodología de aproximación, o acotación, que le permite obtener equivalencias métricas entre construcciones geométricas y que en el siglo XVII fue denominado "método de exhaución". Algunos han querido ver en ese método una versión primigenia de la operación de paso al límite del *Calculo Infinitesimal*.

Pero lo que consagró a Arquímedes cómo el más moderno de los sabios griegos, el anunciador de Galileo, de Descartes y de nuestros físicos, fue el haber hecho de la mecánica una ciencia demostrativa. En Aristóteles y sus antecesores la mecánica se reducía a ideas vagas sobre la clasificación de movimientos en circulares y rectilíneos conteniendo con frecuencia argumentos metafísicos. Es el primer éxito de la matematización de la experiencia, fuera de argumentaciones lejanas y vagas que hayan podido originarse de la aritmética y la geometría. Su escrito *Sobre el equilibrio de los planos* (Arquímedes [6]), es el tratado científico de estática más antiguo que se conoce. Analizó el *cálculo baricéntrico,* es decir, la determinación de los centros de gravedad y las condiciones de equilibrio de cuerpos geométricos; en realidad de algunas figuras geométricas planas. Al estilo de Euclides, comienza por plantear *los postulados*, que juegan un papel similar al de las hipótesis en las demostraciones. La *ley de la palanca* (proporcionalidad inversa entre pesos y distancias) está ya implícita en el escrito antes citado, por lo que se sospecha que la filosofía natural griega debía estar ya familiarizada con ella. Los postulados de los que parte Arquímedes no son una axiomática pura y simple, sino nacida de la experiencia. No es una abstracción conceptual del espíritu sino una abstracción real que no es más que una estructura natural y también intelectual en una coincidencia, una armonía, una unidad perfecta.

Arquímedes fue, indiscutiblemente, el creador de la hidrostática. Su escrito *Sobre los cuerpos flotantes* (Arquímedes [7]) fundamenta científicamente el equilibrio de los cuerpos sumergidos en líquidos y contiene algunas aplicaciones a un par de sólidos geométricos. Su postulado, "en un fluido todos los cuerpos que se dirigen hacia arriba lo hacen según la vertical trazada por su centro de gravedad”, reduce los problemas de hidrostática a los previamente estudiados sobre estática, si bien ahora interviene otro aspecto: la razón entre las densidades del cuerpo y del fluido. Si la leyenda asocia la *ley de gravitación universal* de Newton a la caída de una célebre manzana, el *principio de flotabilidad de Arquímedes* está también ligado a su aplicación a la indagación de la proporción de oro y de plata en la corona del rey Hierón.

La enorme obra de Arquímedes se completa con otros escritos y con la construcción de legendarios e ingeniosos artefactos, glosados en numerosos estudios biográficos. Si bien Arquímedes ha sido presentado en ellos como prototipo de la síntesis entre la investigación científica y la ingeniería civil, también es cierto que fue un cultivador adelantado de unas *matemáticas del mundo* de una excepcional calidad.

3.4. Partes estructurales

Los objetivos de las matemáticas del mundo no difieren mucho de los que Lions [111] asigna a la *investigación aplicada matemática* (*La Recherche Appliquée Mathematique*)

> ..sus objetivos principales son: la escritura y estudio de modelos matemáticos, la adaptación de los métodos existentes o la creación de herramientas nuevas para realizar el estudio, la elaboración de algoritmos que completen el análisis y permitan visualizar los resultados, validar o motivar las modificaciones de los primeros modelos matemáticos, y contribuir, por último, a la gestión fiable, segura y económica del sistema estudiado.

En la anterior declaración de principios se observa una clara alusión a los diferentes procesos matemáticos que, a mi juicio, caracterizan el proceder actual de las *matemáticas del mundo* a la hora de abordar un problema concreto: *modelización, análisis matemático del modelo, tratamiento numérico, validación, predicción y control.*

Una estructuración como la anterior es necesariamente simplista. Obviamente no hay fronteras estrictas entre cada uno de esos procesos y de hecho, como pondremos de manifiesto más tarde, hay una fuerte interdependencia entre ellos. Contra lo que argumentan ingenuamente algunos autores desde posiciones antagonistas[14], no se trata de la mera aplicación de procedimientos rutinarios previamente establecidos (la falta de calidad se puede dar tanto en el seno de la matemática aplicada como en el de la matemática pura). Como intentaré describir en lo que sigue, puede haber matemáticas de muchos quilates en el seno de cada uno de esos procesos; incluso en los que se suele pensar alejados de la matemática pura.

3.4.1. Sobre los problemas "reales"

La mecánica newtoniana de los siglos XVII y XVIII y sus sorprendentes éxitos en astronomía marcan, quizás, el comienzo de una época en la que los descubrimientos matemáticos impactan a la sociedad de

[14]Véase, por ejemplo, Davis y Hersh [38] p. 57.

su tiempo. Había transcurrido un largo periodo sin grandes ideas innovadoras desde que los griegos lograran matematizar algunos problemas elementales de la estática, hidrodinámica, óptica y astronomía mediante técnicas geométricas. La admiración por las matemáticas tenía mayoritariamente sus orígenes en el enfoque aristotélico: la matemática aislada de su aplicabilidad, como mero fruto de la *curiosidad del hombre*. En el siglo XVIII las investigaciones sobre la conexión entre matemáticas y física pasa a ser un objetivo fundamental en la mente de matemáticos como Laplace o d'Alembert.

Los enciclopedistas auguraban un efímero porvenir a las matemáticas alejadas de la experiencia. El más radical en su postura, Diderot, llegó a afirmar (véase Diderot [44]):

> A esa ciencia no le quedan más que mercenarios, a quienes concede el pan, y algunos hombres geniales, a los que otorga reconocimiento mucho tiempo después de que su prestigio se haya disipado y de que se haya advertido la inutilidad de sus trabajos.

En descargo de esos achaques hay que reconocer que las matemáticas, incluso en parcelas más implicadas como la física–matemática, apenas tuvieron influencia en las invenciones tecnológicas "útiles" hasta comienzos del siglo XX: las máquinas simples que se remontan a la Antigüedad fueron una excepción aislada y la construcción de la máquina principal que hizo posible la Revolución Industrial, la máquina de vapor, precedió a su entendimiento científico. Incluso el motor de explosión o los primeros aviones nacieron sin una teoría que les sustentase. Ha sido sólo con la aparición de los grandes ordenadores, desde la mitad de nuestro siglo, cuando la matemática se ha hecho indispensable para la tecnología innovadora. Ha habido que esperar, pues, un largo tiempo para que el punto de vista de Diderot quedase totalmente desarmado.

El lenguaje matemático en el que, según Galileo, está escrito el Universo tiene una lectura más próxima en las ciencias naturales que en las sociales. No es, pues, extraño que la mayor parte de los problemas que abordan las *matemáticas del mundo* tengan una clara conexión con las ciencias naturales. Es curioso observar que el lenguaje matemático es más sencillo en esas ciencias que en las ciencias sociales y que el prestigio y el rigor alcanzado por el tratamiento matemático decrece con la complejidad de los objetos considerados[15]. A estos efectos se podría estructurar una escala ascendente de complejidad que iría del nivel básico, el propio de las matemáticas que ya poseen ese lenguaje matemático, a otros niveles como son el de la física, la química, la biología y que podría llegar hasta los de la psicología, la economía y la política. Se puede observar un cierto encadenamiento pues no se puede estudiar la política sin pasar por la economía, ni la economía prescindiendo de la psicología, ni la psicología omitiendo la biología, ni la biología sin la química, ni la química sin la física, ni la física sin las matemáticas. La dependencia inversa no existe: las matemáticas si pueden prescindir de la física y de otras ciencias. Además ese orden percibido no es "total" pues no siempre es sencillo, ni posible, encontrar relaciones de dependencia entre dos ciencias (piénsese, por ejemplo, en geología y filología). El ordenador permite la simulación incluso en sistemas complejos y de ahí que el lenguaje matemático tenga cada vez un mayor protagonismo en las ciencias sociales.

Obviamente, es imposible hacer un listado exhaustivo de los numerosos problemas *reales* susceptibles de un tratamiento matemático. En nuestros días tenemos el privilegio de que los organismos públicos nacionales e internacionales explicitan los temas que consideran de máxima prioridad de sus políticas de I+D. Un rico ejemplo son los distintos *Programas Marco de I+D de la Unión Europea.* En la descripción del IV Programa Marco, correspondiente al período 1994/1998, se puede encontrar una clasificación de los retos de mayor interés para la sociedad europea. Una buena parte de los temas se refieren a la llamada "gran ciencia" por requerir una masa crítica. Un excelente ejemplo es el de la fusión termonuclear: un programa que dada su dificultad científica y técnica requiere grandes inversiones tanto económicas como de capital humano que sólo son posibles a escala europea. Otros temas tienen una clara dimensión transnacional, como por ejemplo los relativos a oceanografía o medio ambiente. En otros se potencia la cooperación entre centros de investigación y empresas. Los grandes capítulos que aparecen en su descripción explicitan una serie de prioridades: *Aplicaciones Telemáticas, Tecnologías y Servicios de Comunicaciones Avanzadas, Tecnologías de la Información, Tecnologías de Fabricación y de los Materiales, Agricultura y Pesca, Medio Ambiente* y, por último, *Trans-*

[15]El papel de la economía y de la sociología como motores de la investigación matemática fueron ya objeto de análisis en los discursos de Sixto Rios [161] y Darío Maravall [119].

portes[16]. Esta descripción no coincide exactamente con los temas prioritarios de *Programas Marco* anteriores siendo de interés hacer un estudio comparativo de ellos. Los temas son allí desglosados llegando a concreciones en acciones específicas. Mi reflexión personal es que inmersos en esas descripciones se encuentran numerosos problemas en la frontera de los conocimientos actuales y que puestos en lenguaje matemático pueden ser el origen de nuevas líneas de investigación en esa ciencia. Personalmente he tenido muy positivas experiencias de ello cuando me he visto involucrado en temas de confinamiento magnético en fusión nuclear y en temas de medio ambiente, en especial en climatología.

En épocas pasadas el cometido de señalar los problemas científicos y tecnológicos acuciantes de la época era más propio de las academias científicas, que otorgaban premios científicos a las respuestas más penetrantes a las cuestiones generales enunciadas en las bases de los premios. Es notable observar que ya en tiempos pasados esas instituciones tenían una notable preocupación por temas que hoy día asociamos al medio ambiente y a la sociedad actual. Así, en 1746, la Academia de Berlín propuso a concurso la siguiente cuestión:

> Determinar el orden y la ley que debería seguir el viento si la Tierra estuviese rodeada por todos sus lados por el océano, de manera que se pueda predecir en todo tiempo la velocidad y la derivación del viento en cada punto.

El premio fue otorgado al trabajo *Memoria sobre la causa general de los vientos* de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) quien modelizó la situación y la analizó mediante las técnicas que había introducido para el estudio de la cuerda vibrante. Más tarde, en 1885, la Academia de Ciencias de París sometió a concurso la cuestión de la distribución de calor en la superficie del globo terrestre:

> Encontrar, teóricamente, las leyes por las que el calor solar llega a las diferentes latitudes del globo terrestre a lo largo del año teniendo en cuenta la absorción atmosférica; hacer un estudio comparativo de la distribución de temperaturas dadas por las observaciones.

[16]Un documento altamente valioso conteniendo también numerosa información sobre la política I+D en España es el informe de la Fundación COTEC [66].

En ese caso no es el nombre del ganador (James Croll) el que fija el interés de la cita sino el tema de la convocatoria, de gran actualidad en nuestros días, y que sería mencionado explícitamente en los importantes trabajos de M. Milankovitz de 1920.

La conexión de los matemáticos con problemas nacidos en el seno de la industria se ha multiplicado en los últimos años. Una de las experiencias pioneras en esa dirección nació en Oxford donde un grupo de matemáticos, capitaneado por A. Tayler organizó una serie de reuniones periódicas de discusión, de una semana de duración, con representantes de industrias donde tras presentar éstos sus problemas se procedía a su formulación y tratamiento matemático. Una muestra de algunos problemas industriales tratados y las múltiples técnicas utilizadas se puede encontrar en la monografía Tayler [180]. La experiencia del grupo de Oxford fue exportada a Estados Unidos por Avner Friedman quien, al frente del *Institute for Mathematics and its Applications* (IMA) de la Universidad de Minnesota, desarrolló ese tipo de reuniones publicando sus resultados en una serie de volúmenes (véase, por ejemplo, el primero de ellos: Friedman [64]). En Europa se formó el ECMI, *European Consortium for Mathematics in Industry* que, aglutinando a centros de numerosos países, desarrolla una importante actividad: edición de publicaciones, organización de estancias en laboratorios de I+D de industrias privadas, reuniones, etc. La formación de matemáticos con una especial vocación hacia la industria ha dado lugar a titulaciones especiales tanto en Europa (titulación europea de postgrado del ECMI), como en Estados Unidos (iniciativa del IMA[17] y otras universidades americanas). Esta dirección de la matemática hacia la industria es ya un hecho bien acuñado. Hasta el punto que las sociedades de matemática aplicada de Estados Unidos, Francia, Italia y Japón, han incorporado la I de industrial entre sus siglas (SIAM, SMAI, SIMAI y JSMAI respectivamente)[18].

Además de los problemas prioritarios que puedan ser propuestos desde instituciones oficiales o privadas siempre habrá que contar con la fuente inagotable de problemas que son fruto de la curiosidad, de la

[17]Fruto de esa experiencia es el libro de texto de Avner Friedman y Walter Littman [65].

[18]Cuando se creó la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) en 1991, no se procedió de igual manera ante la carencia de colaboraciones entre los matemáticos y la industria española. Hoy día la situación ya es otra aunque aún haya mucho por hacer.

intuición o de consideraciones puramente estéticas.

Uno de los matemáticos más valiosos de nuestro siglo, Heinz Hopf, llegó a afirmar:

> La matemática es el arte de hallar los problemas que uno puede resolver.

Esto es especialmente relevante por venir de un matemático como él que abordó numerosos problemas que en su tiempo parecieron particulares pero que se mostraron fundamentales años más tarde. Los trabajos de Hopf, al considerar esos problemas, abrieron nuevos campos inexplorados hasta entonces con conexiones insospechadas que muestran, una vez más, la unidad de las matemáticas[19].

La libertad ante tal cúmulo de problemas nos lleva a afirmar que una de las características fundamentales que definen la obra de un científico reside ya en la propia elección de los temas que aborda.

3.4.2. Sobre el arte de modelizar

La primera de las etapas a la hora de abordar un problema "real" la constituye la *modelización matemática.* Un modelo no es más que un conjunto de relaciones utilizado para representar y estudiar de forma simple y comprensible un objeto o fenómeno de la realidad.

La experiencia muestra que obtener un modelo "correcto", en los términos de los que nos ocuparemos más tarde, no es siempre una tarea fácil y de hecho puede equivaler a haber resuelto ya más de la mitad del problema. Existen algunos recursos para afrontar esa difícil tarea pero su carácter constructivo involucra inevitablemente otras componentes ligadas a la experiencia, intuición y sentido estético. Estas son quizás las razones por la que numerosos autores se refieren a ese proceso cómo "el arte de modelizar".

No es difícil encontrar antecedentes del proceso de modelización acudiendo a análisis antropológicos. Aristóteles [4] afirmaba ya:

> El hombre es el más mimético de todos los animales y gracias a ese mimetismo adquiere todos sus conocimientos.

[19]Véase la nota biográfica [41].

Esta capacidad le lleva a intentar repetir con su cuerpo y en su mente el mundo exterior. Su oído y su garganta le permiten reproducir los sonidos. La dualidad repetición-retroacción es uno de los fundamentos del aprendizaje individual que se extiende más tarde por la dimensión social del hombre. Perrier [144] sugiere ver la capacidad innata de simulación del mundo exterior en las admirables danzas de caza de los pueblos llamados primitivos. En ellas ya hay una racionalización del proceso de extrapolación-generalización. Apunta este autor que uno de los problemas abiertos de la antropología (de la sociología y de la psicología) radica en justificar la "visión anticipada" de los hechos que con frecuencia se presenta en la conducta humana una vez que ha tomado conciencia de una situación.

La pintura y la escultura son artes en los que no es difícil ver actitudes con muchos puntos comunes con las que se desarrollan en la modelización. ¿Cómo no ver en los impresionantemente bellos y precisos dibujos de los remolinos de agua de Leonardo da Vinci la esencia del espíritu científico observando una compleja realidad e intentando reproducirla para así comprenderla mejor? ¿Cómo no ver en la sonrisa de su Gioconda, o en tantas obras del Greco y de Goya, la representación materializada de un mundo interior inmaterial? ¿Cómo no asombrarse ante la genialidad de Velázquez para captar el sentido de la luz?

Semánticamente la palabra "modelo" tiene una rica acepción. El Diccionario de la Real Academia de la Lengua, en su vigésima primera edición, le asigna hasta diez significados[20]. Además del que otorga al ámbito propiamente matemático, me parece especialmente indicativo otro de ellos, el cuarto, en el que se le da el significado de "representación en pequeño de una cosa". Esta acepción está más cercana de los llamados *modelos icónicos* de los que los mapas, las fotografías y las maquetas son excelentes ejemplos. El modelo matemático también se puede entender unido a esa idea de cambio de escala, aunque la escala aludida no sea la espacial sino la de la abstracción[21]. Pero además la modelización debe completarse con el proceso de la experimentación, para lo que es de gran utilidad la maqueta a pequeña escala. Volveremos

[20]Alberto Dou me hizo fijar la atención en cómo la palabra "modelo" puede tener acepciones bien diferentes a la que utilizamos en el ámbito matemático. Así, por ejemplo, en pintura, el modelo es la persona que posa y nó el cuadro en sí mismo que reproduce la realidad. Algo parecido ocurre también en el ámbito de la confección. Ambos casos corresponden a la décima acepción del Diccionario.

[21]Un detallado y muy documentado análisis de la relación entre el modelo matemático y otros usos de esa palabra puede encontrarse en la monografía de Aris [8].

sobre esa relación más tarde.

La modelización de una compleja realidad no ha pasado siempre por el uso de la matemática. La historia pasada nos ha brindado otros numerosos ejemplos: son los llamados *modelos analógicos*, principalmente los *modelos mecánicos* y *los modelos eléctricos*. Entre los primeros son de resaltar las máquinas de calcular: tanto *la Pascalina* de Blas Pascal (1623-1662) como la máquina de Leibniz y las primeras máquinas de Charles Babbage(1792-1871) y Ada Lovelace, hija de Lord Byron. Desde finales del siglo XIX el modelo eléctrico reemplazó al mecánico[22][23].

Durante siglos, las simplificaciones necesarias para que la respuesta matemática obtenida del modelo fuera relevante eran descorazonadoras. Las llamadas “soluciones explícitas” sólo eran posibles en casos muy particulares. Los cálculos requerían mucho trabajo y tiempo. La aparición de los ordenadores cambió drásticamente el panorama. Aún así, es justo recordar los grandes éxitos de la modelización en tiempos anteriores a los de los ordenadores. Uno de mis preferidos es el de John Couch Adams y Urbain Le Verrier cuando desde sus despachos descubrieron, en 1846, un nuevo planeta: Neptuno. Calculando su trayectoria a partir de las perturbaciones de la trayectoria de Urano, realizaron una hazaña científica que se inscribió para siempre en los anales de la historia de la ciencia.

El proceso de modelización es de naturaleza pluridisciplinar pues requiere un conocimiento del objeto a modelizar y una cierta experiencia en las técnicas matemáticas que hacen coherente un modelo. Con frecuencia este proceso es el fruto de la colaboración de matemáticos con otros científicos. El proceso comienza por detectar las variables a determinar y aquellas otras magnitudes que se puede suponer como datos. Los principios básicos de las distintas ciencias conducen a una serie de ecuaciones (en la mayoría de los casos diferenciales) así como a unas condiciones auxiliares (información de lo que sucede en un tiempo inicial, en el contorno del dominio espacial donde se estudia el fenómeno, etc).

La modelización puede necesitar grandes dosis creativas y ha mar-

[22]Véanse los comentarios de Lions [111] a propósito de un trabajo de Vito Volterra (1860-1940) en el que utiliza un modelo eléctrico, basado en las ecuaciones de Maxwell, para estudiar la temperatura en el interior de una montaña. Véanse también los comentarios sobre máquinas analógicas en el discurso de Puig Adam [153].

[23]En ese campo se enmarcan las valiosas aportaciones, internacionalmente reconocidas, de Leonardo Torres Quevedo, quien dedicó su discurso de ingreso en esta Real Academia, [185], a una exposición sobre las *maquinas algébricas*.

cado grandes avances de la ciencia. Es el arte de hallar el lenguaje matemático subyacente en el universo que nos preconizaba Galileo. Uno de los grandes maestros matemáticos de este siglo, James Serrin, refiriendose en [174] a su disconformidad con que todo proceso de modelización sea entendido como algo “pedestre” o de pobre contenido intelectual, escribía:

> ¿Se limita a ese mero tipo de modelización el establecimiento por Newton de sus leyes, o los descubrimientos de la *teoría de campos para medios deformables* de Euler y Cauchy, o la invención de *geometrías no Euclideas,* o de la *teoría de la relatividad* ? Estos descubrimientos son más bien aplicaciones capitales del pensamiento matemático orientado a problemas físicos,..., y forman parte central de nuestra herencia matemática.

Más tarde me referiré a otros ejemplos en los que la modelización alcanza una gran finura matemática.

El modelo matemático se introduce como “prototipo”, bajo unas simplificaciones necesarias. Según la naturaleza de las simplificaciones supuestas se puede obtener una familia de modelos susceptibles de ser ordenados jerarquicamente según su distinta complejidad. Esa jerarquía aparece, por ejemplo, si al estudiar una variable física, como la temperatura de un medio continuo, la suponemos *homogénea espacialmente,* es decir constante para todos los puntos, o por el contrario la suponemos *distribuida espacialmente,* es decir variando de un punto a otro del medio continuo. En el primer caso obtendremos un modelo dado por una *ecuación diferencial ordinaria*; en el segundo el modelo sera notablemente más complicado por contener *una ecuación en derivadas parciales*[24]. A su vez, esos modelos admiten varias subjerarquías según que nos interese la evolución en el tiempo o no. Los primeros son denominados *modelos en régimen transitorio*, o *modelos de evolución*, y

[24]Sobre ecuaciones diferenciales trataron los discursos de Terradas [181] y Dou [47]. Modelos involucrando *ecuaciones integro-diferenciales, ecuaciones con retardo y* otras *ecuaciones funcionales* también aparecen con gran frecuencia en la práctica (véase, por ejemplo, Navarro [130], Courant y Hilbert [31], Dautray y Lions [36] y sus referencias). También es de reseñar que la presencia simultánea de variables homogéneas y distribuidas, y por tanto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas con ecuaciones en derivadas parciales, se da en numerosas aplicaciones como, por ejemplo, en *adsorción* (véase Costa [30]).

los segundos *modelos de equilibrio,* o *modelos estacionarios.* Todos los modelos aludidos anteriormente son llamados *modelos continuos* dado que las incógnitas en estudio están definidas con continuidad. Su aproximación numérica conduce inevitablemente a *modelos discretos* dados por *ecuaciones en diferencias.* Otras veces los modelos discretos aparecen ya en la formulación natural del problema, sin conexión alguna con ningún modelo continuo[25].

Los modelos antes mencionados responden a un cierto tipo genérico. Son los llamados *modelos directos* pues su planteamiento presupone conocidos todos los datos del problema y su solución es la incógnita a determinar. Por el contrario, en los llamados *problemas inversos*, los verdaderos objetos de investigación son algunos de los datos auxiliares (parámetros, condiciones iniciales, etc), presuponiéndose conocidas algunas informaciones adicionales sobre la solución. Este tipo de problemas posee numerosas aplicaciones que van desde la explotación petrolífera y minera a la obtención de técnicas de diagnóstico médico, que reemplazan intervenciones quirúrgicas peligrosas, tales como, por ejemplo, la tomografía por resonancia magnética nuclear, que permite obtener imágenes de secciones del cerebro, o de otros órganos del cuerpo, a partir de medidas externas, etc.

Otra importante subjerarquía, sin duda diferenciando drásticamente la naturaleza de las técnicas que se han de emplear en el tratamiento posterior, se refiere a si la formulación parte de un punto de vista *determinista* o por el contrario se toleran elementos fortuitos, provenientes del azar. Esta última situación lleva a los *modelos estocásticos,* del tipo del movimiento Browniano, en los que la huella de Markov, y más recientemente de Ito, Dynkin y tantos otros, ha marcado su desarrollo hasta nuestros días. Mis reflexiones son fruto de mi actividad en el campo de los fenómenos deterministas y por tanto no estarán inspiradas en ese otro tipo de modelos, ni tampoco en *modelos estadísticos* en los que la información obtenida a través de los datos accesibles es utilizada como valores de una variable aleatoria para analizar la función de densidad u otras nociones asociadas[26][27].

[25]Véase, por ejemplo Ortega y Rheinboldt [138].

[26]Una referencia reciente y de gran claridad es la monografía de Sixto Rios [162].

[27]Existen numerosas conexiones entre los modelos estocásticos y deterministas. Por ejemplo, las soluciónes de ciertas ecuaciones en derivadas parciales pueden ser entendidas como soluciones de problemas estocásticos construidos adecuadamente. Véase, por ejemplo, Fleming y Rishel [62] y Bensoussan y Lions [18].

Pero volvamos a la descripción genérica de la tarea de la modelización. El modelo nunca es “idéntico” al objeto en consideración, no podremos obtener de él todas las propiedades y particularidades del objeto de partida. Al modelizarlo se obtiene su reflejo aproximado, por lo que las consecuencias derivadas sólo pueden tener un valor aproximativo. La exactitud de esas consecuencias depende, íntimamente, de las simplificaciones realizadas inicialmente y ha de ser necesariamente contrastada: es la etapa de *validación* a la que me referiré más tarde.

Las simplificaciones introducidas son claramente función de los objetivos que se desea alcanzar. La modelización tiene, pues, una fuerte interacción con las etapas de validación, predicción, diseño y control que desarrollaremos en otras secciones. La jerarquía de los modelos que aproximan a un objeto, o a un fenómeno, suele partir de la “sana” filosofía que aconseja proceder de lo sencillo a lo complicado. La necesidad de revisar un modelo inicialmente aceptado puede venir motivada por diferentes razones: las respuestas obtenidas de modelos sencillos pueden ser extremadamente vagas y se desean respuestas más precisas, o bien porque se posea una nueva información sobre el objeto y ésta no se derive del modelo inicial, o bien porque se tenga interés en ciertos valores de los parámetros que queden fuera de la aplicabilidad del modelo de partida, etc. La construcción de un nuevo modelo suele apoyarse en la experiencia obtenida del modelo jerárquicamente anterior y, a menudo, el proceso de desarrollo y mejora del modelo se repite varias veces. Jerarquías de modelos se presentan en numerosos campos de la ciencia[28].

La revisión de un modelo no tiene por qué ir, necesariamente, en la dirección de aumentar su complejidad o aumentar el número de parámetros y variables. A veces el modelo de partida es muy complejo y lo que interesa es obtener alguna información orientadora, aunque sea al precio de considerar únicamente algún caso particular relevante que corresponda a una cierta simplificación.

Una primera herramienta para “despreciar” alguno de los términos que aparecen en una complicada ecuación es el análisis de los *ordenes de magnitud* de cada uno de los términos en función de las *unidades características* que aparecen en el problema. Para ello se introducen

[28]Exposiciones detalladas ilustrando esa filosofía se pueden encontrar, por ejemplo, en Aris [8], Denn [42] y Liñán [107], quienes lo ilustran mediante problemas de ingeniería química y de combustión, y Henderson-Sellers y McGuffie [87], quienes abordan diversos modelos climáticos.

cambios de variables que pasan el problema a su *formulación adimensional* haciendo aparecer una serie de parámetros[29]. De esta manera ya no hablaremos de un medio concreto asociado a una geometría particular sino de un caso universal que, recuperadas las magnitudes con sus dimensiones, lleva a una aplicación concreta. Este es el principio de la experimentación con maquetas. El *análisis dimensional*, cuyos orígenes se remontan ya a J. B. Fourier, conduce a la búsqueda de *soluciones autosemejantes*, válidas frente a adecuados cambios de escala en todas las magnitudes. Dicha teoría tiene importantes conexiones con la *teoría de grupos*[30].

La idea de simplificar un modelo complejo es también el principio que inspira, por ejemplo, la *teoría de la capa límite* en el estudio de un fluido viscoso al encontrar un obstáculo[31]. Las ecuaciones de partida son las de Navier-Stokes, pero sólo cuando se hacen adecuadas hipótesis simplificadoras, en términos de las escalas del obstáculo y la dirección del flujo, se puede obtener un modelo que dé luz a este complicado fenómeno. Otro tanto sucede con el modelo de *aguas poco profundas* de Saint-Venant (1797-1886) y muchos otros *submodelos* del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes[32].

Otro género de problemas, en el que el reduccionismo es fundamental, de gran relevancia actual, tanto por sus aplicaciones como por la riqueza de las técnicas matemáticas desarrolladas, nace de la conexión entre *fenómenos microscópicos y macroscópicos*. Problemas de esta naturaleza aparecen en el estudio de "nuevos materiales" (los llamados *materiales compuestos*) de gran interés por sus propiedades elásticas, térmicas, magnéticas y acústicas[33]; en filtración de fluidos en medios porosos, etc. De nuevo, el proceso de modelización dista de ser una operación rutinaria. Lo que ahora se pretende obtener son unas *leyes homogeneizadas* para un objeto "virtual", que por un lado tengan en cuenta las características del enorme número de sus componentes elementales pero que sea "manejable" y no precise distinguir entre los distintos puntos del objeto global. Las técnicas empleadas en estos proce-

[29] En mecánica de fluidos estos parámetros llevan los nombres de sus descubridores; son los números de Reynolds, Strouhal, Froude, Mach, Nusselt, Prandtl, etc. Véase, por ejemplo, las exposiciones de Millán [124], Liñán [107] y García Velarde [72].

[30] Entre las muchas referencias posibles son dignas de mención las de Palacios [140] y Barenblatt [14].

[31] Véase, por ejemplo, Schlichting [171].

[32] Véase, por ejemplo, Millán [124].

[33] Véase, por ejemplo, Alario [2].

sos, tales como las de *homogeneización* (o desarrollos “en dos escalas”), *de promedios* y otras, forman parte del llamado *análisis asintótico:* el número de componentes es tan elevado que la modelización se realiza suponiendo que tal número crece hasta infinito[34].

La formulación de las ecuaciones de un modelo suele ser fruto de expresar las leyes “físicas” de conservación (o de balance) en términos de las incógnitas del problema. Pero con frecuencia esas leyes no bastan para formular el número suficiente de ecuaciones que requieren las incógnitas del problema. Esto, lejos de ser un grave inconveniente, es coherente con el hecho de que esas leyes son aplicables a objetos o fenómenos de una gran heterogeneidad. Se ha de acudir, entonces, a formular unas *relaciones constitutivas* que especificando las características del objeto modelado completen el número de ecuaciones. Esas relaciones constitutivas suelen introducir una jerarquía de modelos según su relativa sofisticación y son uno de los orígenes más frecuentes de la presencia de términos no lineales en los modelos[35].

El proceso de modelización culmina cuando el modelo contiene “implícitamente” la información buscada: algo que se dilucida mediante otro tipo de técnicas matemáticas a las que me referiré en la siguiente sección.

Una clase de modelos a los que he dedicado una buena parte de mi tiempo desde mis inicios en la investigación, aunque haya abordado también otro tipo de cuestiones, son los llamados *problemas de frontera libre.* Se trata de unos modelos, principalmente dados por ecuaciones en derivadas parciales, en los que aparecen unas curvas o superficies cuya localización es desconocida a priori y que separan geométricamente regiones con diferentes propiedades. El ejemplo más típico es el que corresponde a la solidificación del agua o al derretimiento del hielo: es el llamado *problema de Stefan*. La separaración entre hielo y agua no se puede prefijar a priori y genera una superficie, *una frontera libre*, cambiante durante el proceso. Problemas de frontera libre aparecen de manera natural en la formulación matemática de numerosos problemas de la ciencia y de la tecnología[36]. Por citar sólo algunos de ellos nos

[34]Entre las muchas referencias son relevantes las monografías de Bensoussan, Lions y Papanicolau [19], Sanchez-Palencia [170] y Oleinik y otros [135].

[35]Véase, por ejemplo, Galindo [68], así como referencias sobre *fluidos no-Newtonianos, gases politrópicos*, etc.

[36]Para una exposición de los aspectos de modelización de algunos de los problemas de frontera libre más representativos véase el libro de Crank [34].

podríamos referir a problemas relacionados con el tratamiento de materiales (solidificación del acero, crecimiento de cristales, semiconductores, termistores, superconductividad, etc.), problemas planteados en biología (crecimiento de huesos, dispersión difusiva de bacterias, etc), en teoría de la combustión y otros problemas de reacción-difusión, problemas de la mecánica de fluidos (capa límite, filtración en medios porosos, lubricación, capilaridad, zonas sólidas en fluidos no-Newtonianos, etc), en economía (modelización de opciones, problemas de mercado y de abastecimiento, etc) entre otros.

La formulación matemática de algunos problemas de frontera libre suele requerir expresiones no clásicas tales como las llamadas *inecuaciones variacionales* o las ecuaciones asociadas a *operadores multívocos*[37]

3.4.3. Análisis matemático del modelo

El tratamiento matemático de un modelo pretende deducir de éste una serie de propiedades cuantitativas y cualitativas. En primer lugar, esas propiedades deben justificar, de manera simple, las observaciones y medidas realizadas sobre el "sistema" modelado, ya sea un objeto o un fenómeno. Pero además, y más importante aún, deben conducir a informaciones complementarias prediciendo posibles comportamientos del sistema.

Las importantes limitaciones a la hora de encontrar soluciones explícitas a las ecuaciones de los modelos han estado presentes en las mentes de los matemáticos desde antes de Newton. Una de las principales razones de esas limitaciones, aunque no la única, radica en el carácter *no lineal* de la inmensa mayoría de los modelos relevantes en las aplicaciones.

Relaciones no lineales, en las que *la regla de tres* no es aplicable, aparecen ya en las *leyes de Kepler* sobre el movimiento de los planetas. No lineal es la *ley de gravitación universal* de Newton que conduce a la modelización del movimiento de esos planetas. No lineales son las ecuaciones de Euler o de Navier-Stokes que rigen los movimientos de un fluido. No lineal era la primitiva ecuación de Laplace para encontrar una *superficie de área mínima* o la sometida a una cierta *tensión superficial* o la de la *capilaridad* para la superficie de un fluido en contacto con el aire y las paredes de la vasija que lo contiene. Éste es el caso

[37]Véase, por ejemplo, Duvaut y Lions [50], Brezis [22] y sus referencias.

también de las ecuaciones de Boltzman (1844-1906) y de un incontable número de ecuaciones que brillan con luz propia en *las matemáticas del mundo*.

Tampoco era muy extraño para ellos el hecho de que si las variaciones de las magnitudes modeladas eran pequeñas se podía reemplazar los términos no lineales por otros lineales, obteniendose respuestas satisfactorias. El *proceso de linealización* es bien antiguo en la historia de las matemáticas.

Hoy día es bien conocido que la estructura lineal de las ecuaciones puede conducir a su resolución mediante fórmulas explícitas de las soluciones. Sin embargo conviene dar el peso que se merece a esta afirmación. En primer lugar, tal afirmación se suele limitar al caso de coeficientes constantes y así existen numerosos casos de ecuaciones lineales aparentemente "sencillas", con coeficientes dados por funciones muy regulares y que no admiten, no ya soluciones explícitas, sino solución alguna.

Otra limitación para encontrar esas fórmulas deseadas aparece en el caso de las ecuaciones en derivadas parciales lineales. Los casos de soluciones explícitas se suelen limitar a cuando están planteadas sobre dominios espaciales muy particulares con propiedades geométricas muy favorables tales como, por ejemplo, simetría esférica o cilíndrica. La estructura particular de las soluciones explícitas suele conducir a ecuaciones diferenciales ordinarias que llevan los nombres de los importantes matemáticos que las estudiaron. Y así las ecuaciones de Euler, Bernoulli, Lagrange, Legendre, Bessel, Hermite, Darboux, entre otros, configuran un importante muestrario de los resultados de una época.

El comienzo de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias estuvo unido a la búsqueda de la "solución general por cuadraturas", de lo que se ocuparon Euler, Ricatti, Lagrange, d'Alembert y muchos otros. El desarrollo de la teoría de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes tuvo una gran influencia en el del álgebra lineal. Un resultado que contenía un importante mensaje premonitorio sobre las limitaciones de ese modo de enfrentarse a las ecuaciones vino de Liouville, quien, en 1841, mostró que mediante un sencillo cambio de variable las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (las más relevantes en las aplicaciones) se transformaban en otras no lineales, denominadas de Ricatti, que, en general, no podían ser resueltas por "cuadraturas".

El caso de ecuaciones en derivadas parciales se presentaba aún más enrevesado. Limitándonos al caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, las pocas soluciones exactas encontradas sólo respondían a situaciones muy específicas: condiciones de contorno con datos constantes, datos iniciales con simetría esférica o cilíndrica, etc.

El sentimiento de incapacidad con el que se enfrentaban los científicos a la resolución de los modelos queda muy bien descrito en un pasaje de una obra que Maxwell catalogó de gran "poema matemático". Me refiero a la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier[38]. En 1822 Fourier escribía:

> Las ecuaciones generales de la propagación del calor están escritas en diferenciales parciales y aunque su forma sea muy simple los métodos conocidos no suministran ningún medio general para integrarlas; no se podrá deducir, pues, los valores de las temperaturas después de un tiempo determinado. Esta interpretación numérica de los resultados de cálculo es sin embargo necesaria; es un grado de perfección que sería muy importante alcanzar en todas las aplicaciones del análisis a las ciencias naturales. Se puede decir que, en tanto no se haya obtenido las soluciones, éstas permanecen incompletas o inútiles y que la verdad que se intenta descubrir no está menos oculta en las fórmulas del análisis de lo que lo está la propia cuestión física.

Una de las grandes aportaciones de Fourier fue renunciar a la búsqueda de soluciones explícitas y dirigir sus pasos hacia caminos entonces poco menos que inexplorados. La expresión de la solución como una serie infinita de términos, dados por soluciones exactas correspondientes a otros datos que aproximaban a los considerados, abrió una multitud de cuestiones que configuran, hoy día, una buena parte de la matemática de más alta calidad y que son el fundamento de la aproximación numérica imprescindible para que los potentes ordenadores arrojen respuestas cuantitativas. Entre otros aspectos, Fourier otorgó gran protagonismo al estudio de las autofunciones (*los armónicos*) del problema: era el punto de partida del *análisis espectral* y de sus innumerables aplicaciones en la ciencia y en la tecnología[39].

El mundo de las ecuaciones no lineales era apenas abordado por aterrador. En el campo de la ecuaciones en derivadas parciales sólo un

[38] Tomado de Lions [111].

[39] Véase, por ejemplo, Guzmán [77].

genio de la talla de Euler se había atrevido a enfrentarse a ese tipo de dificultades. Sus estudios, sobre la ecuación de los fluidos no viscosos que lleva su nombre, son de un valor inigualable y más propio de un científico de nuestros días transportado, mediante alguna "máquina del tiempo" más de doscientos años atrás.

La entrada en escena, a mediados de este siglo, de los potentes ordenadores abre unas posibilidades impensables para aquellos matemáticos gloriosos. Las informaciones cuantitativas, tan soñadas por Fourier, ya están al alcance de nuestra mano. Hasta incluso para modelos no lineales sofisticados, para dominios espaciales prácticamente arbitrarios y para datos bien lejos de necesitar las hipótesis requeridas hasta hace poco tiempo. Pero todo esto no se obtiene gratis. Hacen falta algoritmos que guíen al ordenador, y esos algoritmos son sólo ilusiones, "castillos en el aire", si no se tiene la certeza de que nuestro modelo admite solución.

El capítulo de la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales no posee una sana reputación entre los ingenieros o los científicos que cultivan otras disciplinas. En honor a la verdad, es algo bien ganado a pulso, pues numerosos especialistas de épocas pasadas, e incluso recientes, han visto en este tipo de resultados un mundo sin fin en el que ninguna otra respuesta matemática podía hacerle sombra. Esto obviamente no es así si lo que uno tiene en mente es *una matemática del mundo* en conexión con el exterior al *mundo de las matemáticas.* En todo caso, es justo "dar al César lo que es del César". Si bien los teoremas de existencia de soluciones no son más que la primera de las muchas etapas que debe acarrear el tratamiento matemático de un modelo, es también obvio que un teorema demostrando la no existencia de soluciones para una ecuación representa su "lápida mortuoria", al menos para el rango de valores de los parámetros y exponentes de los términos no lineales para el que no hay existencia de soluciones. Lo que quizás ignoren muchos de los ingenieros y científicos a los que me he referido anteriormente, aunque me consta que no todos, es que existen muchas ecuaciones, con aparencia inocente, para las que se conoce que no admiten solución. Una gran parte de esas ecuaciones corresponden a ciertas elecciones particulares de los parámetros, de los exponentes de los términos no lineales, de las condiciones de contorno o de las condiciones iniciales, en las ecuaciones genéricas que aparecen en problemas relevantes en las aplicaciones tales como combustión o fusión nuclear, por sólo citar dos de ellas.

Pero, ¿hay un único sentido para asignar la palabra solución a una ecuación? Es muy indicativo que habiendo comenzado esta vieja polémica a mediados del siglo XVIII tenga aún una vibrante actualidad. En 1747, d'Alembert había deducido la *ecuación de la cuerda vibrante:* la que hoy día es considerada como la ecuación lineal hiperbólica por excelencia. Aunque también obtuvo una fórmula que representaba su solución general, sería Euler quien hallase la que da la solución en términos de la configuración y la velocidad inicial[40]. La fórmula tenía validez incluso para datos iniciales que no fueran lo necesariamente regulares como para que la solución tuviera la mínima "decencia" de la época: tantas derivadas continuas como exige la ecuación. La noción de la hoy día llamada *solución clásica* era la única utilizada en aquellas fechas. Euler mantuvo una postura tolerante estimando que la noción de solución debía abarcar también a toda curva dada por esa fórmula con sólo "que pudiese ser trazada". D'Alembert requería que la solución viniese descrita mediante una fórmula analítica. Daniel Bernoulli intervino con un tercer punto de vista con el que discrepaban Euler y d'Alembert: la solución debía ser representable en forma de series trigonométricas. Esta discusión originó el esclarecimiento de la noción de función, de importancia capital en las matemáticas de hoy día, y el estudio de las condiciones que aseguran la representación de una función en términos de una serie trigonométrica. Esto atrajo la atención de Fourier, Dirichlet y otros grandes matemáticos y condujo al nacimiento no sólo del *análisis armónico* sino también de la *teoría de la medida*, la *teoría de funciones* y la *teoría de conjuntos*. Es quizás esto lo que Dieudonné [45] tenía en mente cuando afirmaba:

> Se puede decir sin duda que son esas nuevas necesidades de la física las que llevaron a los matemáticos a crear una rama nueva de su ciencia, lo que se llama el *análisis funcional*[41].

Los trabajos resaltando las limitaciones de la noción de solución clásica han ocupado un lugar central en el desarrollo de las ecuaciones

[40]Una vez más los descubrimientos de Euler pasarían a la historia con el nombre de otro matemático y así su fórmula no es otra cosa que la popular fórmula de d'Alembert.

[41]Sobre analisis funcional trataron los discursos de Rodriguez-Salinas [164], Valdivia [187] y Jiménez Guerra [97]. Uno de mis textos preferidos sobre esta bella disciplina es el de Brezis [23].

diferenciales en el presente siglo[42][43]. Sin pretender entrar en cuestiones de primacía temporal, se puede decir que el primer trabajo en el que una noción debilitada de solución desbloqueaba un problema de gran relevancia fue el de Jean Leray [106] sobre las ecuaciones de Navier-Stokes[44]. En la escuela soviética, S.L. Sobolev[45] sistematizaba la *noción de derivada débil integrable* de una función integrable y los espacios funcionales generados a través de los espacios L^p de Lebesgue y que hoy llevan su nombre[46]. Además Sobolev estableció importantes desigualdades que mostraban resultados de inmersión continua entre distintos espacios. Sus contribuciones son, hoy día, de uso más frecuente, a la hora de resolver ecuaciones en derivadas parciales, que la impresionante sistematización de la *teoría de distribuciones* por medio de *espacios vectoriales topológicos* realizada por Laurent Schwartz [173] en los años cuarenta y cincuenta.

Otro episodio glorioso de la teoría de soluciones débiles corresponde al modelo de *leyes de conservación* que aparece en conexión con la modelización de la dinámica de gases. Se trata de una ecuación hiperbólica no lineal de primer orden en la que las “perturbaciones” se propagan a través de las características. Es fácil construir datos iniciales, todo lo regulares que se quiera, de manera que las características se corten después de un cierto instante. En ese instante se produce un “choque” y toda función candidata a ser denominada solución ha de ser

[42]Una frase atribuida a D. Hilbert ilumina esa filosofía: “Todo problema del Cálculo de Variaciones tiene una solución, supuesto que la palabra *solución* sea entendida adecuadamente” (citada en el libro de Young [192]).

[43]Philipe Benilan es uno de los matemáticos que más ha contribuido a analizar cómo una adecuada noción debilitada de solución permite la resolución de problemas no lineales que de otra manera no serían resolubles. Entre sus obras se pueden encontrar las nociones de soluciónes débiles, integrales, “buenas” y “mild” para el problema abstracto de Cauchy asociado a operadores no lineales sobre espacios de Banach (véase, por ejemplo, Benilan [17]). Él me educó en ese dominio, por lo que le estaré siempre agradecido.

[44]Leray utilizó la terminología de *soluciones turbulentas.* En la actualidad se les suele denominar *soluciones débiles.*

[45]Véase, por ejemplo, Sobolev [176], una de sus obras maestras, y el elegante y esclarecedor tratamiento de los espacios de Sobolev realizado en Brezis [23].

[46]Existe una polémica sobre el importante papel, frecuentemente ignorado, desempeñado por Morrey en esos años cruciales del nacimiento de la teoría de soluciones débiles de ecuaciones en derivadas parciales (véase, por ejemplo, [126]). Un estudio cuidadoso de los antecedentes históricos debería remontarse hasta los trabajos de Euler y Lagrange cuando cimentaban el Cálculo de Variaciones (véase, por ejemplo, Lutzen [118]).

necesariamente discontinua[47]. Es el “más difícil todavía”: una ecuación formulada en términos de las derivadas de una función desconocida no puede admitir más que soluciones discontinuas y por tanto no derivables (en el sentido habitual que nos enseñaron en nuestra juventud). Además, esa ecuación presenta otras “pesadillas” a las que me referiré más tarde.

No me es posible ni siquiera pergeñar un esbozo de los muchos métodos desarrollados para abordar la existencia de soluciones. Una idea de la enorme variedad de técnicas y resultados lo da el que un objetivo como ese haya ocupado varios volúmenes de obras enciclopédicas como las de Courant y Hilbert [31], Dautray y Lions [36] y Zeidler [194]. Pese a esa multitud de páginas, el campo dista de estar cerrado. En primer lugar, porque aún se carece de respuesta para viejos y muy relevantes modelos como es el caso de sistemas de más de dos ecuaciones de leyes de conservación, sistema compresible de Navier-Stokes[48], etc. Además, la modelización siempre será una fuente inagotable de ecuaciones para las que haya que desarrollar nuevas herramientas.

Una vez mostrado que existe al menos una función que verifica nuestro modelo, al menos en algún sentido adecuado, cabe preguntarse cuántos de esos objetos existen. En realidad, el estudio de la unicidad o multiplicidad de soluciones es un capítulo independiente del de la existencia, pues las técnicas involucradas son de diferente naturaleza. De hecho, en el ámbito de las ecuaciones no lineales, este último estudio no suele admitir métodos generales, siendo necesario analizar las peculiaridades que se presentan en cada ecuación. Esto le da un cierto aire “artesanal” a este capítulo, lo que unido a la frecuente dificultad de la empresa, le convierte en una parcela en la que se han producido valiosas contribuciones matemáticas.

En los problemas de evolución, la unicidad de soluciones suele obedecer a la propia presencia del término de la derivada temporal. Sin embargo hay muchas y notables excepciones. Una de ellas aparece en el caso de la citada ecuación hiperbólica de leyes de conservación. Es fácil observar que si el dato inicial conduce a características que “se abren”, los huecos que dejan pueden ser cubiertos de diferentes maneras conduciendo a una infinidad de soluciones débiles. Como el fenómeno físico está bien determinado, es claro que debemos seleccionar entre esa infinidad de soluciones una sóla que responda a la realidad. Surge así la

[47] Véase, por ejemplo, Lax [105].

[48] Resultados importantes en esta dirección han sido anunciado recientemente por Pierre-Louis Lions. Véanse las referencias detalladas en la monografía [114].

noción de *solución de entropía*, aquella en la que los choques se producen hacia el futuro y que puede ser caracterizada matemáticamente de diversas maneras equivalentes. El trabajo de demostrar que esa noción de solución es la adecuada, cuando los datos iniciales y los términos no lineales de la ecuación son genéricos, ha sido una ardua tarea emprendida por prestigiosos matemáticos y que fue culminada, en 1970, por el recientemente fallecido S.N. Kruzhkov [99] con quien años más tarde tuve el privilegio de colaborar. El proceso de selecionar una adecuada solución débil para el caso de la importante clase de ecuaciones de Hamilton-Jacobi, en cierta forma duales de las leyes de conservación, se debe a Michael G. Crandall y Pierre-Louis Lions [33]. Las soluciones unívocamente determinadas fueron denominadas por ellos *soluciones de viscosidad* por provenir del conocido método de viscosidad evanescente. Su programa es aún más difícil, pues las ecuaciones no están en forma de divergencia y no se puede acudir a la *fórmula de integración por partes* para definir la noción debilitada de solución.

En el caso de ecuaciones de tipo parabólico son pocos los ejemplos de multiplicidad de soluciones. La presencia de términos no lineales sin un mínimo de regularidad en ciertos modelos de combustión y de climatología puede ser responsable de esa carencia de unicidad. La respuesta a la cuestión de la unicidad de soluciones para el caso fundamental del sistema tridimensional de Navier-Stokes para un fluido incompresible no es conocida más que bajo hipótesis muy particulares. Una respuesta general es desconocida aún en nuestros días después de haber sido un problema central durante el presente siglo.

La multiplicidad de soluciones para ecuaciones de tipo elíptico es un fenómeno mucho menos extraño. Ya los problemas lineales de autovalores conducen a una infinidad de soluciones. En problemas no lineales la multiplicidad suele aparecer para ciertos valores de los parámetros aunque la misma ecuación para otros parámetros admita una única solución. Es la *teoría de la bifurcación* que engloba muy bellos resultados matemáticos con numerosas aplicaciones. Por citar tan sólo una de ellas me referiré a la formación de celdas convectivas hexagonales observada por Bénard [16] en 1901 debido a la variación de la tensión superficial con la temperatura[49].

El estudio de la existencia y unicidad (o multiplicidad) de las soluciones de un modelo dista mucho de agotar su tratamiento matemático.

[49]Otros muchos ejemplos y multitud de referencias se pueden encontrar, por ejemplo, en Zeidler [194].

Así, por ejemplo, si el modelo es evolutivo es de gran importancia analizar el paso a régimen permanente o estacionario. Esta es una investigación capital en la moderna teoría de los *sistemas dinámicos*, desarrollada a partir de los trabajos de Poincaré y que ha cobrado una gran actualidad con el estudio de la formación de *caos*.

Muchas otras propiedades cualitativas son también objeto del análisis matemático del modelo. Entre ellas se pueden citar el estudio de la regularidad de soluciones débiles, de las singularidades, de la propagación de perturbaciones y fronteras libres, propiedades de simetría y otras propiedades geométricas, etc.

3.4.4. Tratamiento numérico: simulación y validación

Para obtener la información inicialmente requerida de los modelos matemáticos es preciso terminar presentando repuestas cuantificadas. Era el sueño de Fourier descrito anteriormente. El objetivo del *análisis numérico* es exactamente ése: el estudio de algoritmos para los problemas de la matemática continua. Esos algoritmos son procesos infinitos convergentes a alguna de las soluciones. Los algoritmos han de ser constructivos y al detener los cálculos en distintas etapas obtendremos diferentes aproximaciones de la solución en cuestión. Un algoritmo convergente suministra un teorema de existencia de soluciones alternativo al que pueda encontrarse por otros métodos no constructivos[50]. A la hora de evaluar la eficacia de los métodos numéricos hay que tener en cuenta su universalidad, la sencillez de la organización del proceso de cálculo y del control de la exactitud, y, por último, la velocidad de convergencia.

El afán de culminar el tratamiento matemático con calculos aproximativos estaba ya presente en Euler, Lagrange, Gauss y tantos otros matemáticos de épocas pasadas. Los algoritmos requerían grandes cálculos incluso aún simplificando la formulación de los modelos. Desde la máquina de Pascal hemos asistido a una progresión asombrosa en la escala de los problemas abordados y así, por ejemplo, en la resolución de sistemas algebraicos lineales hemos pasado de la resolución de los de

[50]Una de las aportaciones más valiosas en ese espíritu es el trabajo de Courant, Lewy y Friedrichs [32] de 1928 en el que se obtiene una condición sobre el tamaño del mallado para tener la estabilidad de algoritmo de aproximación para la ecuación de ondas.

diez ecuaciones, en 1930, a los de más de un millón, en 1990. Hay previsiones de que antes del año 2.000 se habrá alcanzado la posibilidad de resolver un billón de ecuaciones. Lo que esto significa para un científico se comprende fácilmente acudiendo a una frase atribuida a Laplace con motivo de la introducción de los logaritmos:

> La invención de los logaritmos, que reducen los cálculos de varios meses a unos cuantos días, equivalió a multiplicar por dos la vida del astrónomo.

Si eso era así con los logaritmos ¿en cuánto se ha alargado la vida productiva de nuestros científicos e ingenieros con los potentes ordenadores actuales? Si se acude a la estimación anteriormente señalada de que los científicos en activo representan el noventa por ciento de los científicos de toda la historia, se puede tener una idea de las capacidades privilegiadas de nuestra época y de las potenciales de épocas futuras.

La trascendente aportación de los ordenadores consiste en proporcionar esa enorme capacidad de cálculo que permite aplicar sofisticados algoritmos para modelos muy complejos. El análisis numérico se extendía así al Cálculo Científico, esto es, a la utilización del ordenador como herramienta de trabajo en cualquier disciplina científica.

Un texto de von Neumann de 1946, escrito en colaboración con H. Goldstine [75], puede considerarse de importancia histórica pese a que por su carácter de informe técnico apenas pudo ser libremente consultado hasta que apareció en la recopilación de las obras completas de von Neumann. En este trabajo, de título *Large Scale Computing Machines*, se analiza el interés de los grandes ordenadores desde el punto de vista del matemático, del ingeniero y del programador. Comienzan reflexionando sobre los fines hipotéticos de estas máquinas:

> ¿Dónde radican las necesidades matemáticas de computación automática de alta velocidad y cuáles son las características de una computadora efectivas en las distintas fases pertinentes de las matemáticas?

A modo de respuesta comentan:

> Nuestros métodos analíticos actuales parecen inadecuados para la solución de importantes problemas que aparecen en conexión con ecuaciones en derivadas parciales no lineales y, de hecho, con materialmente todos los tipos de problemas no lineales en matemática pura.

Se manifiestan también enfatizando su posible aplicabilidad en mecánica de fluidos:

> Sólo los problemas más elementales de mecánica de fluidos han sido resueltos analíticamente... Las dificultades principales eran conocidas desde tiempos de Riemann y Reynolds.

Con respecto a la relación de estos problemas con la Física se pronuncian de esta manera:

> Uno podría estar tentado de calificar a estos problemas como problemas de la física más que como de la matemática aplicada o incluso de la matemática pura... Tal interpretación es completamente errónea. No es nuevo, ni es ninguna sorprendente ocurrencia, que los primeros, y en ocasiones los más importantes, indicadores de necesidades de nuevos avances matemáticos tengan su origen en la física.

Más tarde mencionan problemas de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico aún sin respuesta (en teoría del potencial, aplicaciones conformes, superficies mínimas, etcétera) así como los ligados a la turbulencia. Finalmente, es de resaltar su premonición sobre el papel de los grandes computadores en relación con la experimentación:

> Los túneles de viento son utilizados actualmente como máquinas de cálculo de tipo analógico... Las máquinas digitales tienen más flexibilidad y más exactitud y podrían ser mucho más rápidas de lo que son actualmente. Pueden proporcionarnos esas informaciones heurísticas que se necesitan en todas las partes de las matemáticas para el progreso más auténtico.

La posibilidad de representar sobre una pantalla los resultados suministrados por los modelos matemáticos es un elemento de gran importancia. La visualización de los resultados numéricos nos sumerge en una especie de *realidad virtual* que nos puede permitir una experimentación difícil o costosa (piénsese en problemas de petróleo, energía nuclear, diseño de coches y aviones, etc) y a veces imposible de llevar a cabo sobre el proceso real (caso de problemas en medio ambiente, economía, astrofísica etc). Se puede observar cómo varían las soluciones, en qué región espacial ocurre algun fenómeno interesante. Se puede utilizar distintos colores para visualizar los valores de variables complicadas, se puede cambiar de sistema de referencia, utilizar el “zoom”, simular dinámicamente los movimientos. Se ve la propagación de un choque, de una llama, la difusión de una mancha de polución en la atmósfera o en el océano. Las posibilidades de aplicaciones científicas e industriales son inmensas. En esa realidad virtual es fácil observar los cambios originados por modificaciones de los parámetros o de los datos.

La simulación mediante ordenador permite explorar a gran velocidad la compatibilidad entre el comportamiento de un gran número de partes y el comportamiento del todo que las integra. La simulación puede nutrirse indistintamente de la teoría o de la experiencia. En el primer caso, el resultado puede poner de manifiesto una incompatibilidad con la realidad y entonces juega el papel reservado históricamente a las experiencias. En el segundo caso, si la simulación se nutre de datos experimentales el resultado ofrece predicciones de la globalidad o confirma la viabilidad de las individuales y esto puede significar la propuesta de nuevas experiencias. En ese caso la simulación juega el papel histórico de la teoría.

Una etapa que no siempre recibe la atención que se merece en el mundo académico se refiere a la *validación.* Se hace poco menos que imprescindible estudiar las condiciones de aplicabilidad de los modelos, confrontando los resultados matemáticos obtenidos con el conocimiento accesible por otros métodos: soluciones exactas en casos particulares, tratamiento analítico, mediciones experimentales etc.

Resulta curioso observar que ese contraste entre resultados de la mente y la realidad está a veces más presente en la obra de pensadores filosóficos que la de los propios científicos. Ortega y Gasset escribe en [137] lo siguiente:

> Entonces es cuando salimos se nuestra soledad imaginativa, de nuestra mente pura y aislada, y comparamos esos hechos que la realidad imaginada por nosotros produciría con los hechos efectivos que nos rodean. Si casan unos con otros es que hemos descifrado el jeroglífico, que hemos des-cubierto[51] la realidad que los hechos cubrían y arca-

[51] Ortega lo escribe de esta manera.

nizaban.

A mi juicio, ese jeroglífico al que se refiere Ortega, es tan complejo que nuestra “modesta” declaración de objetivos es la que debe servir para dar como adecuados o insuficientes los resultados obtenidos. A veces, el modelo es el adecuado, pero es necesario ajustar los parámetros que intervienen en él. Otras veces, se hace imprescindible acudir a otros modelos de la jerarquía correspondientes a una mayor complejidad.

Aparecen dificultades en esa tarea. No siempre es posible tener acceso ni multipicar la mediciones. Es el caso de modelos de aplicación en astrofísica, economía, medicina y muchas otras ciencias. La validación se analiza, en esos casos, confrontando los resultados particularizados a *submodelos* en los que es posible disponer de mediciones experimentales.

3.4.5. Predicción y control

La *predicción y el control* pueden ser entendidos como la culminación del largo proceso descrito anteriormentede. Ya nos hemos referido a la primera motivación de ése tipo de matemáticas: comprender el mundo. Otra motivación es intentar controlarlo. En otras ciencias alguna de esas dos motivaciones puede predominar sobre la otra: en cosmología lo hace la primera, en medicina la segunda. Una vez más dos actitudes pueden presentarse como antagonistas. Esto no es así en el caso de *las matemáticas del mundo*.

La previsión, fruto de la predicción y el control, es considerada por muchos cómo el máximo baremo del desarrollo. Incluso los efectos de las ingobernables catástrofes naturales pueden ser, en algún modo, amortiguados. Un terremoto de grado moderado provoca normalmente una inmensa cifra de muertos en la paupérrima Armenia. En Tokio, esa misma fuerza sísmica no suele pasar de ser un susto.

La cuestión de cómo actuar sobre los sistemas para alcanzar estrategias deseadas es el objeto de la *optimización* y de la *teoría de control*. Son parcelas en un rápido progreso por la creativa interacción de matemáticos, ingenieros y especialistas de ciencias de la computación. La necesidad de controlar un sistema o un proceso se manifiesta en muchas áreas de la actividad humana, desde la tecnología a la medicina y la economía.

Los ingredientes básicos de la teoría de control son: un modelo o ecuación de estado, unas variables o acciones posibles y unos criterios que se intentan optimizar. Comenzando con los primeros resultados matemáticos sobre control óptimo de sistemas diferenciales lineales de los años cincuenta y sesenta, la teoría de control ha crecido enormemente en numerosas direcciones alcanzando incluso a los más complejos modelos no lineales en derivadas parciales. Así el control de la turbulencia es uno de los problemas centrales que esperan aún una respuesta matemática satisfactoria. Las cuestiones matemáticas abordadas encierran una gran dificultad pues exigen la utilización de técnicas de muchos otros campos. Es como si nos enfrentásemos a unas pruebas de *decatlón* o si como si se tratase de componer un concierto, no ya para un instrumento, ni para un cuarteto de cámara, sino para una gran orquesta. Además de su papel fundamental en la elaboración de previsiones y actuaciones, la teoría de control es un área de integración en la que las barreras de comunicación entre científicos e ingenieros han de ser necesariamente superadas.

Termino estas palabras agradeciendo la atención que me han prestado. Muchas gracias.

Bibliografía

[1] Al-Farabi, 1953, *Catálogo de las ciencias*, Edición y traducción castellana de la obra original de (cotejada con la traducción al latín de Gerardo de Cremona en Toledo) por Angel Gonzalez Palencia. C. S. I. C., Madrid.

[2] Alario, M. A., 1993, *De superconductores y otros materiales,* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[3] Antontsev, S.N., Kazhikov, A.V. y Monakhov, V. N., 1990, *Boundary Value Problems of Nonhomogeneous Fluids,* North-Holland, Amsterdam.

[4] Aristóteles, 1974, *Poética,* Edición trilingüe de Valentín García Yebra, Gredos, Madrid.

[5] Arquímedes, 1986, *El método,* Traducción, introducción y notas de L.Vega, Alianza, Madrid (véase también la edición a cargo de P.M. Gonzalez Urbaneja y J. Vaqué Jordi en Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1993).

[6] Arquímedes, 1912, On the equilibrium. Books I and II. En *The works of Archimedes with the method of Archimedes,* Ed. T.L. Heath, The Cambridge University Press (reimpresión de Dover, Nueva York), pp., 189-220.

[7] Arquímedes, On the flotating bodies. Books I and II. En *The works of Archimedes with the method of Archimedes,* Ed. T.L. Heath, The Cambridge University Press (reimpresión de Dover, Nueva York), pp., 253-262.

[8] Aris, R., 1978, *Mathematical modelling techniques,* Pitman, Londres.

[9] Auslander, L. y Tolimieri,R., 1979, Is computing with the finite Fourier transform pure or applied mathematics?, *Bull. AMS*, **1,** p. 847.

[10] Atiyah, M. et al., 1994, Responses to “Theoretical Mathematics: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics”, by A. Jaffe and F. Quinn, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **30,** pp. 178-207.

[11] “Azorín”, (José Martínez Ruiz), 1929, La ecuación. En el libro *Blanco en azul.* También incluido en *Antología del cuento español,* Edición de J.M^{a}. Martínez Cachero, Clásicos Castalia, Madrid, 1994, pp. 113-120.

[12] Babini, J., 1948, *Arquímedes,* Espasa Calpe, Buenos Aires.

[13] Balinski, M. y Ramírez Gonzalez, V., 1996, El problema del reparto proporcional de escaños, *Boletín de SEMA,* N^{o} 8, pp. 3-34.

[14] Barenblatt, G., 1996, Scaling, *Self Similarity and Intermediate Asymptotics,* Cambridge University Press, Cambridge.

[15] Bass, H., 1997, Mathematicians as Educators, *Notices of the AMS,* **44**, No. 1, pp. 18-21.

[16] Bénard, M.,1901, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur convection en régime permanent. *Ann. Chem. Ser*., **7,** pp. 62-144.

[17] Benilan, Ph., 1972, *Equations d’evolution dans un espace de Banach quelconque et applications,* Tésis Doctoral. Université d’Orsay, París.

[18] Bensoussan, A. y Lions, J.L., 1978, *Temps d’arret et contrôle impulsionnel,* Dunod, París.

[19] Bensoussan, A., Lions, J.L. y Papanicolau, G., 1978, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures,* North Holland, Amsterdam.

[20] Borel, A., 1983, Mathematics: Art and Science, *Mathematical Intellegencer,* **5**, No. 4, pp. 9-17.

[21] Bourbaki, N, 1969, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris. (Versión castellana: *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza, Madrid, 1972).

[22] Brezis, H., 1973, *Operateurs Maximaux Monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North-Holland, Amsterdam.

[23] Brezis, H., 1983, *Analyse fonctionelle. Théorie et applications.* Masson. París. (Versión castellana: *Análisis Funcional,* Alianza Universidad, Madrid, 1984).

[24] Brockman, J., 1996, *La tercera cultura. Más allá de la revolución científica,* Tusquets Eds., Barcelona.

[25] Calvo Hernando, M.,1996, La divulgación de la ciencia como objeto de divulgación, *Arbor* **CLIII**, 601, pp. 105-117.

[26] Carracido, J.R., 1917, Condiciones de España para el cultivo de las ciencias, conferencia pronunciada en el Ateneo de Madrid, el 6 de abril de 1896. En el libro, *Estudios histórico-críticos de la ciencia española,* Madrid.

[27] Cavanilles, A.J., 1784, *Observations de M. l'Abbé Cavanilles sur l'article Espagne de la Nouvèlle Encyclopédie*, Jombert, París. (Versión castellana de un extracto en [70], pp. 54-57).

[28] Clagett, M., 1970, Archimedes, en *Dictionary of Scientific Biography,* **1,** Nueva York, pp. 213-231.

[29] Comás Solá, J., 1903, Ciencia comparada, *La Vanguardia*, 1 de octubre.

[30] Costa Novella, E., 1974, *Adsorción.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[31] Courant, R. y Hilbert, D., 1953, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 y 2. Interscience, Nueva York.

[32] Courant, R., Lewy, H. y Friedrichs, K.O., 1928, Uber die partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik, *Math. Annalen,* **100,** pp. 32-74.

[33] Crandall, M.G. y Lions, P.L., 1983, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277,** pp. 1-42.

[34] Crank, J., 1984, *Free and moving boundary problems,* Clarendon Press, Oxford.

[35] Crowe, M., 1988, Ten misconceptions about mathematics and its history, en el libro *History and Philosophy of Modern Mathematics,* ed. W. Aspray y P. Kitcher, The University of Minnesota Press, Minneapolis, pp. 306-316.

[36] Dautray, D. y Lions, J.L., 1990, *Mathematical Analysis and Numerical Methods in Technology,* Vol. 4, Springer-Verlag, Nueva York.

[37] Davis, J.D. y Hersh, R.,1982, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston. (Versión castellana: *Experiencia Matemática*, Labor, Barcelona, 1988).

[38] Davis, J.D. y Hersh, R., 1986, *The Descartes Dream: The World According to Mathematics*, Harcourt Brace & Company. (Versión castellana: *El sueño de Descartes: El mundo según las Matemáticas,* RBA Editores, Barcelona, 1994).

[39] Dehn, M., 1983, The mentality of the Mathematician.A characterization, *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 5, No.2, pp. 18-26.

[40] Denina, C., 1786, *Respuesta a la pregunta: ¿Qué se debe a España?* Discurso en la Academia de Berlín, Imprenta Real. Madrid. (Versión castellana de un extracto en [70], pp. 58-71).

[41] Denker, M., 1990, *Eberhard Hopf,* Jber. d. Dt. Math.-Verein, pp. 48-57.

[42] Denn, M. M., 1986, *Process Modeling*, Longman, Harlow, Inglaterra.

[43] Descartes, R., 1637, *Discours de la méthode,* Leyden. (Versión castellana: *Discurso del método*, Alianza, Madrid, 1984).

[44] Diderot, 1994 *Ouvres, Tome I. Philosophie*, Robert Laffont, Paris. (Versión castellana: *Escritos filosóficos.* Traducción, introducción y notas de F. Savater, Editora Nacional, Madrid, 1975).

[45] Dieudonné, J., 1987, *Pour l'honneur de l'esprit humain,* Hachette, París. (Versión castellana: *En honor del espíritu humano,* Alianza, Madrid, 1989).

[46] Dijksterhuis, E. J., 1956, *Archimedes*, Copenhaguen (reimpresión en Princeton University Press. 1987).

[47] Dou MasdeXexàs, A., 1963, *Relaciones entre las ecuaciones en derivadas parciales y la física.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[48] Dou MasdeXexàs, A., 1970, *Fundamentos de la matemática*, Labor, Barcelona.

[49] Dou MasdeXexás, A., 1997, *Newton-Clarke, Hanson y la esperiencia religiosa*, Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[50] Duvaut, G. y Lions, J.L., 1972, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, París.

[51] Echegaray, J., 1866, *Historia de las matemáticas puras en nuestra España*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Tomo XXXI, Madrid.

[52] Eco, U., 1990, Universidad y "mass media", Extracto del discurso de investidura como Doctor Honoris Causa por la Universidad Complutense de Madrid, El PAÍS, 19 de diciembre.

[53] Ekeland, I., 1988, *Mathematics and the Unexpected,* University of Chicago Press, Chicago.

[54] Etayo, J. J., 1983, *Pequeña historia de las conexiones geométricas,* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[55] Etayo, J. J., 1990, *De cómo hablan los matemáticos y algunos otros,* Discurso inagural del curso 1990/1991, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[56] Euler, L., *Opera Omnia*, 72 Vols., Berna, 1911-1975.

[57] Euler, L., 1993, *Método de máximos y mínimos*, Publ. de la Univ. Autónoma de Barcelona. Selección del *Methodus (*1744), con introducción, notas y apéndices a cargo de A. Dou.

[58] Fernández Díaz, A., 1997, El teorema de Gödel y la ciencia del derecho, en *Racionalidad individual y economía no convencional*, Editores R. Febrero y P. Schwartz, Ariel, Barcelona. En prensa.

[59] Fernández-Rañada, A., 1994, *Los Científicos y Dios*, Ediciones Nobel, Oviedo.

[60] Fernández-Rañada, A., 1995, *Los muchos rostros de la ciencia*, Ediciones Nobel, Oviedo.

[61] Fernández Vallín, A., 1893, *Cultura científica de España en el siglo XVI*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[62] Fleming, W.H. y Rishel, R.W., 1975, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, Berlín.

[63] Fourier, J.B.J., 1822, *Théorie analitique de la chaleur*, Edición de Firmin Didot, París.

[64] Friedman, A., 1988, *Mathematics in Industrial Problems, Part 1*, Springer-Verlag, Nueva York.

[65] Friedman, A. y Littman, W., 1994, *Industrial Mathematics: A Course in Solving Real-World Problems*, SIAM, Filadelfia.

[66] Fundación COTEC, 1997, *Informe COTEC 1997*, Fundación COTEC para la Innovación Tecnológica, Madrid.

[67] Galilei, G., 1623, *Opere*, 20 Vols., 1890-1909 (reimpreso por G. Barbera, 1964-1966).

[68] Galindo, A., 1980, *No-linealidad en las ciencias de la naturaleza.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[69] Galindo, A., 1994, Ciencia y Dios, *Saber leer*, Agosto-Septiembre, nº 77, pp. 1-2.

[70] García Camarero, En. y García Camarero, Er. (eds.), 1970, *La polémica de la ciencia española*, Alianza, Madrid.

[71] Germain,P., 1993, Le monde mathématique et la mathématique du monde, *La Vie des Sciences, Comptes rendus ,* **10,** pp. 209-222.

[72] García Velarde, M., 1995, Por los fluidos y sus corrientes, número a número, *Revista Española de Física,* vol. **9,** pp. 12-19.

[73] Girón, F.J., 1991, *Conceptos y técnicas de la estadística bayesiana: comentarios sobre su estado actual.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[74] Gödel, K., 1931, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatsh. für Math. und Phys.,* t. XXXVIII, pp. 173-198. (Versión castellana en *K. Gödel Obras Completas,* ed. de J. Mosterín, Alianza, Madrid, pp. 55-89)

[75] Goldstine, H. y von Neumann, J., On the Principles of Large Scale Computing Machines, en *John von Neumann: Collected works,* ed. A.H. Taub, MacMillan, Nueva York, 1960, Vol.V, pp. 1-32.

[76] Gregg, M.C. y Davis,P., 1996, Mathematics Meets Film Animation, *SIAM News,* **29**, No. 7, pp.1 y 4.

[77] Guzmán, M. de, 1983, *Impactos del Análisis Armónico.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[78] Guzmán, M. de, 1991, *Para pensar mejor,* Labor, Barcelona.

[79] Guzmán, M. de, 1993, *El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura*, Discurso inagural del curso 1993/1994, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[80] Guzmán, M. de,1995, *Aventuras Matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios,* Segunda edición. Pirámide, Madrid.

[81] Guzmán, M. de, 1996, *El rincón de la pizarra,* Pirámide, Madrid.

[82] Halmos, P. R., 1981, Applied Mathematics is Bad Mathematics, en *Mathematics Tomorrow,* ed. L. A. Steen, Springer, Nueva York, pp. 8-14.

[83] Hairer,E. y Wanner,G., 1996, *Analysis by its History,* Springer-Verlag, Berlín.

[84] Hardy, G.H., 1940, *A Mathematician's Apology,* Cambridge University Press, Londres. (Versión castellana: *Autojustificación de un matemático*, Ariel, Barcelona).

[85] Hawking, S.W., 1995, *A brief history of time,* Bantman Press, London. (Versión castellana: *Historia del tiempo,* Editorial Crítica, Barcelona, 1988 y Alianza, Madrid, 1990).

[86] Heiberg, J. L., 1913, *Archimedis opera omnia cum comm. Eutocii.,* Leipzig

[87] Henderson-Sellers, A. y McGuffie, K., 1987, *A Climate Modelling Primer,* John Wiley&Sons, Chichester, Gran Bretaña. (Versión castellana: *Introducción a los modelos climáticos,* Omega, Barcelona, 1996).

[88] Hernández, J., 1989, Cauchy y la convergencia uniforme: algunas notas, en el libro *Actas de la reunión matemática en honor de A. Dou,* Editores J. I. Díaz y J. M. Vegas, Universidad Complutense de Madrid, pp. 327-340.

[89] Hernández, J., 1985, Descubrimientos y teorías en matemáticas, *Revista de Occidente,* **52**, pp. 65-82.

[90] Hernández, J., 1995, La historia de la matemática, hoy: A modo de presentación, *Arbor,* N.^{o} 600, monográfico sobre *La historia de la matemática, hoy.* J. Echeverría y Jesús Hernández (Comps.), **CLII**, pp. 9-42.

[91] Hilbert, D., 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig-Berlín. (Versión castellana: *Fundamentos de la Geometría*, C.S.I.C., Madrid, 1991).

[92] Hoffman, D., 1987, The Computer-Aided Discovery of New Embedded Minimal Surfaces, *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 9, No.3, pp. 8-21.

[93] Horgan,J., 1993, La muerte de la demostración, *Investigación y Ciencia,* diciembre, pp. 71-77.

[94] Hornung, U., 1986, *The interface: on the interaction between Applied Mathematics and the Engineering Science*, Universität der Bundereswehr, Facultät für Informatik, Bericcht Nr. 8610.

[95] Jaffe, A. y Quinn, F., 1993, "Theoretical Mathematics": Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **29,** pp. 1-13.

[96] Jaffe, A. y Quinn, F., 1994, Reponse to Comments on "Theoretical Mathematics", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **30,** pp. 208-211.

[97] Jiménez Guerra, P., 1991, *Origen y evolución de la integración vectorial.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[98] Kantor, J.M., 1987, Can Mathematical Culture Be Developed Outside of School?, *The Mathematical Intelligencer*, **9**., No.1, pp. 60-61.

[99] Kruzhkov, S.N., 1970, Quasilinear equations of first order with several independent variables, *Mat. Sbornik*, **81,** pp. 228-255.

[100] Kuhn, T.S., 1962, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press. (Versión castellana: *Estructura de las revoluciones científicas*, Fondo de Cultura Económica, México, 1975).

[101] Laín, P., 1965, *Obras*, Plenitud, Madrid.

[102] Laín, P., 1996, *Las edades de plata de la cultura española: Vol. 2. Letras, Ciencias, Arte, Sociedad y Cultura*, Espasa Calpe, Madrid.

[103] Lakatos, 1976, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery,* Cambridge University Press. (Versión castellana: *Puebas y refutaciones,* Alianza, Madrid, 1978).

[104] Lamo de Espinosa, E., 1996, *Sociedades de cultura, sociedades de ciencia*, Ediciones Nobel, Oviedo.

[105] Lax, P., 1973, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM. Philadelphia.

[106] Leray, J.,1932, Etude de diverses équations integrales non linéaires et de quelques problémes que pose l'hydrodinamique, *Journal de Mathematiques Pures et Apliquées*, **12,** pp. 1-82.

[107] Liñán, A., 1991, *El papel de la mecánica de fluidos en los procesos de combustión.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[108] Lions, J. -L., 1990, *El Planeta Tierra: El papel de las matemáticas y de los super ordenadores*, Espasa Calpe, Madrid, Serie del Instituto de España, N^o 8.

[109] Lions, J. -L., 1991, De la machine à calculer de Pascal aux ordinateurs, *La Vie des Sciences*, París, **8,** n^o 3, pp. 221-240.

[110] Lions, J. -L., 1994, Le temps de Contrôle, *La Vie des Sciences*, París, **10,** n^o 4, pp 305-328.

[111] Lions, J. -L., 1994, Ricerca pura e ricerca aplicata. La modellistica matemática. En prensa.

[112] Lions, J. -L., 1997, Un discours du Président, *La lettre de l'Académie des Sciences et du Cadas*, n^o 19, pp. 1-2.

[113] Lions, J. -L., 1997, Comunicación personal.

[114] Lions, P. L., 1996, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume1. Incompressible Models.* Clarendon Press, Oxford.

[115] Lodge, D., 1984, *El mundo es un pañuelo*, Versal, Barcelona.

[116] López Piñero, J. M^a., 1968, La literatura científica en la España contemporánea, en *Historia General de las Literaturas Hispánicas*, vol. IV, Barcelona.

[117] Lorenzo, J. de, 1995, La Matemática, un hacer constitutivo para la Filosofía y algo más, *Arbor,* **CL**, 589, pp. 125-146.

[118] Lutzen, J., 1982, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, Berlín.

[119] Maravall, D., 1968, *La economía y la sociología como motores de la investigación matemática*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[120] Masson de Morvilliers, N., 1782, Espagne, en *Géographie Moderne*, **I**, pp. 554-568, de la *Encyclopédie Méthodique*, Paris. (Versión castellana en [70], pp. 47-53).

[121] Menéndez Pelayo, M., 1876, Mr. Masson, redivivo, *Revista Europea*, 30 de Julio.

[122] Menéndez Pelayo, M., 1953, *La ciencia española*, C.S.I.C., Volúmenes I, II y III, Madrid.

[123] Menéndez Pelayo, M., 1894, *La España Moderna*. Reditado en *La Ciencia Española*, **II**, Madrid, 1953.

[124] Millán Barbany, G., 1975, *Problemas matemáticos de la mecánica de fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión,* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[125] Montesinos, J.M., 1990, *Nudos, cristales y números: Aspectos de la topología de baja dimensión.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[126] Morrey, S.B. Jr., 1966, *Integrals in the Calculus of Variations,* Springer-Verlag, Berlin.

[127] Mugler, Ch., 1971, *Archìmede,* Société d'Editions "Les belles lettres", París.

[128] Muir, A., 1988, The Psychology of Mathematical Creativity, *The Mathematical Intelligencer*, **10**, No.1, pp.33-37.

[129] Martín Municio, A., 1996, Calidad de cultura, Conferencia en la Fundación Central Hispano, 16 de Diciembre.

[130] Navarro Borrás, J.M., 1942, *Estudio de algunos tipos de ecuaciones integrales singulares.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[131] Nelkin, D., 1995, *Selling Science: How the Press covers Science and Technology,* W.H. Freeman&Co., Nueva York.

[132] Neumann, J. von, 1954, The Role of Mathematics in the Sciences and in Society, en *John von Neumann: Collected works,* ed. A.H. Taub, MacMillan, Nueva York, 1960, **VI**, pp..477-490.

[133] Neumann, J. von, 1956, The Mathematician, en *The World of Mathematics,* ed. J. R. Newman, Simon and Schuster, Nueva York, **IV**, 2053-2063. (Versión castellana: El Matemático, en *Sigma: El mundo de las matemáticas,* ed. J. R. Newman, **IV**, , Grijalbo, Barcelona).

[134] Newton,I., 1686. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* Londres (hay varias versiones castellanas; véase, por ejemplo, *Principios matemáticos de filosofía natural. Volúmenes 1 y 2.* Introducción, traducción y notas de Eloy Rada García. Alianza, Madrid. 1987).

[135] Oleinik,O.A., Shamaev, A.S. y Yosifian, G.A., 1994, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogeneization,* Springer-Verlag, Berlín.

[136] Ortega y Gasset, J., 1996, *Meditación de la técnica y otros ensayos sobre ciencia y filosofía.* Revista de Occidente en Alianza, Madrid. Tercera reimpresión (primera edición en 1939).

[137] Ortega y Gasset, J., 1994, *En torno a Galileo.* Revista de Occidente en Alianza Editorial, Madrid, Primera reimpresión (primera edición en 1947).

[138] Ortega, J. y Rheinboldt, W., 1970, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables,* Academic Press, Nueva York.

[139] Osserman, R., 1989, Review to *The Descartes Dream: The World According to Mathematics*, *The Mathematical Intelligencer*, **11**, No.2, pp. 66-70.

[140] Palacios, J., 1956, *Análisis Dimensional*, Espasa-Calpe, Madrid. (Trad. francesa *Analyse Dimensionelle*, Gauthier-Vilars, Paris, 1960; Trad. inglesa *Dimensional Analysis,* McMillan, Nueva York, 1964)

[141] Penrose, R., 1989, *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press. (Versión castellana: *La nueva mente del Emperador,* Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1991).

[142] Pérez Mercader, J., 1997, *¿Qué sabemos del universo?*, Tercera edición, Editorial Debate, Madrid.

[143] Perojo, J., 1877, La ciencia española bajo la Inquisición, *Revista Contemporánea*, 15 de Abril.

[144] Perrier, P., 1994, Quelques problèmes posés à l'homme mathématicien et modélisateur des grands systèmes. En *Les grandes systèmes des sciences et de la technologie*, Ed. J. Hororwitz y J.L. Lions, Masson, París, pp. 649-664.

[145] Picatoste, F., 1866, El discurso del señor Echegaray en la Academia de Ciencias, Discurso de recepción contenido en [51].

[146] Plutarco, Vitruvio y Tzetzes, 1956, Archimedes, en *The World of Mathematics,* ed. J. R. Newman, Simon and Schuster, Nueva York, **I**. (Versión castellana: Arquímedes, en *Sigma: El mundo de las matemáticas*, ed. J. R. Newman, **I**, pp. 108-114, Grijalbo, Barcelona).

[147] Poincaré, H., 1905, *La valeur de la Science*, Paris. (Versión castellana: *El valor de la Ciencia,* Espasa Calpe, Madrid, 1946).

[148] Pollard, H., 1972, *Applied Mathematics: An Introduction,* Addison-Wesley, Reading, Mas.

[149] Popper, K., 1934, *The Logic of Scientific Discovery* (editado en 1959 en Hutchinson, Londres). (Versión castellana: *La lógica de la investigación científica*, Tecnos, Madrid, 1962).

[150] Postman, N., 1993, *Technopoly:The Surrender of Culture to Technology*, Vintage Books, New York.

[151] Price, D.J. de Solla, 1963, *Little Science, Big Science*, Columbia University Press, Nueva York. (Versión castellana: *Hacia una ciencia de la ciencia*, Ariel, Barcelona, 1973).

[152] Prigogine, I., 1997, *Las leyes del caos*, Crítica, Barcelona.

[153] Puig Adam, P., 1952, *Matemática y Cibernética.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[154] Puig Adam, P., 1960, *La matemática y su enseñanza actual*, Publicación de la Revista "Enseñanza Media", Madrid.

[155] Ramón y Cajal, S., 1897, *Fundamentos racionales y condiciones técnicas de la investigación biológoca*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. (También publicado bajo el título *Reglas y consejos sobre investigación científica: los tónicos de la voluntad* en la Colección Austral, Espasa Calpe, Madrid, Decimo tercera edición, 1995).

[156] Rey Pastor, J., 1915, España y el progreso de las matemáticas, Discurso inagural del Congreso para el Progreso de las Ciencias celebrado en Valladolid, editado por la Asociación española para el progreso de las ciencias, Madrid. (Reimpreso en [160], pp. 25-63).

[157] Rey Pastor, J., 1920, *Investigaciones sobre el problema del ultracontínuo,* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[158] Rey Pastor, J., *Los progresos de España e Hispanoamerica en las Ciencias teóricas*, Discurso inaugural del curso 1932/33, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[159] Rey Pastor, 1961, *Discurso de contestación al de ingreso de S. Rios*. En *Procesos de Decisión,* Discurso de ingreso de S. Rios, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[160] Rey Pastor, J., 1993, *Escritos de las dos orillas,* Edición a cargo de Luis Español Gonzalez, Biblioteca Riojana, Logroño.

[161] Ríos, S., 1961, *Procesos de Decisión,* Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[162] Ríos, S., 1995, *Modelización,* Alianza, Madrid.

[163] Robinson, A., 1966, *Non Standard Analysis,* North-Holland, Amsterdam.

[164] Rodriguez-Salinas, B., 1976, *Medidas en espacios topológicos,* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[165] Rudin, L., 1993, Image Processing Makes Its Mark in Court, *SIAM News,* December, pp. 1, 10, 11 y 13.

[166] Saari, D. G., Review to the book “*Introduction to Applicable Mathematics, Part I,* by F.A. Hinchey”, *Mathemaical Intelligencer,* pp. 88-90.

[167] Salinas, P., 1993, *El defensor,* Alianza, Madrid. Tercera reimpresión (primera edición en 1954).

[168] San Juan, R., 1956, *La abstracción matemática.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[169] Sánchez Ron, J.M., 1997, *Falsos mitos: Ciencia vs. tecnología. Reflexiones sobre política científica*. Fundación Repsol, Madrid. En prensa.

[170] Sánchez-Palencia, E., 1980, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory,* Springer-Verlag, Berlín.

[171] Schlichting, H., 1951, *Boundary-layer Theory,* McGraw-Hill, Nueva York (Versión castellana: *Teoría de la capa límite,* Ediciones Urmo, Bilbao, 1972).

[172] Schneider, I., 1979, *Archimedes: Ingenieur, Naturwissenschalfter und Mathematiker,* Darmstadt.

[173] Schwartz, L., 1950, *Théorie des distributions,* Hermann, París.

[174] Serrin, J., 1984, Applied Mathematics and Scientific Thought, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlín, pp. 19-27.

[175] Snow, C.P., 1962, *The Two Cultures and A second Look. An Expanded Version of The Two Cultures and The Scientific Revolution,* Cambridge University Press. (Versión castellana: *Las dos culturas y un segundo enfoque*, Alianza, Madrid, 1977).

[176] Sobolev, S.L., 1991, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics.* Tercera Edición. Revisada y aumentada por O. A. Oleinik, A. M. S., Providence, Rhode Island.

[177] Stakgold, I., 1992, Should SIAM Have a Code of Ethics?, *SIAM News,* Diciembre, p.7.

[178] Steen, L.A., 1978, Mathematics Today, en *Mathematics Today: 12 Informal Essays*, Ed. L. A. Steen, Springer, Nueva York, pp. 1-10.

[179] Stewart,I., 1992, *The Problems of Mathematics*, Segunda edición, Oxford University Press, Oxford.

[180] Tayler,A., 1986, *Mathematical Models in Applied Mechanics*, Clarendon Press, Oxford.

[181] Terradas, E., 1933, *Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[182] Thom, R., 1970, Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique?, *L'Age de la Science*, **3,** pp. 225-236. (Versión castellana en *La enseñanza de las matemáticas modernas,* selección y prólogo de J. Hernández, Alianza, 1978, pp. 115-129).

[183] Thom, R., 1974, Mathématiques modernes et mathématiques de toujours. En *Pourquoi la mathematique?*, R. Jaulin (ed.), 10-18, Paris, pp. 39-56. (Versión castellana en *La enseñanza de las matemáticas modernas*, selección y prólogo de J. Hernández, Alianza, 1978, pp. 140-156).

[184] Thom, R., 1985, The Virtues and Dangers of Interdisciplinary Research, *The Mathematical Intelligencer*, **7**, No.3, pp. 31-34.

[185] Torres Quevedo, L., 1901, *Máquinas Algébricas.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[186] Torroja, J.M., 1969, *La Geodesia en la era del espacio*, Discurso de recepción, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[187] Valdivia, M., 1977, *Recientes aspectos del Análisis Funcional*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[188] Wagensberg, J., 1997, ¿Qué es la ciencia?, El PAÍS, 9 de Abril.

[189] Weyl, H., 1949, *Phylosophy of Mathematical and Natural Science,* Princeton University Press.

[190] Whithehead, A. N., Mathematics as an Element in the History of Thought, en *The World of Mathematics,* ed. J. R. Newman. Simon and Shuster, Nueva York, **I**, pp. 402-416. (Versión castellana: La matemática como elemento en la historia del pensamiento, en *Sigma: El mundo de las matemáticas,* ed. J. R. Newman, **1**, pp. 325-342, Grijalbo, Barcelona).

[191] Wigner, E.P., 1960, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Comm. Pure Appl. Math.,* **13,** pp. 1-14.

[192] Young, L., 1969, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory,* Saunders, Philadelphia.

[193] Zarco del Valle, A. R., 1851, *Las condiciones que España reune por su posición geográfica y su topografía física en favor de los progresos de las ciencias son y han sido en todos los tiempos numerosas y privilegiadas*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[194] Zeidler, E., 1988, *Nonlinear Functional Analysis and Applications.* Volúmenes I-V. Springer-Verlag, Berlín.

CONTESTACIÓN

DEL

EXCMO. SR. D. ALBERTO DOU MASDEXEXÀS

Excmo. Sr. Presidente,
Excma. Sra. Presidenta del Instituto de España,
Excmos. Sres. Académicos,
Señoras, Señores:

Al contestar a vuestro discurso en nombre de la Academia, cúmpleme ante todo daros una cordial bienvenida y expresar la satisfacción de esta Corporación por contaros entre sus miembros. Siguiendo una laudable costumbre, presentaré primero al recipiendario; luego, expondré algunos comentarios o reflexiones a propósito del discurso que acabamos de oír.

Conocí al nuevo académico Jesús Ildefonso Díaz, como alumno mío en la disciplina de Ecuaciones Diferenciales, cuando cursaba el tercer curso de Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid, durante el curso académico 1970-71. Obtuvo la calificación de Matrícula de Honor y desde entonces fueron estrechándose las relaciones académicas y científicas entre ambos. Volví a tener a Ildefonso de alumno en quinto curso en la disciplina de Ecuaciones en Derivadas Parciales, obteniendo también Matrícula de Honor. Cuando cursaba cuarto y quinto siguió así mismo mis cursos de doctorado, aunque obvia y exclusivamente como oyente.

A comienzos de 1974 el profesor Haïm Brezis, antiguo discípulo de Jacques-Louis Lions, fue invitado por el Departamento de Ecuaciones Funcionales del que era yo director. Brezis propuso a Ildefonso una serie de temas para su tesis doctoral y le dirigió en su elaboración. Ildefonso suele mencionar con frecuencia las útiles conversaciones mantenidas también con el Profesor Philippe Benilan, quien así mismo visitó nuestro Departamento.

En 1976, a la edad de 25 años, Ildefonso defendió su tesis doctoral sobre *Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas no lineales* aportando originales e interesantes resultados. Como director de la tesis figuré oficialmente yo, pues sólo más tarde pudo apelarse al título de Ponente.

Nuestro contacto académico continuó todavía esporádicamente hasta el año 1983 en el que juntos publicamos en *Collectanea Mathematica* el artículo “Sobre flujos subsónicos alrededor de un obstáculo simétrico”. Permitidme todavía mencionar que Ildefonso y José M. Vegas Montaner, en nombre del Departamento de Matemática Aplicada, con motivo de mi jubilación, organizaron en la Universidad Complutense en 1988 una Reunión Matemática y la Editorial de la Universidad publicó las *Actas*. Muy recientemente, Ildefonso me hizo una larga entrevista que se publicó en el *Boletín de SEMA*; a sugerencia de su Director, A. Fernández-Rañada, una versión algo más extensa apareció también en la *Revista Española de Física*.

Recién obtenido su doctorado, la carrera académica de Ildefonso se dispara. A los 27 años ya es Adjunto numerario en la Universidad Complutense y a los 29 años gana la oposición de Profesor Agregado (pasaría a Catedrático con la equiparación entre ambos cuerpos de profesorado de 1983) en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santander, donde estaría dos cursos para trasladarse de nuevo a la Universidad Complutense, en Octubre de 1983, ocupando, desde mi traslado a Barcelona en 1984, el cargo de Director del Departamento de Ecuaciones Funcionales hasta su extinción en 1986 y del de Matemática Aplicada desde su creación en 1986 hasta 1994.

Me refiero a continuación a sus publicaciones. Se trata de una lista en verdad impresionante. Consta de 191 ítems. Un aspecto notable de su obra radica en su facilidad para colaborar con especialistas de otros países. En su lista de publicaciones he podido hallar publicaciones conjuntas con 12 franceses, 8 italianos, 6 rusos, 3 alemanes, 2 americanos, 1 japonés, 1 suizo, 1 húngaro, 1 rumano y 1 chileno. A todo ello hay que sumar las publicaciones conjuntas con una quincena de españoles entre los que figuran antiguos profesores suyos, como Jesús Hernández y yo, colegas, entre ellos Amable Liñán, y antiguos alumnos de tesis, entre ellos su hermano Gregorio (también Catedrático de Matemática Aplicada en la Universidad Complutense). Además, en la mayoría de los casos, esas colaboraciones se cifran en más de un trabajo.

Los temas considerados por Ildefonso corresponden a modelos matemáticos expresados en ecuaciones en derivadas parciales no lineales que provienen de los campos más diversos. Así, por ejemplo, ha tratado un buen número de problemas que nacen en la mecánica de fluidos (filtración en medios porosos, lubricación, capilaridad, flujos subsónicos, fluidos no-Newtonianos, etc.), elasticidad (problema de obstáculo y problema de fricción de Signorini), ingeniería química (reacciones catalíticas de orden menor que uno, reacciones gas-sólido y adsorción), biología (dinámica no lineal de poblaciones, quemotaxis), materiales (semiconductores y termistores), fusión nuclear por confinamiento magnético, climatología, glaciología, geodesia (el problema gravimétrico de Backus), economía, etc. Otros trabajos suyos se refieren a resultados y métodos matemáticos genéricos con aplicabilidad en distintos campos: es el caso del estudio de operadores "acretivos" en espacios de Banach, método de super y subsoluciones locales, desigualdades isoperimétricas y simetrizaciones radiales y de Steiner, convexidad y otras propiedades de las soluciones de ecuaciones no lineales y, desde 1991, también teoría de control para ecuaciones no lineales.

Su lista de publicaciones está clara y escrupulosamente dividida en seis clases distintas. La primera es la lista de los artículos de matemáticas publicados en revistas de investigación; consta de 82 artículos aparecidos en revistas internacionales que figuran en todos los índices como las de máxima calidad en ese campo *Archive for Rational Mechanics and Analysis, Communications in Pure and Applied Mathematics, Journal of Differential Equations, Communications in Partial Differential Equations, Journal de Mathematiques Pures et Appliquées,* etc.

La segunda clase de publicaciones la forman un total de 5 libros y 11 ediciones de actas de congresos (de ellas 8 en editoriales extranjeras). Citemos su libro de 1985 en Pitman, Londres, titulado *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries*, cuya primera edición se agotó en dos años; mencionemos también *Modelos matemáticos en Física de Plasmas* que Ildefonso edita conjuntamente con Alberto Galindo y lo publica en 1995 en esta Academia.

La tercera clase la constituyen 43 publicaciones de capítulos de libros, artículos o comunicaciones en actas de congresos internacionales; le sigue otra con artículos o comunicaciones en actas de congresos nacionales con un total de 24 publicaciones. La quinta clase consta de 8 informes, entre ellos los informes anuales (relacionados con sus contratos de investigación) para la Asociación EURATOM-CIEMAT (la antigua Junta de Energía Nuclear) o para el Instituto Nacional de Meteorología. Finalmente, la lista de publicaciones termina con una miscelánea de 18 diversos escritos publicados.

Ha sido director de trece tesis doctorales y ponente de otras cuatro (todas "Cum Laude"). Ildefonso ha impartido más de cuarenta conferencias o seminarios en universidades o centros académicos extranjeros; por haberla pronunciado en un centro de máximo nível no puedo dejar de citar la última que me consta, en Mayo de este año, en el prestigioso Collège de France, sobre modelos de climatología. Ha impartido además numerosas conferencias expositivas en España y en el extranjero, así como cursos o ciclos de conferencias. Ha asistido a más de cuarenta congresos internacionales y más de veinte nacionales.

La categoría científica de Ildefonso ha sido reconocida internacionalmente habiendo sido invitado, desde 1987, a numerosos Comités Editoriales de revistas de los más diversos confines (Univ. Autónoma de Barcelona, Santiago de Chile, Japón, Toulouse, de esta Academia, Journal of Interfaces and Free Boundaries). En otro caso fue elegido para ello: Revista Matemática de la Universidad Complutense (1987-1995).

Ha participado en numerosos trabajos de evaluación y en comités científicos para organismos oficiales. Merece citarse en particular que es uno de los seis miembros del Committee on Atmosphere, Ocean and Environment de la Unión Matemática Internacional; así mismo, es uno de los once miembros del Scientific Committee of the Thrid European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000) de la European Mathematics Society.

Es también notable su capacidad organizadora, pues ha sido organizador y coorganizador de diecisiete reuniones científicas. Cabe mencionar entre ellas el Primer Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA), en 1979, congreso que instaurá una serie, el último de los cuales, el decimoquinto, se acaba de celebrar, el pasado mes de septiembre. Ha sido miembro de la Comisión Gestora de la Sociedad de Matemática Aplicada (SEMA), en 1991, de la que fue elegido Presidente en 1994 y, más recientemente, ha sido miembro de la Comisión Gestora de la reconstitución de la Real Sociedad Española de Matemáticas, habiendo sido elegido, el pasado mes de Septiembre, miembro de su Junta de Gobierno.

Por últímo, aunque necesariamente he tenido que omitir otros detalles que aparecen en su currículum, no quiero dejar de comentar que Ildefonso ya fue elegido Académico Correspondiente Nacional de esta Academia en Junio de 1990 (habiendo obtenido el premio de matemáticas del año 1980), que desde Febrero de 1991 es también Correspondiente de la Academia Canaria de Ciencias (que le otorgó su premio en 1989) y que el 29 de Marzo de 1996 fue investido Doctor Honoris Causa por la universidad francesa de Pau et des Pays de l’Adour.

A continuación me referiré a su discurso. Hemos recién oído el bien trabajado discurso de Ildefonso. En un primer capítulo introductorio nos habla de sus dificultades y sobre todo de las diversas tentativas de estructuración de su discurso. Es natural, y lo justifica y establece explícitamente, que no puede dejar de darnos cuenta de aquello que es la razón decisiva de su presencia aquí y que tiene un gran valor testimonial, so pena de defraudar a todos los oyentes y lectores. De ello se ocupa profunda y brillantemente en el tercero y último capítulo de su discurso, que de manera muy gráfica titula *Las matemáticas del mundo.* El capítulo constituye una espléndida exposición de algunos importantes y muy actuales problemas y métodos de la matemática aplícada. J.-L. Lions (*El Planeta Tierra*. Traducción de M. Artola y J.I. Díaz. Instituto de España, Madrid, 1990) da cuenta de una metodología general para abordar el estudio y resolución de estos problemas extraordinariamente complejos. En primer lugar se procede a su modelización a través de técnicas de análisis matemático y en general mediante sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, en general no lineales. Luego, gracias a la inmensa capacidad de los superordenadores actuales para llevar a cabo complejísimos cálculos numéricos, es posible simular el comportamiento del sistema en estudio. Finalmente, gracias a las teorías de control de sistemas regidos por sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, es posible influir en el comportamiento de los sistemas y asegurar su funcionamiento de acuerdo con los objetivos proyectados. Con el empleo de esta metodología, Ildefonso muestra además que forma parte de un pequeño y brillante grupo de matemáticos españoles, que trabajan en colaboración con un numeroso grupo de importantes matemáticos franceses y de otras nacionalidades, como ya he relatado anteriormente.

Ahora bien, el autor también escribe:

> Mi pretensión inicial fue aportar un pequeño mosaico de reflexiones sobre el mundo de la ciencia, su sociología y en particular sobre aspectos relacionados con la trasmisión, divulgación y comunicación de los científicos con su entorno humano.

Ildefonso nos da a conocer sus tanteos y sus dudas; descubre fascinado que son abundantes los matemáticos *normales* (en el sentido de Kuhn) como él que se han aventurado a discurrir por los mundos de la filosofía, de la sociología o de la estética, dejando a un lado, por cierto tiempo, la tarea de demostrar teoremas. A pesar de las dificultades afirma:

> Durante el tiempo de mi preparación de este discurso [el que acabamos de escuchar] no dudé en mi decisión de abordar este tipo de temas generales.

Así pues, Ildefonso nos ha deleitado con este capítulo segundo sobre *La comunicación en el mundo de la ciencia.*

La decisión de Ildefonso de poner, después del capítulo introductorio, un segundo capítulo sobre la comunicación en el mundo de la ciencia, que consta de cuatro secciones y una extensa bibliografía, indica ya la amplitud de sus intereses. Esta apertura, para la cual muestra que tiene excelentes dotes, le enriquece culturalmente. Lejos de señalarle como matemático alienado de su principal trabajo profesional, esta apertura le capacita para cumplir, por lo menos a lo largo del tiempo, con importantes misiones de esta Academia, y abre la esperanza de su colaboración en este campo con otros muchos académicos con análogas aspiraciones. Estimo que, para convencerse de lo que digo en este párrafo, basta leer con atención, por ejemplo, lo que escribe en la sección tercera sobre las *Comunicación entre distintos lenguajes científicos.*

Para concluir esta presentación querría dar a conocer muy brevemente una faceta del carácter de Ildefonso, que me parece reveladora y poco conocida; y que sin duda se debe en parte a que es oriundo de la singularísima ciudad de Toledo y en ella vivió su juventud. Le han impactado su historia, tres siglos (V-VII) de concilios toledanos; la pacífica convivencia de tres culturas con su Escuela de traductores (ss. XII-XIII); y la incomparable variedad y belleza de sus incontables tradiciones, monumentos y obras de arte, especialmente los cuadros de El Greco y de otros numerosos pintores entre los que está Goya.

La faceta de Ildefonso que deseo señalar es su finura estética y la capacidad de relacionar su quehacer matemático con la belleza estética de una obra de arte. He aquí dos breves textos, que Ildefonso pronunció en el discurso de la sesión de su investidura como Doctor Honoris Causa de la Université de Pau et des Pays de l'Adour:

> Al fin de su larga vida, en 1824, Francisco de Goya buscó asilo en Burdeos, villa en la que murió en 1828. Fue en Burdeos, después de restablecido de sus pesares, de la amargura y de las crisis padecidas, cuando pintó una obra maestra que corona toda una existencia dedicada al arte, *La laitière de Bordeaux* -La lechera de Burdeos- en la que críticos cualificados creen ver el origen del arte impresionista.

He aquí el segundo texto:

> Termino con una corta consideración personal de otra naturaleza: la matemática y las bellas artes están mucho menos alejadas de lo que se cree generalmente. Cuando se

> modeliza un problema real, se tienen en cuenta argumentos de simplicidad, en los que la estética desempeña un importante papel, para dar una visión parcial de una realidad compleja. ¿Acaso no hay puntos en común con Goya cuando nos deja adivinar sus sentimientos, incluso en un género tan estricto como es el de los retratos? El análisis matemático de los modelos ha recurrido con frecuencia a técnicas "abstractas", un proceso que también puede descubrirse en la obra cubista de Juan Gris o de Picasso.

Al considerar qué reflexiones o comentarios podía yo formular a propósito del discurso de Ildefonso, me decidí a preparar algo sobre la axiología de la ciencia. Me parece que es algo que no se aleja demasiado de lo tratado por Ildefonso en su capítulo *La comunicación en el mundo de la ciencia*, que guarda relación estrecha con esta Academia de Ciencias y que es apto para un público como el presente. Aunque se concede generalmente que los valores son producto de la voluntad del que los valora, de acuerdo con Nietzsche, no por eso dejan de desempeñar un papel universal y fundamental en nuestra cultura. Tratándose de la ciencia, sin duda su valor fundamental, universal e indiscutible es el valor de verdad; pero aquí no me voy a ocupar de él, pues ya he escrito bastante sobre la ética de la ciencia e incluso tengo actualmente una comunicación pendiente de publicación sobre este tema. Otros valores importantes de la ciencia son su aplicabilidad y su unidad; he elegido este último, de modo que hablaré esquemática e históricamente de la Unidad de la Ciencia, como posible valor de las ciencias opuesto al antivalor de multiplicidad o al de fragmentariedad. Adelantemos, ya, que no cabe esperar que el conjunto de todas las ciencias tenga una unidad, como, por ejemplo, la de las matemáticas.

Al considerar la unidad de la ciencia me ceñiré a la ciencia moderna que surge en el siglo XVII, el siglo de los genios; y la actitud filosófica en la que trataré de la emergencia y evolución del valor de unidad de la ciencia será la del sistema positivista.

Siguiendo a C.U. Moulines (*Exploraciones metacientifícas*, 1982) pueden distinguirse cuatro períodos o etapas en la gestación del sistema positivista: a) un protopositivismo francés anterior a Comte; b) el positivismo clásico de Comte; c) el positivismo crítico alemán; y d) el positivismo lógico del Círculo de Viena. Vamos a estudiar el valor de unidad de la ciencia a lo largo de estos cuatro períodos.

a) El protopositivismo emerge y se desarrolla en Francia a lo largo del siglo XVIII, alrededor de los fisicomatemáticos franceses, entre los que, en relación con nuestro tema, descuellan d'Alembert (1717-1783) y Lagrange (1738-1813). Tiene sus raíces en la física de Newton, el mecanicismo geométrico de Descartes y el empirismo de Hume. Así, d'Alembert (*Traité de Dynamique*, 1743) escribe:

> [Las fuerzas newtonianasl son seres oscuros y metafísicos; que no son aptos más que para difundir las tinieblas en una ciencia que en sí misma debería ser clara.

En este período nace una preocupación por la metodología científica y surge la afirmación de la autonomía de las ciencias. La tarea propia de las ciencias es establecer relaciones matemáticas entre los fenómenos físicos. Hay que rechazar la existencia de esencias de las cosas, que son causas máximamente ocultas; así mismo hay que rechazar las explicaciones metafísicas, teológicas y teleológicas. Finalmente, se instaura la fe en el progreso continuo de la comprensión científica del mundo, como única forma del conocimiento. Todo esto era nuevo y tiene relación con nuestro tema.

Con todo, en los círculos mencionados, anteriores a la Revolución (1789), no se encuentra ninguna referencia a la unidad o unificación de las ciencias mediante una estructura conceptual común. Pero, todavía dentro de este primer período y dentro del grupo de "ideólogos", que forman una corriente filosófico-psicológica surgida de la Revolución, Moulines cita el siguiente texto debido al ideólogo y médico G. Cabanis (1757-1 808):

> Es sin duda una idea bella y grandiosa la de considerar todas las ciencias y artes en mutua conexión como un todo indivisible, o como las ramas de un mismo tronco unidas por su origen común, pero más aún por el fruto que han de aportar todas por igual, la plenitud y la felicidad del hombre.

Aunque en este texto la unificación aparece más como ideal utópico que como posibilidad histórica.

Por otra parte Lavoisier había dado ya carácter científico a la química. Al final del período, el Conde de Saint-Simon (1760-1825), del que Augusto Comte fue secretario, fundaba con sus discípulos una escuela sociológica y albergaba la idea de desarrollar una ciencia de la sociedad tan exacta como la física. Todavía cabe mencionar la creación de la École Polytechnique, que sin duda contribuyó a la idea de unificación de las ciencias.

b) El positivismo clásico es el nombre que se ha dado a la obra de Augusto Comte (1798-1857), expuesta principalmente en el *Cours de philosophie positive* (1830-1842) y en el *Discours sur l'esprit positif* (1844). Se trata de una verdadera filosofía de la ciencia, que en su mayor parte no será asumida por los científicos filósofos del Círculo de Viena. Por ejemplo, Comte asume como definitivos y no revisables los resultados científicos ya adquiridos: "todo resultado positivo es verdadero"; en su sistema no es concebible la emergencia de una revolución científica en el sentido de Kuhn.

Por su incidencia en nuestro tema y por su importancia histórica vamos a dar un brevísimo resumen de la filosofía de Comte. La filosofía de las ciencias comtiana formula una estructuración conceptual de la ciencia en la que debería resplandecer una suprema unificación y unidad de todas las ciencias presentes y futuras. Para ello, después de haber asumido y desarrollado ampliamente la ley de los tres estados (Lección 1^a, del *Cours*), establece la ley enciclopédica para llevar a cabo una nueva clasificación de todas las ciencias, las ya desarrolladas, que parece que él considera ya como definitivas, y aquéllas como la "física social", algo así como las hoy llamadas ciencias humanas, que se está desarrollando contemporáneamente a Comte y de la que él mismo quiere ser un estudioso y un pionero.

Comte señala repetidamente la existencia de cuatro categorías principales de fenómenos naturales, ya incorporados a las ciencias; a saber, los fenómenos astronómicos, los físicos, los químicos y los fisiológicos (hoy biología); y denuncia el vacío esencial de los fenómenos sociales, que, si bien están implícitamente incluidos en los fisiológicos, merecen por su importancia y por las dificultades propias de su estudio ser consideradas como una categoría distinta y fundamental (*Cours*, lec. 1^a).

Otro criterio de clasificación lo obtiene Comte a partir de la observación de que cualquier ciencia puede ser expuesta desde una perspectiva *histórica* y desde una perspectiva *dogmática* (hoy diríamos *sistemática*). La dogmática equivale a la exposición de la ciencia como se hace en un manual avanzado. Naturalmente, toda exposición de una ciencia ha de ser una mezcla de exposición histórica y exposición dogmática.

Con las cuatro categorías de fenómenos naturales y el criterio mencionado, Comte divide todas las ciencias, primero en dos grupos: inorgánico y orgánico. Subdivide el primero en astronomía (que incluye la óptica) y física; y el segundo en física orgánica o fisiología (hoy biología) y física social (hoy ciencias humanas). Las matemáticas por su ubicuidad e importancia son más bien consideradas como instrumento de todas las ciencias y son incorporadas como preámbulo de la astronomía. Finalmente, la física es identificada con la mecánica; y la química, ya desarrollada y según el parecer de Comte (contrario al parecer de Laplace, *Exposition des systèmes du monde*, 1814) no reducible a la física, es considerada una nueva ciencia. Así, todo el espectro científico queda cubierto por cinco ciencias: astronomía, física, química, fisiología y física social; ordenadas de modo que cada una está fundada en las anteriores y es fundamento de las siguientes. Este es el resultado de la aplicación de la ley enciclopédica.

Comte pone además de relieve la jerarquía interna del conjunto de estas cinco ciencias, que son y serán en adelante "como los cinco elementos de una ciencia única: la ciencia de la Humanidad". (*Disc*, n. 70; ya en los núm. 19-20 había tratado este tema). Comte consigue así un programa conceptual que unifica todas las ciencias; no porque "todos los fenómenos naturales fuesen en el fondo idénticos", lo cual no es posible; sino porque se da la "única unidad indispensable, que es la unidad de método" (*Cours*, final de l*ª* lección). Es decir, el método positivo basado exclusivamente en la lógica y en la observación y experimento; pero, del cual ni siquiera se piensa en el problema del lenguaje.

Como es obvio la filosofía comtiana depende estrechamente de la situación contemporánea de la ciencia, que Comte consideraba substancialmente como definitiva. He aquí un breve juicio de Moulines:

> De ahí el tono dogmático, acrítico, casi sacerdotal y, en definitiva, aburrido con que Comte y sus discípulos exponen las bases de las ciencias naturales, en total contraposición con las fases anteriores y posteriores del positivismo (p. 311).

c) El tercer período, en el que se desarrolla el *positivismo critico*, se extiende desde Comte hasta 1921 en el que nace el Círculo de Viena. Se encuentran en este período científicos como H. von Helmholtz (1821-1894), G.R. Kirchhoff (1824-1887), H.R. Hertz (1857-1894) y E. Mach (1838-1916), que se ocupan también de la filosofía de la ciencia, por ejemplo desean aclarar el oscuro concepto newtoniano de fuerza; pero no tratan directamente de la unidad de la ciencia. Con todo el primero es importante por su contribución a la fisiología de los sentidos, pues ejercerá importantes influencias en Mach y en Carnap. He aquí dos textos de Helmholtz:

> El punto de contacto más estrecho entre la filosofía y las ciencias naturales es la disciplina de las percepciones sensoriales de los seres humanos.
>
> La fisiología de los sentidos es el campo limítrofe en el que se entremezclan los dos grandes departamentos del conocimiento humano, que se suelen distinguir bajo los nombres de ciencias naturales y ciencias del espíritu, en el que se nos imponen problemas [...] que sólo se pueden resolver a través de un esfuerzo común (V. Moulines, p. 300).

Mach ya en 1868 publica un artículo en el que rechaza por oscura la definición de masa como *quantitas materiae* y rechaza su concepto como básico o primitivo. Pretende un reduccionismo cinemático, lo que cree conseguir para el concepto de masa, apelando al tercer principio de Newton y definiendo primero la igualdad de masas e introduciendo luego una escala. Mach busca las relaciones de dependencia entre fenómenos y así evita toda apelación a la metafísica. Así para la mecánica Mach sólo admite como primitivas las nociones espacio-temporales, pues son las únicas directamente observables.

Mach publica en 1885 el libro *Análisis de las sensaciones* y siguen seis ediciones más antes de su muerte (1916). Para nuestro tema de la unidad o unificación de la ciencia el desarrollo del programa de este libro de Mach habrá sido decisivo. El programa de investigación que propone Mach, que está en línea con el ya insinuado por Heimholz en el texto transcrito, pretende dar a luz una psicofisiología de la cual puedan derivarse conceptos, que por un lado sean empíricamente claros y por otra parte permitan relacionar entre sí los conceptos básicos de las ciencias humanas con los de las ciencias naturales.

Para Mach, en orden al conocimiento, el mundo es exclusivamente un mundo de sensaciones y toda observación de un objeto del mundo se reduce a hacerle corresponder un conjunto de sensaciones.

El conocimiento se va construyendo por reiteración, mediante sucesivos conjuntos de funciones y relaciones de previos conjuntos de sensaciones; y todo ello prescindiendo siempre del sujeto, pues lo único que se constata empíricamente son los sucesivos conjuntos de conjuntos de sensaciones y los resultados de las aplicaciones de la lógica o de las matemáticas.

d) El cuarto y último período lo protagoniza el Círculo de Viena. Sus raíces próximas son en primer lugar las adquisiciones del protopositivismo, continuado por Helmholtz y por Mach; sus raíces lejanas son las que hemos mencionado del protopositivismo: la física de Newton, el mecanicismo geométrico de Descartes y el empirismo de Hume.

Pero, cuenta con un nuevo medio de gran potencialidad, del que los científicos del Círculo de Viena harán un uso continuo; me refiero a la lógica matemática desarrollada por Whitehead y Russell en *Principia Mathematica* (1913). De ahí que la nueva filosofía de la ciencia reciba el nombre de *Empirismo lógico* o también *neopositivismo*. El Círculo de Viena nace el 1921 y propiamente dura hasta el 1938, en el que Austria es anexionada por Alemania; pero varios de sus miembros volverán a reunirse en Cambridge (Massachussets, USA) después de la guerra. Neurath se instalará en el Reino Unido, pero ya en 1938 funda el *Institute of Unified Science* en La Haya y se publica el *Journal of Unified Science* de vida muy efímera, pues al acabar la guerra volvió a publicarse el *Erkenntnis*.

Como consecuencia del profundo trabajo llevado a cabo por los positivistas críticos y especialmente por Mach, los problemas del Círculo de Viena giran en torno al lenguaje. Quizás como consecuencia de los *Principia Mathematica* se asume que toda ciencia tiene que estructurarse en una teoría científica al modo como se estructuran las teorías matemáticas; de donde se sigue la necesidad e importancia de fijar el lenguaje de cada teoría científica.

De ahí que se asuma (1923): Toda teoría científica ha de formularse en un lenguaje matemático extensional L. Los símbolos o elementos de L se dividen adecuadamente en símbolos lógico-matemáticos, o pertenecientes al vocabulario observacional L_0 o pertenecientes al vocabulario teórico L_T. Todo elemento de L_0 ha de ser directamente observable. Todo elemento de L_T ha de tener una definición explícita en términos de los símbolos lógico-matemáticos y de los elementos de L_0. Este programa es lo que viene llamándose la formulación inicial de la posición heredada.

Alrededor de 1930 Neurath introduce el tema de la Unidad de la Ciencia con el término *Einheitswissenschaft*, que puede traducirse por “Unidad de la Ciencia” o por “Ciencia Unificada”. Con las nociones del lenguaje que hemos dado, la tesis que asegura el valor de Unidad de la

Ciencia puede anunciarse: “Existe un lenguaje científico universal, del cual puede extraerse el lenguaje específico de cualquier ciencia”. Si esto se pudiera demostrar, la Ciencia Unificada gozaría del valor de unidad como opuesto al antivalor de multiplicidad.

Muchos fueron los que, en seguimiento de Mach, dedicaron su investigación a establecer este lenguaje universal. Entre todos, por su inmensa labor investigadora y por su agudeza sobresale R. Carnap. Las primeras investigaciones se apoyaron en la definición de sentido de una proposición, definición dada por Wittgenstein (*Tractatus*, n. 4063). Pero esta definición no es aplicable a muchos términos, en particular no lo es, dentro de una teoría a los elementos de su vocabulario teórico; e incluso cuando es aplicable, se mostraron las dificultades a menudo insalvables de la verificación experimental; basta pensar en C. Hempel o N.R. Hanson.

Carnap abordó el problema de la reducción, menos restrictiva que la estricta definición, de los elementos o términos del vocabulario teórico al lenguaje observacional en su importante obra *La construcción lógica del mundo* (1928), procediendo eliminativa y ordenadamente a la reducción de términos teóricos a otros de grado inferior. Emplea como lenguaje fundacional de base un lenguaje fenomenológico apelando a las experiencias de un sujeto; pero ante el problema de una falta de intersubjetividad, que llevaría a una falta de objetividad científica, lo abandona. Pasa entonces a emplear un lenguaje fisicalista y logra la reducción de muchos términos teóricos, especialmente en las disciplinas científicas más recientes.

Pero hay otros términos teóricos (predicados como “soluble”) muy frecuentes, los llamados “disposicionales”, cuya reducción a un lenguaje fenomenológico o fisicalista resulta prácticamente imposible según el mismo Carnap en *Testability and Meaning* (1936).

Todavía quedan otros términos teóricos, que Moulínes (1993) caracteriza como entídades teóricas, términos que tienen un referente real, pero inobservable por principio; por ejemplo fotón, quark, subconsciente.

Por lo que se refiere al contenido empírico de las teorías científicas, hay dos tipos reconocidos de reducción o eliminabilidad no definicional de términos teóricos; son los llamados métodos de Craig (1956) y de Ramsey (1960). Un ejemplo paradigmático es el concepto de fuerza en la mecánica clásica de partículas (Sneed, 1971). Pero esto rebasa los límites del neopositivismo y nos introduciría en los programas estructuralistas. (Para el interesado nos remitimos a Balzer, Moulines, Sneed, 1987, *An Architectonic for Science*, Reidel; J.A. Díez, 1997 y C.U. Moulines, *Filosofia de la Ciencia*, Barcelona, Ariel).

Para concluir este tema sobre la Unidad de la Ciencia, he aquí unas palabras de Y. Bar-Hillei en 1973:

> En 1935 Carnap comprendió claramente que esta creencia de la unidad de la ciencia [mediante definiciones estrictas] era insostenible y la debilitó a la de la unidad de la ciencia mediante la reducción de los conceptos, en el sentido técnico de este término [reducción], que él explicó cuidadosamente. Hoy día quedarán pocos, si es que queda alguno que se adhieran a esta creencia, incluso a la debilitada. Carnap mismo, y con él la mayoría de los empiristas lógicos, se han dado cuenta de que la mayoría de los términos, si no todos, que aparecen en las teorías científicas no son definibles, ni reducibles a los así llamados términos observacionales del lenguaje ordinario (thing- language) cotidiano, aunque no se ponga ningún límite a la longitud de la cadena de las sentencias definitorias o reductoras. Esto fue, por supuesto, el fin de la tesis de la unidad de la ciencia, tanto en su forma original como en la debilitada (*Modern Science and Moral Values*, ICF. Inc., New York, London, 1973).

Podemos resumir, lamentablemente, que de la ciencia, antes que demostrar su unidad hemos mostrado su fragmentariedad. Con todo, cabe esperar que esta multiplicidad no sea definitiva. Por ejemplo, parece que ha de ser posible elaborar una noción de método científico que valga, no sólo para el estudio sincrónico de las ciencias, sino también para un análisis diacrónico de modo que unifique el conjunto de todas las ciencias.

He dicho.