

REDUCCION DE LA CONJETURA DE POINCARÉ
A OTRAS CONJETURAS GEOMETRICAS

por

JOSE M.^a MONTESINOS AMILIBIA

(PUBLICADO EN LA «REVISTA MATEMÁTICA HISPANO - AMERICANA»
4.^a SERIE - TOMO XXXII - NÚM. 1-2)



M A D R I D

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO
J. GARCÍA MORATO, 122.—TELÉF. 233 06 19

1 9 7 2

REDUCCION DE LA CONJETURA DE POINCARÉ A OTRAS CONJETURAS GEOMETRICAS

por

JOSE M.^a MONTESINOS AMILIBIA

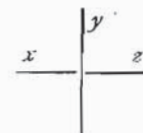
I. INTRODUCCIÓN

Por una variedad orientable entenderemos aquí una 3-variedad compacta, conexa, sin borde y orientable. Una variedad orientable es un recubridor ramificado sobre un nudo de S^3 , en donde el índice de ramificación de un punto en la preimagen de un punto singular es ≤ 2 (cfr. [1], [2] y [5]). En un recubridor de este tipo con n hojas sea m el máximo entero tal que hay un punto singular cuya preimagen consta de m puntos con índice de ramificación 2 y $n - 2m$ puntos con índice de ramificación 1; entonces diremos que ese recubridor es del tipo $(m, n - 2m)$.

El principal resultado de este trabajo será:

I.1. TEOREMA.—Toda variedad orientable es un recubridor ramificado de tipo $(1, n - 2)$.

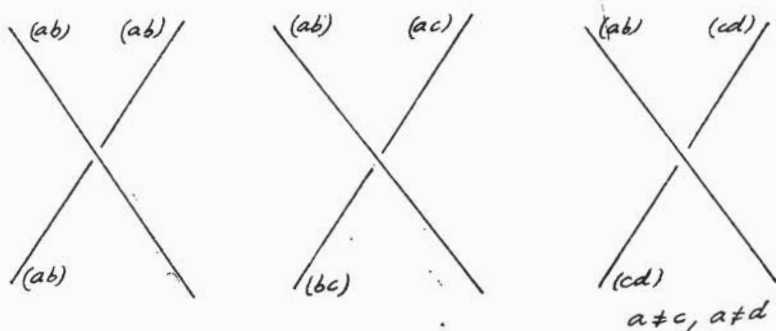
Sea N un nudo en S^3 que consta de las componentes N_1, \dots, N_r . Se dice que N está *coloreado* (tipo $(m, n - 2m)$) si puede asignarse a cada paso x de N una permutación (que llamaremos también x) entre los índices $\{0, \dots, n - 1\}$ que se puede escribir como producto de ciclos disjuntos de longitud 2 y de tal manera que en un punto doble de la forma



se tenga la relación $x y z y = 1$ entre las permutaciones asociadas a los tres pasos que intervienen en ese punto doble; la asignación debe de ser transitiva, y para algún paso la permutación correspondiente consta de m ciclos; además el número de ciclos de la permutación correspondiente a otro paso es $\leq m$. Si N está coloreado de este modo entonces $x = y z y$, y por tanto x, z son conjugadas. Esto implica que las permutaciones asignadas a los pasos de N_i ($1 \leq i \leq r$) tienen todas el mismo número de ciclos.

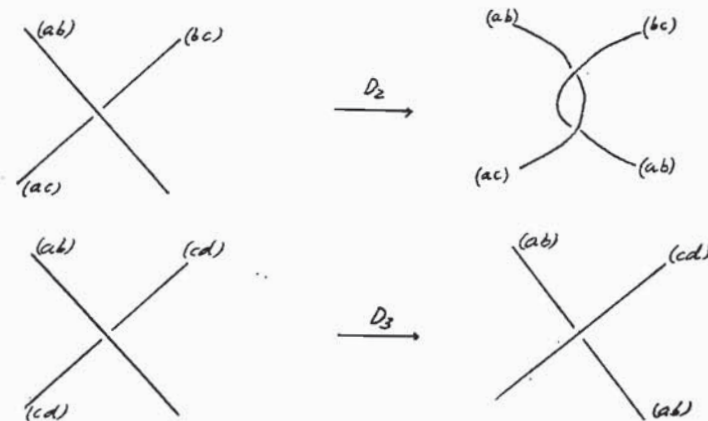
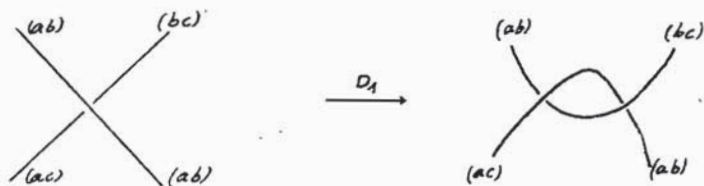
A cada nudo N con una coloración (tipo $(m, n - 2m)$) le corresponde un recubridor ramificado de tipo $(m, n - 2m)$ y construido mediante un corte de S^3 relativo a N . Además todo recubridor de tipo $(m, n - 2m)$ se obtiene así (cfr. [8]).

En [8], teorema V.2.2, se prueba que un nudo N tiene una coloración tipo $(1, n - 2)$ si podemos asignar a cada paso de la proyección de N un ciclo de longitud 2 entre los índices $\{0, \dots, n - 1\}$, de tal modo que en un punto doble de la proyección aparezca una de las tres situaciones siguientes:



y además que la asignación sea transitiva [8] y [3, pág. 92].

En [8] definimos deformaciones en la proyección de un nudo coloreado (tipo $(1, n - 2)$) con arreglo a las figuras



Al aplicar a un nudo coloreado (tipo $(1, n - 2)$) deformaciones D_1, D_2, D_3 se obtiene un nuevo nudo coloreado. Diremos que dos nudos coloreados (tipo $(1, n - 2)$) son *congruentes* [8] V.6) si puede pasarse de uno a otro mediante aplicación de un número finito de deformaciones D_1, D_2, D_3 , y de operaciones combinatorias elementales de Reidemeister [10, pág. 7] (*).

En [8, teorema V.3.1] se prueba que las variedades recubridoras correspondientes a nudos congruentes son homeomorfas.

Diremos que un nudo coloreado (tipo $(1, n - 2)$) es *separable* si es congruente con un nudo coloreado que puede distribuirse en $n - 1$ nudos disjuntos (**) N_1, \dots, N_{n-1} , en donde N_i tiene todos sus pasos coloreados con la permutación $(0 i)$ para $1 \leq i \leq n - 1$.

En [8, V.6.1] formulábamos la siguiente conjetura:

I.2. CONJETURA.—Todo nudo coloreado (tipo $(1, n - 2)$) es separable.

También demostrábamos en [8, V.6.2] el siguiente teorema:

(*) Si a un nudo coloreado (tipo $1, n - 2$) N , se le aplica una operación combinatoria de Reidemeister, se obtiene un nudo N' que admite de modo natural una coloración (tipo $1, n - 2$) de modo que los recubridores correspondientes a N y N' son homeomorfos [8].

(**) Dos nudos N y N' diremos que son disjuntos cuando haya en S^3 una superficie esférica S^2 tal que N y N' están en componentes distintas de $S^3 - S^2$.

I.3. TEOREMA.—Módulo la conjetura I.2 una variedad orientable que sea un recubridor del tipo $(1, n - 2)$ es también un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un nudo.

Como consecuencia ahora de I.1 y I.3 puede enunciarse:

I.4. TEOREMA.—Módulo conjetura I.2 toda variedad orientable es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un nudo de S^3 .

En vista de los resultados de F. Waldhausen [12] puede formularse la conjetura de Poincaré para el caso de recubridores cíclicos de dos hojas, así:

I.5. CONJETURA.—Un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un nudo no trivial, no es simplemente conexo.

En vista del teorema I.4 se tiene:

I.6. TEOREMA.—La respuesta afirmativa a las conjeturas I.2 y I.5 implica la conjetura de Poincaré.

II. RESULTADOS CONOCIDOS

Adoptaremos el punto de vista semisimplicial como se enuncia en [7] o en [8].

II.1. Corte de una 3-variedad.

Sea L^3 un poliedro de una 3-variedad conexa M^3 , contenido en un poliedro C^2 de M^3 . Siguiendo a Neuwirth [9] llamaremos a C^2 un *corte de M^3 relativo a L^3* (splitting complex), cuando $M^3 - C^2$ sea conexo y simplemente conexo.

Tomemos ahora una unión disjunta de tetraedros cerrados en correspondencia biunívoca con los tetraedros de M^3 e identifiquemos estos tetraedros a lo largo de caras cerradas que no estén en C^2 . Obtenemos así un poliedro H^3 y una aplicación natural $\Phi: H^3 \rightarrow M^3$, la cual identifica un par de caras cerradas de H^3 en una sola cara de C^2 . Diremos que H^3 es M^3 *cortado a lo largo de C^2* .

II.2. Nudos.

Un *nudo* en M^3 es un poliedro que es imagen topológica de n copias disjuntas de la 1-esfera (diremos que tiene *multiplicidad* n).

Sea N un nudo en la 3-esfera S^3 representada como $R^3 + \infty$, es decir como el espacio euclídeo tridimensional compactado con un punto. Supondremos que N está en posición regular [3] respecto a la superficie esférica $S^2 = R^2 + \infty$, en donde $R^2 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$. S^2 divide a S^3 en dos componentes. La adherencia de aquella componente formada de puntos de coordenada $z \geq 0$ se llamará H^- y llamaremos H^+ a la adherencia de la otra.

Los puntos D_1, \dots, D_m de la proyección de N sobre S^2 que tienen exactamente dos puntos en su fibra, se llamarán puntos dobles de la proyección. La fibra de D_i ($1 \leq i \leq m$) consta de dos puntos P_i y Q_i tales que $P_i \in {}^0H^-$ y $Q_i \in {}^0H^+$. Uniremos P_i con Q_i mediante un arco D_i^1 que se proyecta sobre D_i .

A las componentes de $N - (Q_1 + \dots + Q_m)$ las llamaremos *pasos*.

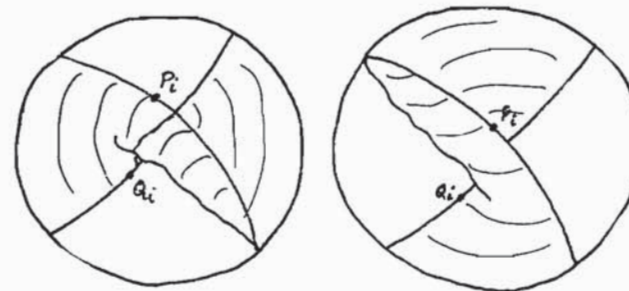


Fig. II. 2. 1.

Supondremos que N está contenido en S^2 salvo en un entorno V_i en S^2 de D_i ($1 \leq i \leq m$). Sea D^2 un disco contenido en S^2 y que contiene en su interior a la proyección de N , y sea $R T$ un arco tal que ${}^0R T \subset {}^0D^2 - (\text{proyección de } N)$ y ${}^1R T = R + T$, en donde R es un punto de ${}^1D^2$ y T es un punto de $N \cap S^2$.

Vamos a definir un corte C^2 de S^3 relativo a N , como hace Neuwirth en [9]. C^2 está compuesto de D^2 sustituyendo el entorno V_i por las dos bandas de fig. II.2.1, que se cortan en D^1_i .

Una descomposición celular de C^2 está compuesta por las 0-celdas R, T, P_i, Q_i ($1 \leq i \leq m$); las 1-celdas $D^2 - R, {}^0R T, D^1_i$ ($1 \leq i \leq m$) y las componentes de $N - (P_1 + Q_1 + \dots + P_m + Q_m)$; las 2-celdas son las componentes de $D^2 -$ (suma de las 1-celdas cerradas). Llamaremos a estas 2-celdas Z_0, \dots, Z_s , en donde Z_0 es la 2-celda que corta a D^2 .

Cortando ahora S^3 a lo largo de C^2 obtenemos lo que llamamos la hoja canónica H^3 y la aplicación natural $\Phi: H^3 \rightarrow S^3$ (cfr. [8] para las construcciones que siguen). $H^3 = \Phi^{-1}(C^2)$ y H^3 tiene una descomposición celular cuyas celdas son ${}^0H^3$ y las imágenes inversas de las celdas de C^2 . $\Phi^{-1}(Z_i)$ está compuesto de dos 2-celdas Z_i^+ y Z_i^- tales que $Z_i^+ \subset \Phi^{-1}(H^+)$ y $Z_i^- \subset \Phi^{-1}(H^-)$ para $0 \leq i \leq s$.

II.3. Construcción del recubridor ramificado correspondiente a un nudo coloreado (tipo $(m, n - 2m)$).

Sea N un nudo coloreado. Vamos a construir, como hacemos en [8], el recubridor ramificado correspondiente.

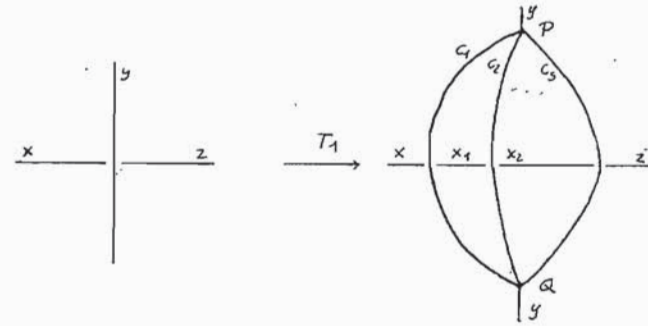
Sea Z_i ($1 \leq i \leq s$) una 2-celda de C^2 . Unimos D^2 con 0Z_i mediante un arco contenido en ${}^0D^2 - (V_1 + \dots + V_m)$. Este arco corta sucesivamente los pasos x_a, x_b, \dots, x_t hasta llegar a 0Z_i . Asignaremos a Z_i la permutación $x_a x_b \dots x_t = R(Z_i)$, y a Z_0 la permutación identidad.

Sean ahora H^3_0, \dots, H^3_{n-1} n copias de la hoja canónica H^3 . Para construir el espacio recubridor ramificado correspondiente al nudo coloreado hay que identificar entre sí estas hojas del modo siguiente: Sea $(Z_i^+)_a$ la 2-celda Z_i^+ en la hoja H^3_a ; asignaremos a $(Z_i^+)_a$ el índice $R(Z_i)(a) = b$ e identificaremos del modo natural $-(Z_i^+)_a$ con el cierre de la 2-celda $(Z_i^-)_b$.

III. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA I.1

Sea un nudo con una coloración (tipo $(m, n - 2m)$), vamos a demostrar el teorema I.1 en varios pasos.

Paso 1.—Sea $y = c_1 c_2 \dots c_s$ escrita como producto de ciclos de longitud dos. Aplicamos a N la siguiente deformación cuando $s > 1$:



asignando a los nuevos pasos las permutaciones indicadas en la figura, en donde

$$x_1 = c_1 x c_1, x_2 = c_2 x_1 c_2, \dots, x_{s-1} = c_{s-1} x_{s-2} c_{s-1}.$$

Obtenemos de este modo un grafo N' coloreado (*), es decir con asignación de permutaciones a sus pasos, de tal manera que sean compatibles con las relaciones que corresponden a los puntos dobles y a los puntos P y Q . Pues en efecto, se tiene que

$$x_{s-1} = (c_{s-1} \dots c_1) x (c_1 \dots c_{s-1})$$

y por tanto que

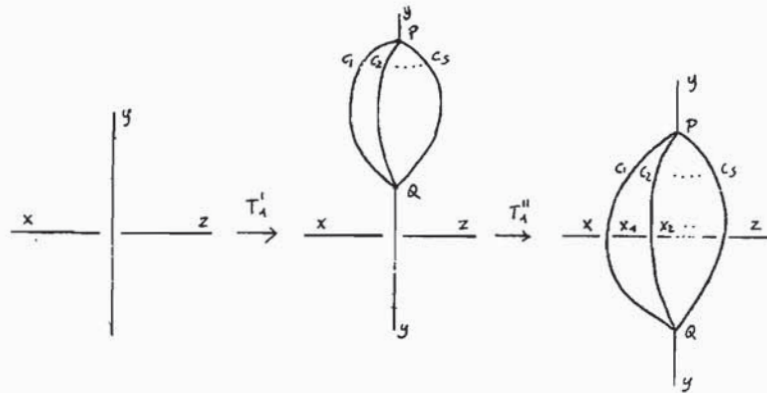
$$c_s x_{s-1} c_s = (c_s c_{s-1} \dots c_1) x (c_1 \dots c_s) = y x y = z;$$

y además para los puntos P y Q se cumple que $y = c_1 \dots c_s$.

III.1. Los recubridores ramificados correspondientes al nudo coloreado N y al grafo coloreado N' son homeomorfos.

(*) Las construcciones de II_3 , se aplican sin dificultad a los grafos coloreados que aparecen en este trabajo [8].

DEMOSTRACIÓN.—La deformación T_1 puede llevarse a cabo en dos pasos:



T_1 transforma el nudo N en el grafo coloreado N'' , y T_1'' transforma el grafo coloreado N'' en el grafo coloreado N' .

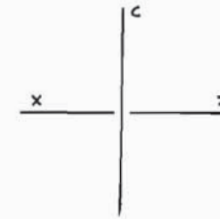
III.2. LEMA.—Las variedades recubridoras correspondientes a los grafos coloreados N y N'' son homeomorfas.

La demostración de este lema se dará en la sección IV.

Los grafos N'' y N' son tales que $\pi_1(S^3 - N'')$ y $\pi_1(S^3 - N')$ son isomorfos, y las representaciones [8] de dichos grupos sobre el grupo de permutaciones de los índices $\{0, \dots, n-1\}$, inducidas por las coloraciones de los grafos, son tales que se transforman una en la otra mediante el isomorfismo de los grupos fundamentales. Por tanto, los espacios recubridores ramificados correspondientes a los grafos coloreados N' y N'' son homeomorfos.

Paso 2.—Aplicando la deformación T_1 las veces que sea posible obtenemos un grafo coloreado N_1 , tal que los recubridores correspondientes a N y N_1 son homeomorfos.

Paso 3.—Sea ahora $x = c_1 \dots c_s$, escrito como producto de s ciclos de longitud dos; sea la situación



en donde c es un ciclo de longitud dos y

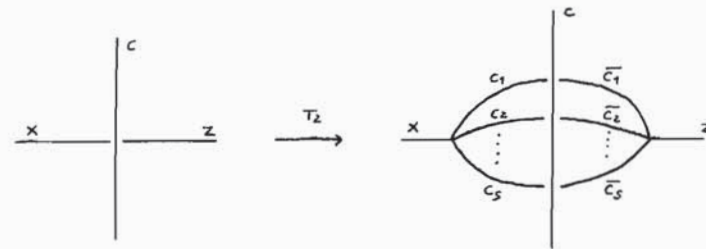
$$x = c x c = c c_1 \dots c_s c = (c c_1 c) \dots (c c_s c)$$

y haciendo

$$(III.3) \quad \bar{c}_1 = c c_1 c, \dots, \bar{c}_s = c c_s c$$

se tiene que $x = \bar{c}_1 \dots \bar{c}_s$.

Aplicemos a N_1 la siguiente deformación:



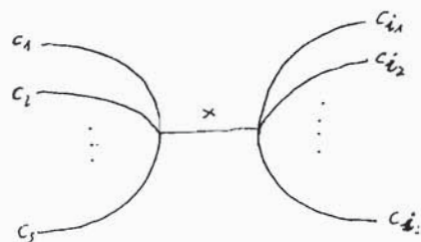
Obtenemos así un grafo N'_1 coloreado como indica la figura. Las ecuaciones III.3 muestran que la asignación de permutaciones es compatible con las relaciones.

III.4. Los recubridores ramificados correspondientes a N_1 y N'_1 son homeomorfos.

La demostración es análoga a la de III.1.

Paso 4.—Aplicando la deformación T_2 las veces que sea posible, obtenemos un grafo N_2 coloreado tal que los recubridores correspondientes a N_1 y N_2 son homeomorfos.

Paso 5.—Sea en N_2 una situación del siguiente tipo:



en donde c_1, \dots, c_s son ciclos disjuntos de longitud dos y $\{i_1, \dots, i_s\}$ es una permutación entre los índices $\{1, \dots, s\}$; además es:

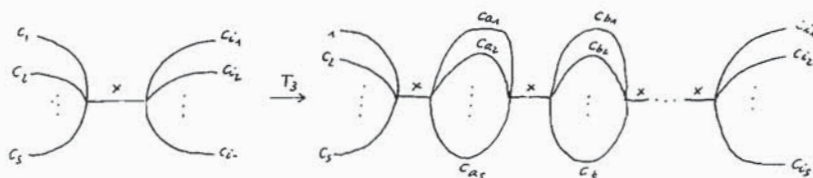
$$x' = c_1 \dots c_s.$$

Mediante una sucesión de trasposiciones de índices consecutivos, siempre puede pasarse de $\{1, \dots, s\}$ a la permutación $\{i_1, \dots, i_s\}$. Supongamos pues que se tiene la sucesión finita:

$$\{1, \dots, s\} \rightarrow \{a_1, \dots, a_s\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_s\} \rightarrow \dots \rightarrow \{i_1, \dots, i_s\}$$

de permutaciones, en donde cada una de ellas se obtiene de la anterior mediante una trasposición de dos índices consecutivos.

Aplicamos a N_2 la siguiente deformación:



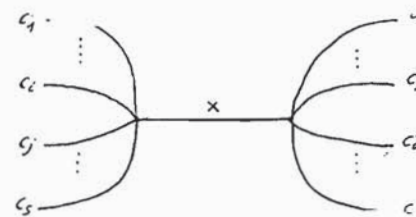
Obtenemos así un grafo coloreado N'_2 y se tiene:

III.5. Los recubridores ramificados correspondientes a N_2 y N'_2 son homeomorfos.

DEMOSTRACIÓN.—Basta aplicar el lema III.2.

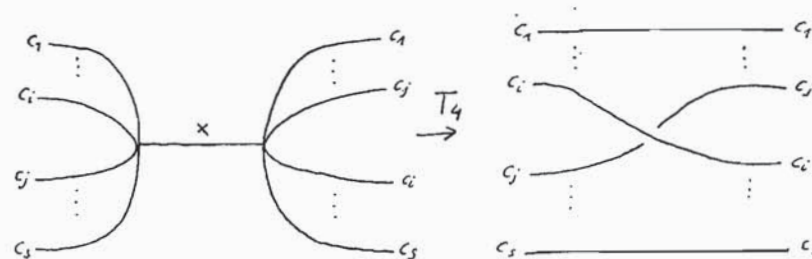
Paso 6.—Aplicando la deformación T_3 las veces que sea posible, obtenemos un grafo N_3 coloreado tal que los recubridores correspondientes a N_2 y N_3 son homeomorfos.

Paso 7.—Sea en N_3 una situación del siguiente tipo:



en donde c_1, \dots, c_s son ciclos de longitud dos disjuntos y $x' = c_1 \dots c_s$.

Aplicamos a N_3 la siguiente deformación:



En el punto doble que aparece al aplicar T_4 se tiene que

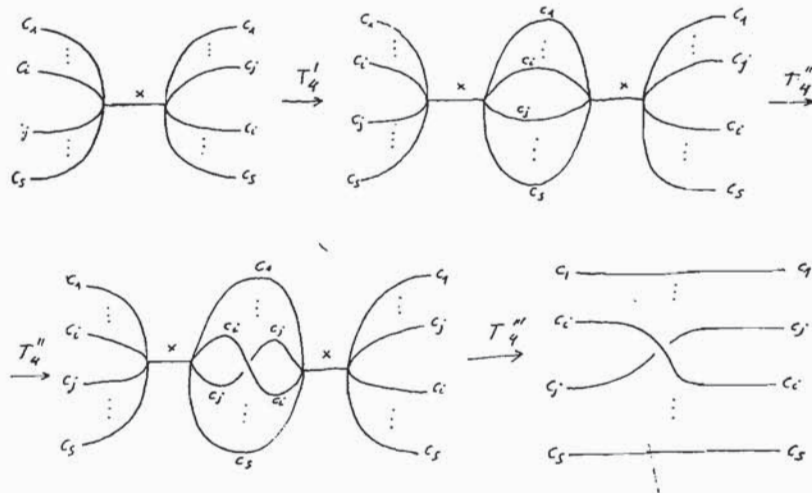
$$c_j c_i c_j c_i = c_j c_j c_i c_i = 1$$

ya que c_1, \dots, c_s son ciclos disjuntos.

Obtenemos así un grafo coloreado N'_3 y se tiene:

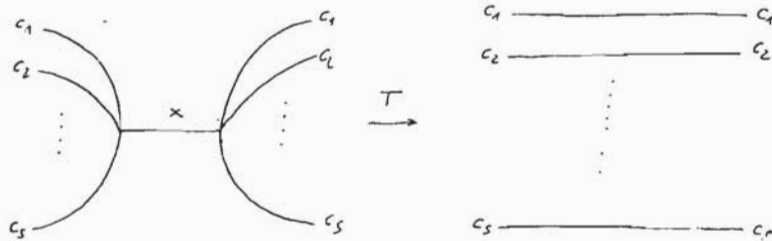
III.6. Los recubridores ramificados correspondientes a los grafos coloreados N_3 y N'_3 son homeomorfos.

DEMOSTRACIÓN.—La deformación T_4 puede llevarse a cabo en tres etapas:



Es evidente ahora que III.6 se deduce del siguiente lema:

III.7. LEMA.—Sea un grafo coloreado N' obtenido al aplicar al grafo coloreado N la siguiente deformación:



en donde c_1, \dots, c_s son ciclos disjuntos de longitud dos y $x = c_1 \dots c_s$; entonces los recubridores ramificados correspondientes a N y N' son homeomorfos.

La demostración se verá en la sección IV.

Paso 8.—Aplicando la deformación T_4 las veces que sea posible obtenemos un *nudo* N_4 coloreado tal que los recubridores correspondientes a N_3 y N_4 son homeomorfos.

Teniendo en cuenta los pasos 2, 4, 6, 8 y el hecho de que el recubridor ramificado correspondiente a N_4 es del tipo $(1, n - 2)$, se deduce el teorema III.1.

IV. DEMOSTRACIÓN DE LOS LEMAS III.2 Y III.7

La idea de la demostración de ambos lemas es la misma. Las deformaciones tendrán lugar en el interior de un entorno U : fuera de ese entorno los grafos N y N' permanecen inalterados. Después, mediante cortes C^2 y C'^2 de S^3 relativos a N y N' respectivamente, que coinciden fuera de U , se construyen los correspondientes recubridores ramificados $\Phi: M^3 \rightarrow S^3$ y $\Phi': M'^3 \rightarrow S^3$, sobre N y N' respectivamente. Es evidente entonces que $M^3 - \Phi^{-1}(U)$ y $M'^3 - \Phi'^{-1}(U)$ son homeomorfos. Después se probará que $\Phi^{-1}(U)$ y $\Phi'^{-1}(U)$ están compuestos del mismo número de bolas disjuntas; esto implica que M^3 y M'^3 son homeomorfos.

Todo queda pues reducido a construir $\Phi^{-1}(U)$ y $\Phi'^{-1}(U)$. Si H_i^3 y $\Phi_i: H_i^3 \rightarrow S^3$ son la hoja i -ésima y la proyección sobre S^3 correspondiente al corte C^2 , entonces $\Phi^{-1}(U)$ se obtiene identificando entre sí

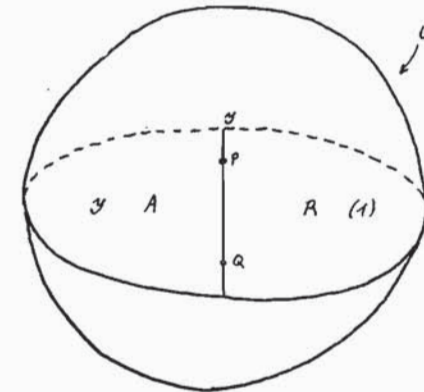


Fig. IV.1.1.

los miembros de la familia $\{\Phi_i^{-1}(U)\}_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$, de acuerdo con la ley de identificación determinada por los índices asignados a las 2-celdas de $\Phi_i^{-1}(U) \cap H_i^3$ para $i \in \{0, \dots, n-1\}$ (II.3).

IV.1. Demostración del lema III.2.

En fig. IV.1.1 aparece el entorno U que contiene al arco PQ . La situación podemos suponerla sin merma de generalidad como sigue: al construir el corte C^2 de S^3 relativo a N , la 2-celda Z_0 contiene a R y por tanto R va dotado con la permutación identidad.

Apliquemos la deformación T'_1 pero de tal modo que después de la deformación $(S^3 - U) \cap N$ permanece inalterado. Obtenemos así un grafo N' . En figs. IV.1.1 y IV.1.2 aparecen respectivamente $U \cap N$ y $U \cap N'$.

Sea C'^2 el corte de S^3 relativo a N' tal que

$$C'^2 \cap (S^3 - U) = C^2 \cap (S^3 - U).$$

En figs. IV.1.1 y IV.1.2 aparecen $C^2 \cap U$ y $C'^2 \cap U$ respectivamente con la asignación de permutaciones a las 2-celdas que proceden de Z_0, \dots, Z_s . Estas 2-celdas son en $C^2 \cap U$ las representadas por R, A , y en $C'^2 \cap U$ las R', A_1, \dots, A_s .

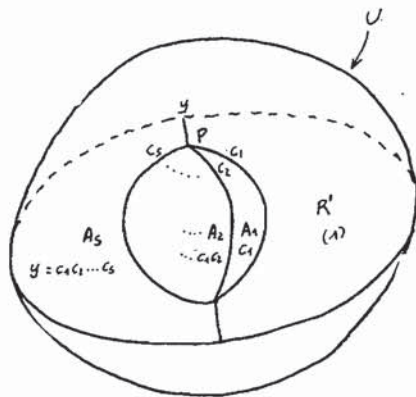


Fig. IV.1.2.

Es obvio que fuera de U coinciden las permutaciones asignadas a las 2-celdas de C^2 y de C'^2 .

Sean $H_i^3, \Phi_i^3: H_i^3 \rightarrow S^3$ la hoja i -ésima y la proyección de tal hoja sobre S^3 , obtenidos cortando S^3 a lo largo de C^2 . Análogamente sean $H_i'^3$ y $\Phi_i'^3: H_i'^3 \rightarrow S^3$ para C'^2 .

Vamos a construir $\Phi^{-1}(U)$ mediante identificación de los miembros de la familia $\{\Phi_i^{-1}(U)\}_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$. Estudiamos dos casos:

CASO 1.—El índice i pertenece al ciclo $c_k = (i j)$. En fig. IV.1.3 aparecen $\Phi_i^{-1}(U)$ y $\Phi_i'^{-1}(U)$. Si en fig. IV.1.3 se cambian i por j y j por i se obtienen $\Phi_j^{-1}(U)$ y $\Phi_j'^{-1}(U)$. Es obvio que $\Phi_i^{-1}(U)$ y $\Phi_j^{-1}(U)$ identificados dan una bola y lo mismo sucede con $\Phi_i'^{-1}(U)$ y $\Phi_j'^{-1}(U)$.

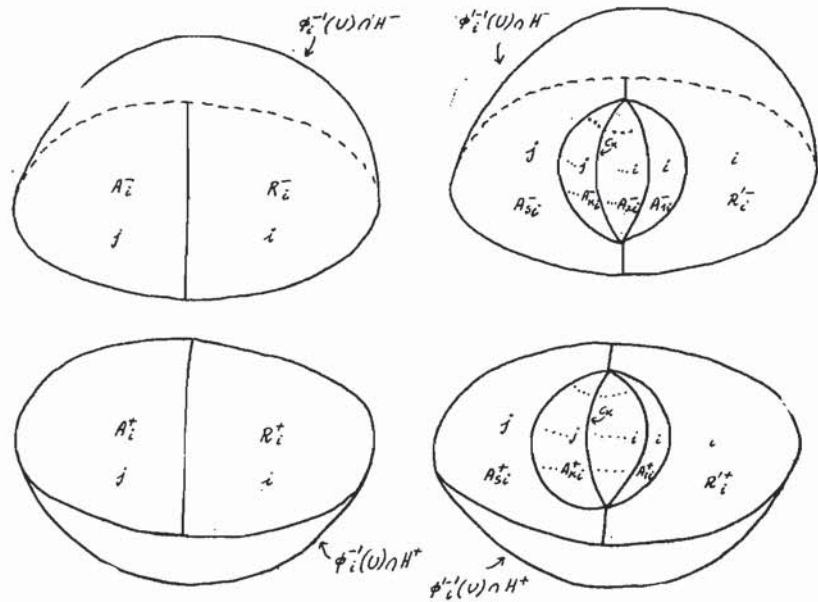


Fig. IV.1.3.

CASO 2.—El índice i no pertenece a ningún ciclo c_1, \dots, c_s . Esto implica que las dos componentes de $\Phi_i^{-1}(U)$ deben identificarse entre sí dando una bola. Análogamente con $\Phi_i'^{-1}(U)$.

Así resulta que $\Phi^{-1}(U)$ está compuesto de $n - s$ bolas disjuntas y lo mismo sucede con $\Phi'^{-1}(U)$. Queda pues demostrado el lema III.2.

IV.2. Demostración del lema III.7.

En fig. IV.2.1 aparece la deformación T_3 teniendo lugar en el interior del entorno U . Construyamos $\Phi^{-1}(U)$ y $\Phi'^{-1}(U)$ estudiando para ello dos casos:

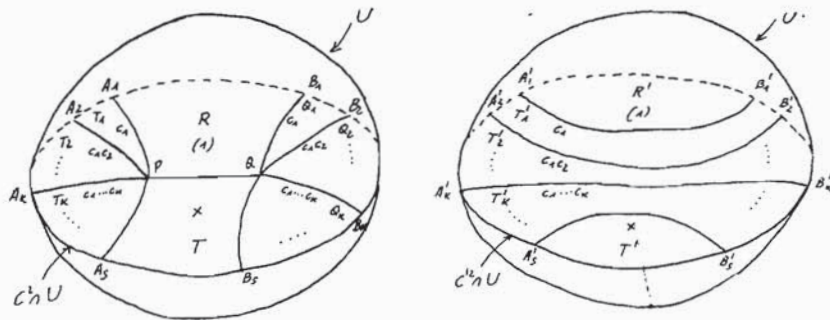


Fig. IV.2.1.

CASO 1.—El índice i pertenece al ciclo $c_k = (ij)$.

$\Phi_i^{-1}(U)$ y $\Phi'_i^{-1}(U)$ aparecen en fig. IV.2.2, en la cual cambiando i por j y j por i se obtienen $\Phi_j^{-1}(U)$ y $\Phi'_j^{-1}(U)$. Es claro que $\Phi_i^{-1}(U)$ y $\Phi_j^{-1}(U)$ identificados dan una bola, y que $\Phi'_i^{-1}(U)$ y $\Phi'_j^{-1}(U)$ identificados, dan también una bola.

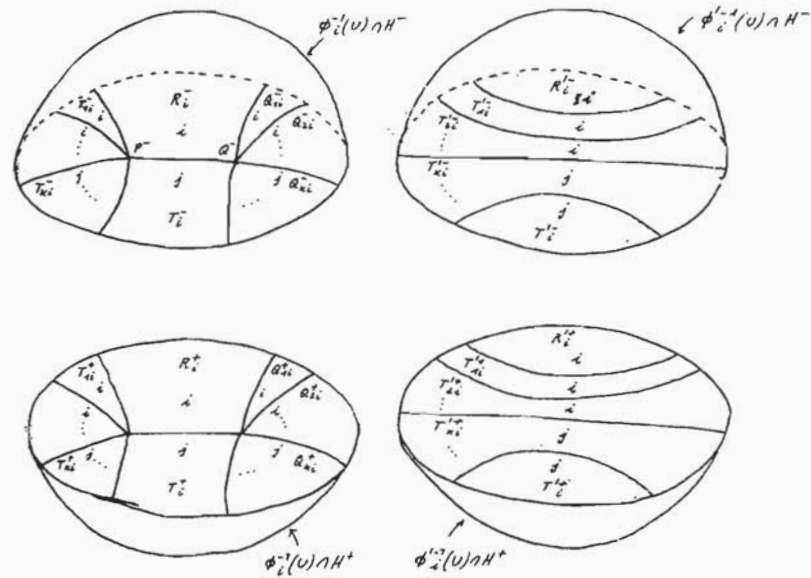


Fig. IV.2.2.

CASO 2.—El índice i no pertenece a ningún ciclo c_1, \dots, c_s . Se procede entonces como para el caso 2 de IV.1.

V. EJEMPLO

Sea el nudo «figura ocho» coloreado como indica fig. V.1. El espacio recubridor ramificado correspondiente es homeomorfo al recubridor ramificado sobre el nudo coloreado de fig. V.2 obtenido mediante deformaciones T_1, T_2, T_3 y T_4 .

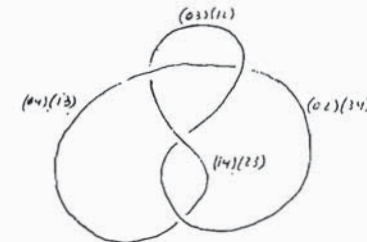
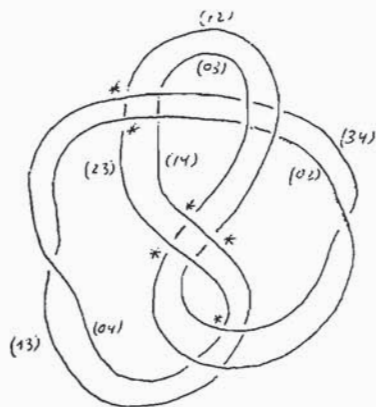


Fig. V.1.

Fig. V.2.—(Aplicar D_1, D_2, D_3 en los asteriscos)

Aplicando al nudo de fig. V.2 las deformaciones definidas en I. (D_1, D_2, D_3) adecuadamente obtenemos el nudo coloreado de fig. V.3, cuyo recubridor ramificado correspondiente es S^3 [8]. Esto prueba que el recubridor correspondiente al nudo coloreado de fig. V.1 es S^3 .

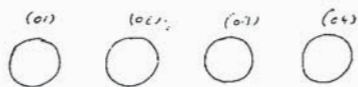


Fig. V.3.

NOTA.—Al tiempo de publicar este trabajo, el profesor R. H. Fox me ha comunicado que él ha obtenido todos los resultados mencionados en la introducción de este trabajo, pero que no los ha publicado. El profesor Fox me ha indicado también que la conjetura I.2 es falsa, pues él ha encontrado una 3-variedad cerrada y orientable que no cumple la tesis del teorema I.4 (cfr. [6]).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. W. ALEXANDER: *Note on Riemann spaces*. «Bull. Amer. Math. Soc.», 26 (1920), 370-372.
- [2] W. CLIFFORD: *On the canonical form and dissection of a Riemann's surface*. «Proc. London Math. Soc.», 8 (1877), 292-304.
- [3] R. H. CROWELL & R. H. FOX: *An introduction to Knot Theory*. Ginn & Company.
- [4] R. H. FOX: *Covering spaces with singularities*. «Algebraic Geometry and Topology», A symposium in honour of S. Lefschetz. Princeton, 1957.
- [5] — — *Construction of simply connected 3-manifolds*. *Topology of 3-manifolds and related topics*, Englewood Cliffs N. J. (1962), Prentice Hall, 213-216.
- [6] — — *A note on branched cyclic coverings of spheres* (se publicara en «Revista Matemática Hispano-Americana»).
- [7] W. HAKEN: *Some results on surfaces in 3-manifolds*. «M. A. A. Studies in Mathematics», vol. 5. Studies in modern Topology, P. J. Hilton, editor, 39-98.
- [8] J. M. MONTESINOS: *Sobre la conjetura de Poincaré y los recubridores ramificados sobre un nudo*. Tesis Doctoral (será publicada en Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid) (1971).
- [9] L. P. NEUWIRTH: *Knots Groups*. «Annal. of Math. Studies», núm. 56.
- [10] K. REIDEMEISTER: *Knotentheorie*, «Erg. d. Math.», 1, núm. 1, reimpresso Chelsea, N. 4. 1948.
- [11] H. SEIFERT y THRELFALL: *Lehrbuch der Topology*. Leipzig und Berlin (1934).
- [12] F. WALDHAUSEN: *Über Involutionen der 3-Sphäre*. «Topology», 8 (1969), 81-91