Reimpreso del Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, Vol. 18, No. 1, 1973
Printed in U.S.A.

VARIEDADES DE SEIFERT QUE SON RECUBRIDORES CICLICOS RAMIFICADOS DE DOS HOJAS

Por José M. Montesinos

§0. Introducción

Representaremos por $\tilde{N}$ al recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un *enlace* ("link") N de S^3. Un *enlace representado* (N, ω) será un par formado por un enlace N y una representación transitiva ω de $\pi(S^3\text{-}N)$ en el grupo de permutaciones de los n índices $1, \cdots, n$. Llamaremos $M(N, \omega)$ al recubridor, ramificado sobre N, asociado de modo único a la representación ω (ver [2] y [3]). Llamaremos F_g a una superficie orientable de género g.

R. H. Fox ha demostrado en [2] que no existe ningún enlace N de S^3 tal que $\tilde{N}$ sea $S^1 \times S^1 \times S^1$. En [4] ha sido generalizado este resultado a las variedades $S^1 \times F_g$ con $g > 1$. Las variedades $S^1 \times F_g$ son ejemplos de variedades fibradas de Seifert orientables.

En la presente nota estudiaremos el siguiente problema: "dada una variedad de Seifert orientable M, determinar si M es homeomorfa a $\tilde{N}$ para algún enlace N de S^3 y en caso afirmativo, describir N". En §§2 y 3 resolveremos este problema para las variedades de Seifert con *base* ("Zerlegungsfläche") S^2 o una superficie no orientable, viendo que todas ellas son recubridores cíclicos de dos hojas ramificados sobre S^3. Si la base de M es F_g con $g > 0$, resolveremos el problema módulo una cuestión, acerca de involuciones en variedades de Seifert, que enunciaremos en 5.12.

En §6 probaremos que toda variedad de Seifert con base F_g y $g > 0$, es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre una esfera con g asas.

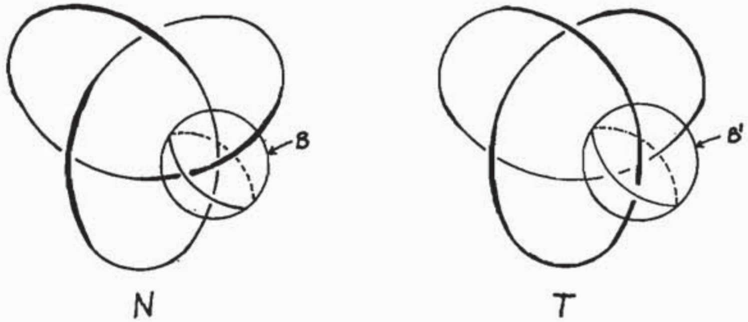
En §6 determinaremos ciertos nudos representados no separables (ver [2] y [4]).

En §7 indicaremos cómo pueden generalizarse algunos de estos resultados a las "Graphenmannigfaltigkeiten" de Waldhausen.

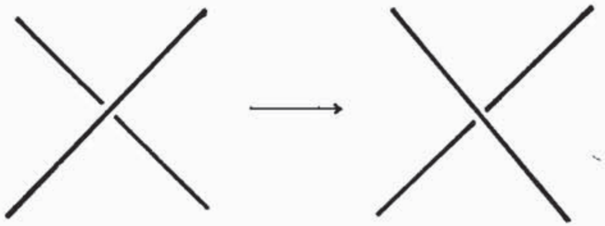
§1. Modificaciones en un enlace

1.1. Sea la bola B de Fig. 1, y L la unión de los dos arcos disjuntos A_1A_2 y A_3A_4. B admite un recubrimiento cíclico de dos hojas $p:\tilde{B} \to B$ ramificado sobre L. $\tilde{B}$ es un toro macizo en el que $p^{-1}Q = \tilde{Q}$ es un meridiano y $p^{-1}H = \tilde{H}$ es una longitud. Si fijamos una orientación en ∂B, queda determinada una orientación en $\partial\tilde{B}$; orientemos entonces $\tilde{Q}$ y $\tilde{H}$ de modo que el número de corte de $\tilde{H}$ con $\tilde{Q}$ en $\partial\tilde{B}$ sea 1.

Sea, por ejemplo, el nudo N y el nudo trivial T:



T se obtiene de N mediante la modificación



$\tilde{N} = L(3, 1)$ se obtiene entonces de $\tilde{T} = S^3$ sustituyendo el toro macizo $\tilde{B}'$ mediante el $\tilde{B}$. En general, si N es un nudo cuyo número de Wendt es n, $\tilde{N}$ se obtiene de S^3 vaciando n toros macizos (posiblemente anudados y enlazados) y volviéndolos a pegar de otro modo (representación de Lickorish). J. H. Conway ha dado en [1] una descripción precisa de cómo hay que modificar L en el interior de B, con el fin de que el recubridor cíclico de dos hojas de B, ramificado sobre los arcos modificados, sea un toro macizo cuyo meridiano sea homólogo a $\alpha\tilde{Q}$ +

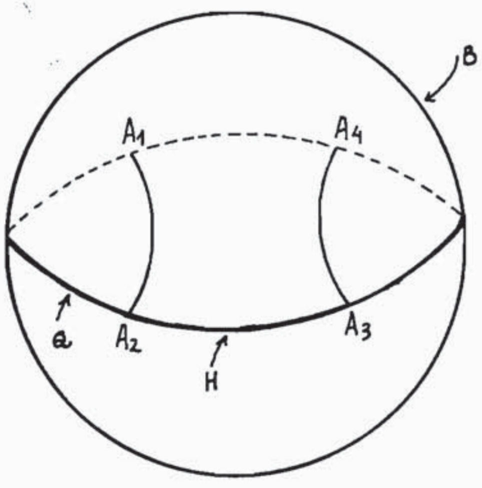


Fig. 1

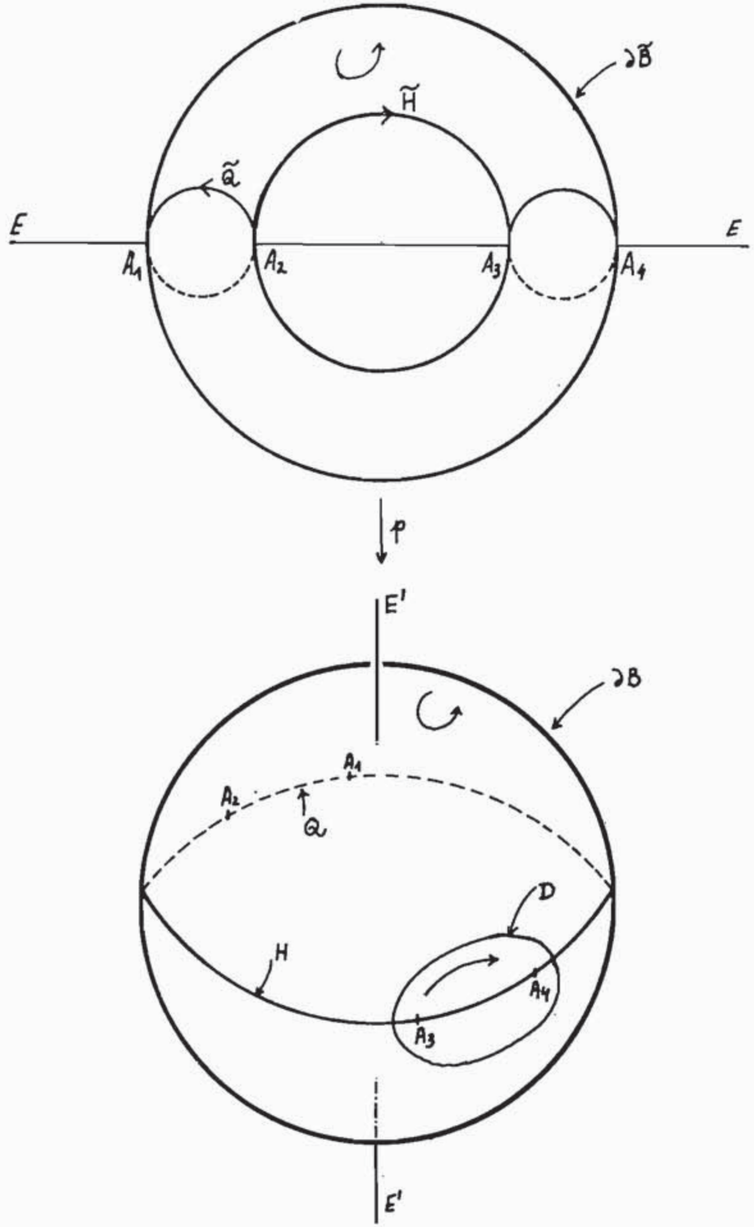


Fig. 2

$\beta\tilde{H}$, siendo α y β dos enteros primos entre sí. Vamos a ver esta descripción de Conway a continuación.

1.2. El toro $\partial\tilde{B}$ es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre los puntos A_1, A_2, A_3 y A_4 de ∂B. El recubridor $q = p \mid \partial\tilde{B}$ viene determinado por una involución que en Fig. 2 es un simetría respecto al eje E.

Definimos un homeomorfismo t de ∂B en sí mismo, como la composición de una rotación, de ángulo $\pi/2$, en torno del eje E' que transforma A_1 en A_4, y una simetría respecto al plano ecuatorial (ver Fig. 2). Existe entonces un autohomeomorfismo $\bar{t}$ de $\partial\tilde{B}$ tal que $tq = q\bar{t}$, y entonces las curvas $\bar{t}\tilde{Q}$ y $\bar{t}\tilde{H}$ son homólogas a $\tilde{H}$ y $\tilde{Q}$ respectivamente.

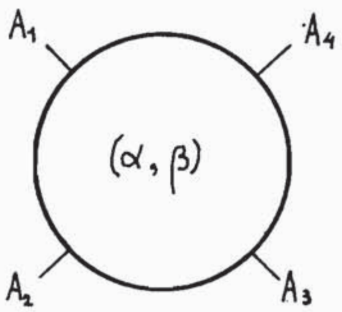
Definimos un homeomorfismo v de ∂B en sí mismo del siguiente modo. Tomamos un disco D en ∂B disjunto de A_1 y A_2 y que contiene en su interior a A_3 y A_4 (ver Fig. 2). $v \mid D$ es el resultado de girar, manteniendo ∂D fijo, en el sentido que se indica en Fig. 2, con el fin de permutar A_3 con A_4 ; v es la identidad fuera de D. Existe entonces un autohomeomorfismo $\bar{v}$ de $\partial\tilde{B}$ tal que $vq = q\bar{v}$ y la curva $\bar{v}\tilde{H}$, que se proyecta sobre vH, es homóloga a $\tilde{Q} + \tilde{H}$. Definimos v^{-1} y $\bar{v}^{-1}$ de modo análogo a v y $\bar{v}$, pero verificando el giro, en el interior de D, en el otro sentido. Así la curva $\bar{v}^{-1}\tilde{H}$, que se proyecta sobre $v^{-1}H$, es homóloga a $-\tilde{Q} + \tilde{H}$.

1.3. Sean ahora α y β dos enteros primos entre sí; si α/β es la fracción continuada $n + \dfrac{1}{m} + \cdots + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{i}$, definimos el autohomeomorfismo $f(\alpha, \beta)$ de ∂B como la composición $f(\alpha, \beta) = v^n t v^m t \cdots t v^k t v^j t v^i t$. Entonces el autohomeomorfismo $\bar{f}(\alpha, \beta) = \bar{v}^n \bar{t} \bar{v}^m \bar{t} \cdots \bar{t} \bar{v}^k \bar{t} \bar{v}^j \bar{t} \bar{v}^i \bar{t}$ de $\partial\tilde{B}$ es tal que $f(\alpha, \beta)q = q\bar{f}(\alpha, \beta)$.

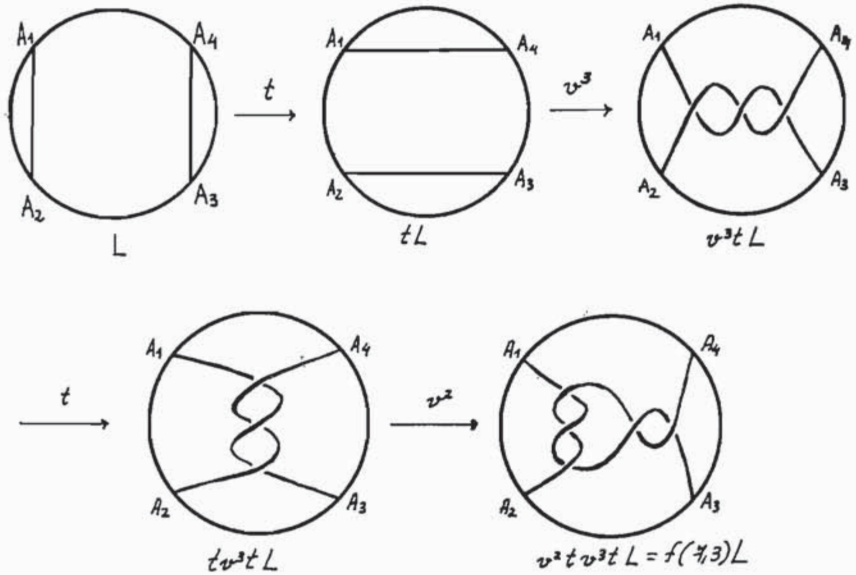
Si consideramos ahora la curva $M = f(\alpha, \beta)Q$ en ∂B, entonces se ve fácilmente que $\bar{f}(\alpha, \beta)\tilde{Q}$ es una curva simple de $\partial\tilde{B}$, que se proyecta sobre M, y que es homóloga a $\alpha\tilde{Q} + \beta\tilde{H}$.

Podemos extender a B los homeomorfismos t, v, v^{-1} y por tanto $f(\alpha, \beta)$ admite una extensión a B que seguiremos llamando de la misma manera. El recubridor cíclico de dos hojas de B, ramificado sobre $f(\alpha, \beta)L$, es entonces un toro macizo cuyo meridiano es una curva, $\bar{f}(\alpha, \beta)\tilde{Q}$, que es homóloga a $\alpha\tilde{Q} + \beta\tilde{H}$ sobre $\partial\tilde{B}$.

A efectos de notación representaremos la curva modificada $f(\alpha, \beta)L$ mediante



1.4. Vamos a hallar, por ejemplo, $f(7, 3)L$. Como $7/3 = 2 + 1/3$, tenemos que $f(7, 3) = v^2 t v^3 t$. Entonces tenemos (cfr. [1, pag. 330]):



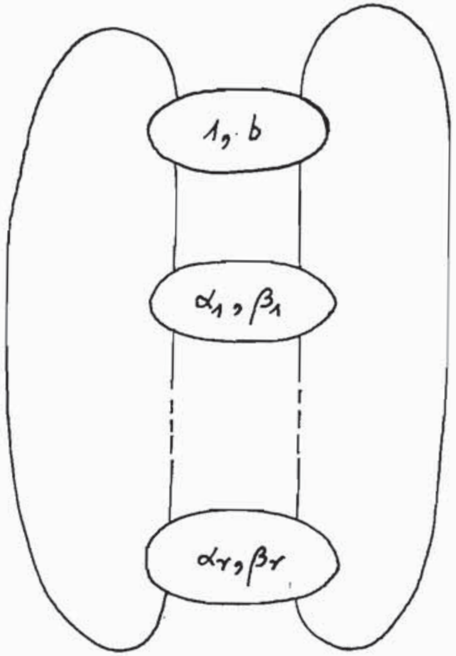
§2. Variedades de Seifert con base S^2

2.1. Representemos ahora la variedad fibrada de Seifert $(Oo0 \mid 0) = S^1 \times S^2$ como un cilindro macizo fibrado en el que hay que llevar a cabo las identificaciones que se indican en Fig. 3 ([7, pag. 178]). Podemos suponer que S^2 está sumergido en $S^1 \times S^2$. La simetría respecto al eje E define una involución en $S^1 \times S^2$, cuyo espacio órbita es S^3, siendo la imagen de las curvas dobles E y F, las curvas E' y F' de Fig. 4 (ver pag. 8).

2.2. Desde ahora fijaremos en S^3 una orientación y consideraremos en los recubridores cíclicos de dos hojas ramificados sobre S^3, la orientación inducida. La bola B de Fig. 4 se eleva al toro macizo fibrado $\tilde{B}$ de $S^1 \times S^2$, que puede verse en Fig. 3 y asignamos a ∂B la orientación inducida por $^-(S^3 - B)$. $\tilde{H}$ es una fibra de $\tilde{B}$ y $\tilde{Q}$ es un meridiano de $\tilde{B}$. Además $\tilde{Q} = \partial\tilde{B} \cap S^2$. Modificar $L = B \cap (E' \cup F')$ por $f(\alpha, \beta)L$ en B, equivale a sustituir $\tilde{B}$ por un toro macizo cuyo meridiano es homólogo a $\alpha\tilde{Q} + \beta\tilde{H}$ en $\partial\tilde{B}$.

La fibración $(Oo0 \mid b)$ se obtiene, por tanto, al introducir la modificación $f(1, b)L$ en B. Tenemos pues:

TEOREMA. $(Oo0 \mid b;\ (\alpha_1, \beta_1);\ \cdots\ ;\ (\alpha_r, \beta_r))$ *es el recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre el siguiente enlace de* S^3:

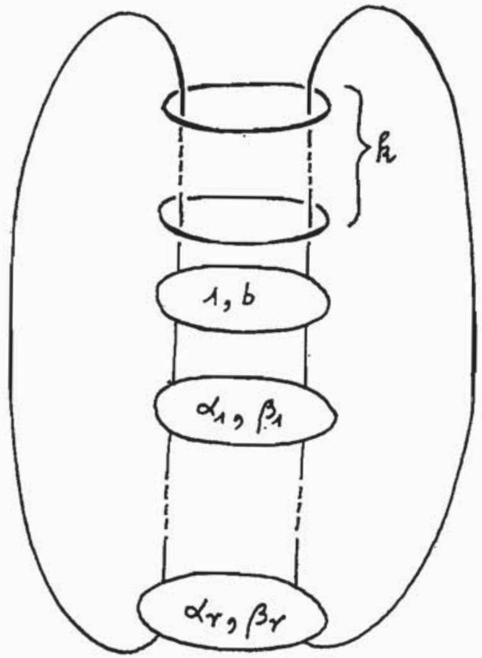


§3. Variedades de Seifert con base no orientable

3.1. Representemos la variedad fibrada de Seifert $M = (On2 \mid 0)$ como un cilindro macizo, en el que hay que llevar a cabo las identificaciones que se indican en Fig. 5. Podemos suponer que la superficie no orientable de género 2 está sumergida en M como indica Fig. 5. La simetría respecto a E define una involución en M cuyo espacio órbita es S^3, siendo la imagen de las curvas dobles E, F, G y K, el enlace de S^3 representado en Fig. 6.

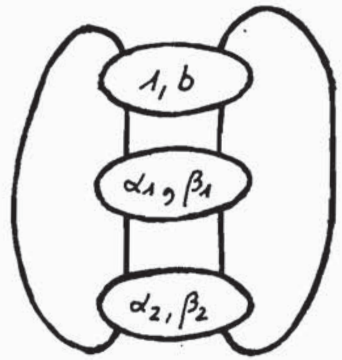
Como la bola B de Fig. 6 se eleva a un toro macizo fibrado $\tilde{B}$ de M, tenemos de igual modo que en §2:

TEOREMA. $(Onk \mid b;\ (\alpha_1, \beta_1);\ \cdots\ ;\ (\alpha_r, \beta_r))$ *es el recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre el enlace de* S^3 *siguiente*:



3.2 *Ejemplos*:

a) S^3 es homeomorfo a $(Oo0 \mid b;\ (\alpha_1, \beta_1);\ (\alpha_2, \beta_2))$ si y solo si $b\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 = \pm 1$ (cfr. [7, pag. 206]) y por tanto S^3 es homeomorfo a $\tilde{L}$ para L:



En vista de los resultados de F. Waldhausen [9], L es el nudo trivial.

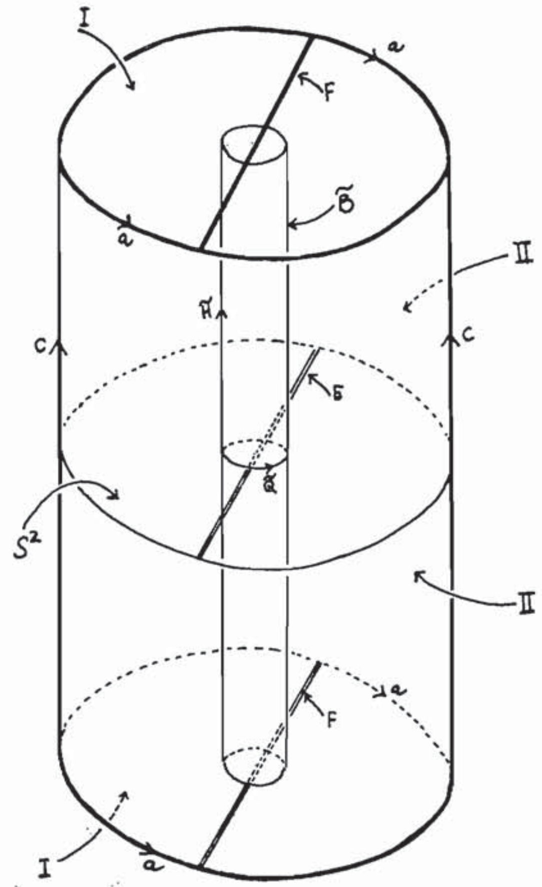


Fig. 3

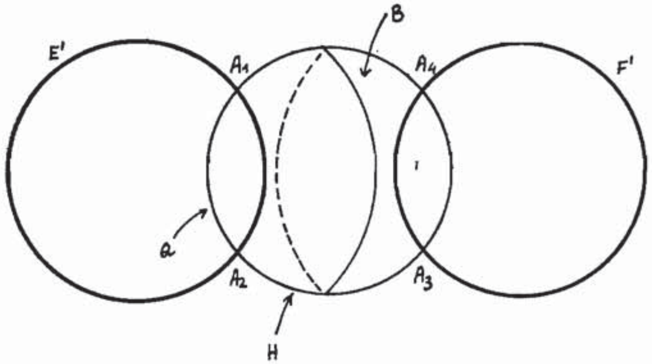


Fig. 4

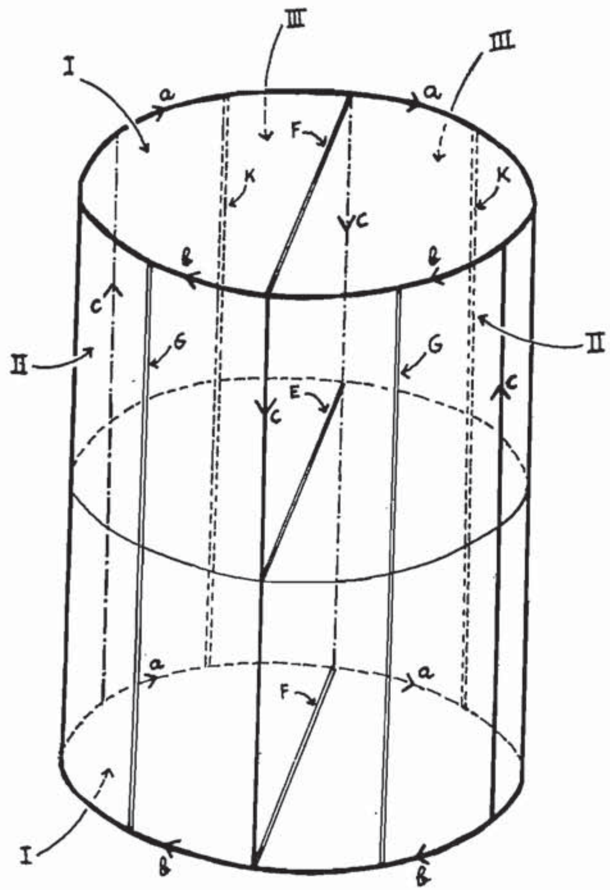


Fig. 5

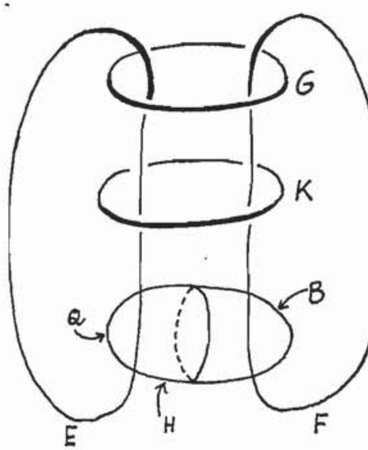
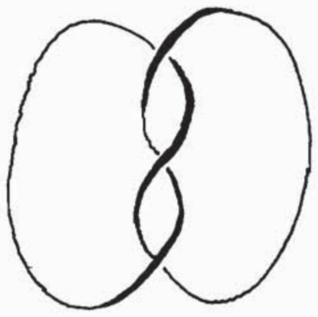
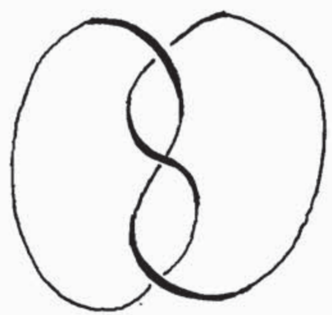


Fig. 6

b) El S^1-fibrado sobre S^2, correspondiente a $b = 3$, es el recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre el nudo N siguiente



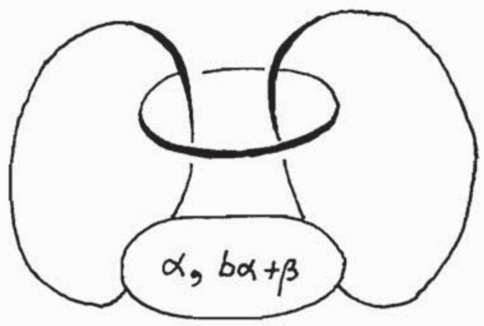
es claro que $\tilde{N}$ es la lente $L(3, 1)$. Del mismo modo, el S^1-fibrado correspondiente a $b = -3$, es $\tilde{N}'$ para N':



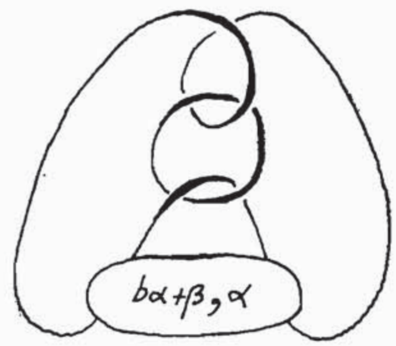
y es claro que $\tilde{N}'$ es $L(3, 1)$ con la orientación opuesta. Como la variedad $L(3, 1)$ es asimétrica, se deduce el conocido hecho de que el nudo "trébol" no es anfiqueiral.

Cuestión. Si N es un nudo y la variedad $\tilde{N}$ es simétrica, ¿es N anfiqueiral?.

c) $M = (On1 \mid b; (\alpha, \beta))$ es $\tilde{N}$ para el enlace N siguiente:

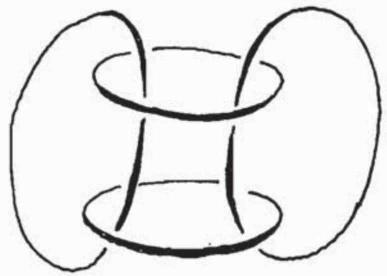


equivalente al

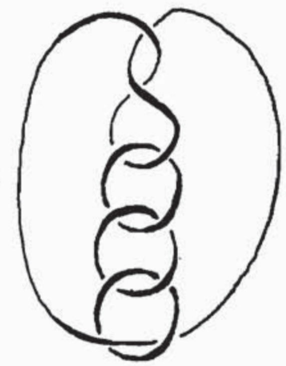


Por tanto M es una variedad homeomorfa a $(Oo0 \mid -1;\ (2, 1);\ (2, 1);\ (b\alpha + \beta, \alpha))$ (cfr. [8, 10.1.3]).

d) El S^1-fibrado sobre la Botella de Klein que admite una sección es la variedad $(On2 \mid 0)$. Esta variedad es $\tilde{L}$ siendo L:



equivalente a



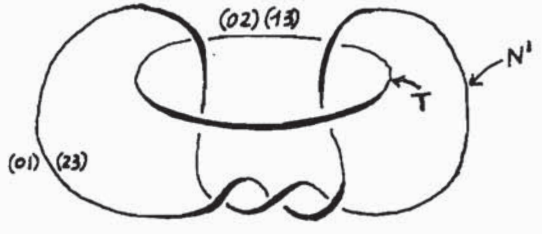
Así $(On2 \mid 0)$ es homeomorfa a $(Oo0 \mid -2;\ (2, 1);\ (2, 1);\ (2, 1);\ (2, 1))$ (cfr. [8, 10.1.9]).

e) Sea el enlace representado sobre el grupo de Klein (N, ω) (cfr. [2] y [5])

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & M(N,\omega) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \tilde{N} \arrow[dr, "r"'] & & S^3 \arrow[dl, "t"] \\ & S^3 & \end{tikzcd}$$

$M(N, \omega)$ es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre $t^{-1} N'$, siendo t el recubrimiento cíclico de dos hojas ramificado sobre el nudo trivial T.



(N, ω)

Como $t^{-1}N'$ es, mediante una fácil construcción, el nudo p define un recubridor

de dos hojas (no ramificado) de $M(N, \omega)$ sobre $\tilde{N} = (On1 \mid 0; (3, 1))$, siendo $M(N, \omega) = (Oo0 \mid 0; (3, 1); (3, 1))$ (cfr. [7, 199]).

§4. Transformaciones periódicas en un toro macizo fibrado

4.1. Sea V un toro macizo fibrado (cfr. [7, pag. 150]) y llamemos M a un meridiano, H a una fibra y Q a una *transversal* ("Querkreis"). Supongamos que Q y H tienen una orientación fija y que $M \sim \alpha Q + \beta H$ en ∂V, siendo α y β enteros primos entre si con $\alpha > 0$ y $\beta \geqslant 0$. Una *longitud* ("Breitenkreis") de V es una curva simple B situada sobre ∂V y tal que $B \sim -\rho Q + \sigma H$ en ∂V, siendo ρ y σ enteros que cumplen $\alpha\sigma + \beta\rho = 1$; σ (resp. ρ) está determinado unívocamente por α y β a menos de múltiplos de β (resp. α). Se tiene entonces que:

$$Q \sim \sigma M - \beta B$$
$$H \sim \rho M + \alpha B; \text{ en } \partial V.$$

Podemos representar V en R^3 como un cilindro macizo de altura unidad, con su eje E situado sobre el eje OZ, y cuyo disco superior D se identifica con el inferior mediante traslación de eje E (ver Fig. 7). M es ∂D y B es la curva que se proyecta sobre el punto de coordenadas $(1, 0, 0)$; supongamos que M y B tienen las orientaciones fijadas en la Fig. 7.

Vamos a estudiar autohomeomorfismos de V de período $n \geqslant 2$, que conservan las fibras y que únicamente dejan invariante la fibra central E.

4.2. Supongamos que el autohomeomorfismo T_n de período n deja fijos los puntos de E. Entonces T_n es equivalente a una rotación, de ángulo $2\pi/n$, en torno al eje E. Para que E sea la única fibra invariante es preciso que $\alpha \not\equiv 0\,(n)$.

El espacio órbita de V mediante T_n es un toro macizo fibrado V'; M se transforma en un meridiano M' de V' y B, en una longitud B'. La imagen H' de la

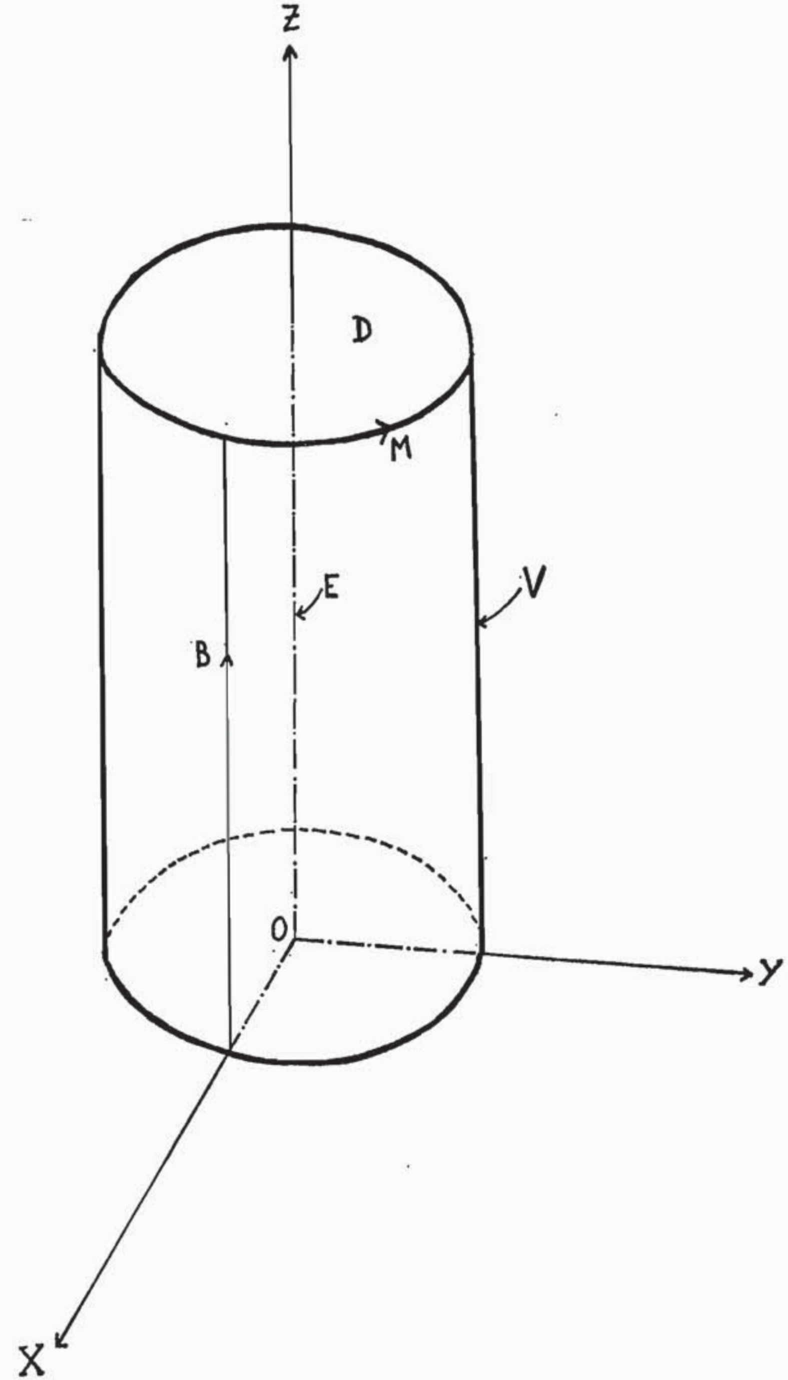


Fig. 7

fibra H cumple

$$H' \sim \frac{n}{(\alpha, n)} \rho M' + \frac{\alpha}{(\alpha, n)} B'; \text{ en } \partial V',$$

y entonces, el eje E' de V' es una fibra de multiplicidad $\dfrac{\alpha}{(\alpha, n)}$. Nótese que si $\beta \equiv 0(n)$, entonces Q corta a M en exactamente β puntos y por lo tanto Q es invariante por T_n. La imagen Q' de Q es entonces una transversal de H' y se tiene para ella que:

$$Q' \sim \sigma M' - (\beta/n)B'; \text{ en } \partial V'.$$

Por lo tanto $M' \sim \alpha Q' + (\beta/n)H'$; en $\partial V'$.

4.3. Sea el autohomeomorfismo $T_n{}^i$ que induce en E una transformación de período n sin puntos fijos y es equivalente al resultado de trasladar los puntos de V, paralelamente al eje E, a una distancia de $1/n$, aplicando a continuación una rotación, de ángulo $2\pi i/n$, en torno del eje E. Estudiemos primeramente la transformación $T_n{}^0$ que consiste en una traslación, a distancia $1/n$, de eje E. Llamaremos a $T_n{}^0$ una *traslación de eje B*.

Para que E sea la única fibra invariante por $T_n{}^0$ es preciso que $\rho \not\equiv 0(n)$. El espacio órbita de V es entonces un toro macizo fibrado V'; M se transforma en un meridiano M' y B, en una longitud B' de V'. La imagen H' de la fibra H cumple

$$H' \sim \frac{\rho}{(\rho, n)} M' + \frac{n}{(\rho, n)} \alpha B'; \text{ en } \partial V',$$

y entonces el eje E' de V' es una fibra excepcional de multiplicidad $\dfrac{n}{(\rho, n)} \alpha$.

Nótese que si $\sigma \equiv 0(n)$, entonces Q corta a B en exactamente σ puntos y por lo tanto Q es invariante por $T_n{}^0$. La imagen Q' de Q es entonces una transversal de H' y se tiene para ella que:

$$Q' \sim (\sigma/n)M' - \beta B'; \text{ en } \partial V'.$$

Por lo tanto $M' \sim n\alpha Q' + \beta H'$; en $\partial V'$.

Debemos estudiar ahora las restantes transformaciones de período n, $T_n{}^i$, que inducen en E la transformación de período n sin puntos fijos. La transformación $T_n{}^i$ que es el resultado de una traslación de eje B y un giro, de ángulo $2\pi i/n$, en torno del eje E, puede interpretarse como una traslación de eje B_i, siendo B_i una longitud de V homóloga a $B + iM$. Así pues, fijados σ y ρ tales que $\alpha\sigma + \beta\rho = 1$, podemos considerar las n transformaciones $T_n{}^i$ definidas como traslaciones de eje B_i, siendo $B_i \sim -(\rho - i\alpha)Q + (\sigma + i\beta)H$, con $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, en ∂V.

Siempre que $\rho - i\alpha \not\equiv 0(n)$, la traslación $T_n{}^i$ deja invariante exclusivamente la fibra E. En caso de que n y α no sean primos entre sí, si σ y ρ cumplen $\alpha\sigma + \beta\rho = 1$ se tiene que $\rho \not\equiv 0(n)$ porque $\sigma\alpha \not\equiv 1(n)$; en este caso las n traslaciones $T_n{}^i$ dejan invariante exclusivamente la fibra E. Si n y α son primos entre sí, existe t tal que $t\alpha \equiv 1(n)$ y si $\alpha\sigma + \beta\rho = 1$ entonces $\alpha(\sigma + \rho t\beta) + \beta(\rho - \rho t\alpha) = 1$ y finalmente $\rho - \rho t\alpha \equiv 0(n)$; en este caso, no todos los $T_n{}^i$ dejan invariante exclusivamente a la fibra E.

4.4. En el caso de que β y n sean primos entre sí, alguna de las trasformaciones $T_n{}^i$ es tal que trasforma la transversal Q en una transversal Q' de H' y es

$$M' \sim n\alpha Q' + \beta H'; \text{ en } \partial V'.$$

Para ello, basta ver que existen $\rho \not\equiv 0(n)$ y $\sigma \equiv 0(n)$ tales que $\alpha\sigma + \beta\rho = 1$. En efecto, como β y n son primos entre si, existe t tal que $t\beta \equiv 1(n)$; dados ahora σ' y ρ' tales que $\alpha\sigma' + \beta\rho' = 1$, tenemos que $\sigma = \sigma' - (\sigma' t)\beta \equiv 0(n)$ y $\rho = \rho' + \sigma' t\alpha$ cumplen $\alpha\sigma + \beta\rho = 1$ y es, por tanto, $\beta\rho \equiv 1(n)$ y finalmente $\rho \not\equiv 0(n)$.

§5. Variedades de Seifert con base una superficie orientable de género $\geqslant 1$

5.1. Sea M una variedad fibrada de Seifert orientable, distinta de $S^1 \times S^1 \times S^1$ y cuya base es F_g con $g \geq 1$. M es entonces de la forma $(Oog \mid b;\ (\alpha_1, \beta_1); \cdots ; (\alpha_r, \beta_r))$ y $p{:}M \to F_g$ es la proyección asociada a la fibración.

Supongamos que M es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace L de S^3; queda definida entonces en M una involución u cuyo espacio órbita es S^3, siendo $\bar{u}{:}M \to S^3$ la aplicación órbita. Si suponemos además que u conserva las fibras de M, entonces u induce en F_g una involución v cuyo espacio órbita llamamos G, siendo $\bar{v}{:}F_g \to G$ la aplicación órbita.

5.2. $H_1(M)$ es un grupo abeliano presentado por los generadores A_i, B_i para $1 \leqslant i \leqslant g$, $Q_0, Q_1, \cdots, Q_r, H$ sometidos a las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_r &= 0 \\ Q_0 + bH &= 0 \\ \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_r Q_r + \beta_r H &= 0 \end{aligned}$$

Como para $0 \leqslant i \leqslant r$ es $p_*(Q_i) = 0$ y $p_*(H) = 0$, los $p_*(A_i)$, $p_*(B_i)$ con $1 \leqslant i \leqslant g$, componen una base de $H_1(F_g)$. Según [2] $u_* A_i = -A_i$, y por tanto $v_*(p_* A_i) = p_*(u_* A_i) = -p_* A_i$; análogamente es $v_*(p_* B_i) = -p_* B_i$. Por lo tanto la matriz de v_* es $-\mathbf{E}$. Entonces [4] v es un autohomeomorfismo de F_g que preserva la orientación.

5.3. Como u deja fijos los puntos de un enlace N de M, las fibras que contienen puntos de N son invariantes por u y por tanto v tiene puntos fijos. Supongamos que C es una curva invariante por v; entonces existe un disco D que corta a C y que es invariante por v. Es claro que $v \mid D$ es una simetría respecto al eje $C \cap D$. Esto significa que v invierte la orientación de F_g. Por tanto v tiene exclusivamente puntos fijos.

5.4. Sea H una fibra invariante por u. Si u invirtiera la orientación de H, entonces habría en H puntos fijos y N cortaría a H. Pero entonces pasaría por $p(H)$ una curva invariante por v y esto no puede suceder. Así que u no invierte la orientación de H y por tanto, o bien $u \mid H$ es la identidad, o es la aplicación antipodal carente de puntos fijos. Esto implica que las componentes de N son fibras de M y que M induce en S^3 una fibración con fibra S^1 y proyección $q: S^3 \to G$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d, "p"'] & S^3 \arrow[d, "q"] \\ F_g \arrow[r, "\bar{v}"] & G \end{tikzcd}$$

5.5. Veremos ahora que la fibración, así inducida en S^3, es una fibración de Seifert. Sea H una fibra de M invariante por u; entonces H es el eje de un toro macizo fibrado V invariante por u. Llamemos D al disco $p(V)$. La involución $u \mid V$ induce en D la involución $v \mid D$ que deja fijo el punto $p(H)$. Por tanto $v \mid D$ es la simetría respecto al punto $p(H)$.

Podemos distinguir ahora dos casos, según que $u \mid H$ sea la identidad o la aplicación antipodal.

Caso a. $u \mid H$ *es la identidad.* Un razonamiento sencillo prueba entonces que $v \mid D$ solo puede venir inducido por una involución en V como la definida en 4.2. Por lo tanto, si H es una fibra excepcional, su multiplicidad debe de ser impar y entonces $\bar{u}(H)$ es una fibra excepcional en S^3 de la misma multiplicidad; si H es una fibra general, $\bar{u}(H)$ es también una fibra general en S^3. En ambos casos $\bar{u}(H)$ es una componente de L.

Caso b. $u \mid H$ *es la aplicación antipodal.* En este caso $v \mid D$ solo puede venir inducido por una involución de V como la definida en 4.3. Por lo tanto, si H es una fibra excepcional de multiplicidad α, $\bar{u}(H)$ es una fibra excepcional en S^3 de multiplicidad 2α; si H es una fibra general, $\bar{u}(H)$ es una fibra excepcional de multiplicidad 2. Nótese que $\bar{u}(H)$ no es una componente de L.

Deducimos pues que L consta de fibras de S^3 ninguna de las cuales es una fibra excepcional de multiplicidad par.

5.6. El hecho de que la fibración inducida por M en S^3 sea de Seifert implica que G es homeomorfo a S^2 y que F_g es un recubridor de dos hojas ramificado sobre puntos de S^2. Esto significa que la involución v es la simetría, respecto al eje E en Fig. 8.

El número de puntos dobles de v es por lo tanto $2g + 2$. Esto implica que u deja $2g + 2$ fibras invariantes y que L tiene a lo sumo $2g + 2$ componentes. Como en una fibración de Seifert de S^3 solo puede haber una fibra excepcional de multiplicidad par, deducimos que L tiene, o bien $2g + 2$ componentes, o bien $2g + 1$ pero, en este caso, la fibración de S^3 tiene una fibra excepcional de multiplicidad par.

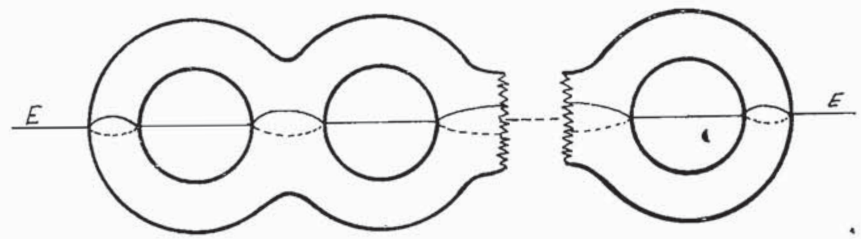


Fig. 8

5.7. Recíprocamente, fijemos en S^3 una fibración de Seifert $(O\,o\,0 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); \cdots; (\alpha_r, \beta_r))$, en donde $0 \leqslant r \leqslant 2$; esta fibración define una proyección $q: S^3 \to S^2$. Tomemos un enlace L en S^3 constituido por $m > 0$ fibras, ninguna de las cuales es una fibra excepcional de multiplicidad par. Supongamos también que, si m es impar, existe en S^3 una (única) fibra excepcional de multiplicidad par. Vamos a describir a continuación el recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre L, comprobando que es una variedad fibrada de Seifert con base orientable de género $(m - 2)/2$ si m es par, y $(m - 1)/2$ si m es impar.

5.8. Sea, para ello, la variedad fibrada de Seifert $(Oo0 \mid 0) = S^1 \times S^2$, en la que suponemos sumergido S^2 como $a \times S^2$, siendo a un punto de S^1. Orientamos $S^1 \times S^2$ y S^2 de un modo determinado y vaciamos de $S^1 \times S^2$ $r + 1$ toros macizos fibrados disjuntos $V_0, V_1, \cdots, V_r$, dando ahora al toro $\partial V_i = T_i$ la orientación inducida. La adherencia de $S^2 - (V_0 \cup \cdots \cup V_r)$ es una superficie esférica G con $r + 1$ agujeros y S^2 induce en G una orientación. Si llamamos Q_i a la curva $T_i \cap G$ con la orientación inducida por G, podemos considerar en T_i una fibra H_i orientada de modo que el número de corte de H_i con Q_i (en este orden) sea $+1$ en T_i. Ahora podemos determinar en T_0 una curva simple M_0 que es homóloga a $Q_0 + bH_0$; de la misma manera, en T_i fijamos una curva simple M_i que es homóloga a $\alpha_i Q_i + \beta_i H_i$, para $1 \leqslant i \leqslant r$.

5.9 Obtenemos la variedad fibrada $(Oo0 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); \cdots; (\alpha_r, \beta_r))$ al pegar el borde de un toro macizo W_i con T_i, de modo que M_i sea un meridiano de W_i. Entonces W_i admite una única fibración de Seifert compatible con la fibración de T_i. Es claro que el eje E_i del toro macizo W_i es una fibra excepcional de multiplicidad α_i, siendo $1 \leqslant i \leqslant r$. Podemos suponer además que si alguna componente de L corta a algún W_i, es porque dicha componente es E_i.

La proyección de L sobre S^2 está compuesta de los puntos $R_1, \cdots, R_m$. Si m es par, llamaremos R a $R_1 \cup \cdots \cup R_m$; si m es impar, llamaremos R a $R_1 \cup \cdots \cup R_m \cup P$, en donde P es la proyección sobre S^2 de la única fibra excepcional existente en S^3 cuya multiplicidad es par. Unimos los puntos de R a pares mediante una familia A de arcos disjuntos situados sobre S^2 y podemos suponer que si $q(E_i)$ no pertenece a R entonces A no corta a $q(W_i)$.

Si perforamos en S^3 aquellos W_i tales que $q(E_i)$ pertenece a R para $1 \leqslant i \leqslant r$, obtenemos una variedad fibrada de Seifert con borde, M^*, cuya base es la superficie esférica con $s \leqslant 2$ agujeros. Vamos a determinar el recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre el enlace $L \cap M^*$ de M^*. Para construirlo, podemos usar el corte fibrado $M^* \cap q^{-1}(A)$ (ver [3, sección 2]) y esto revela que el recubridor $\tilde{M}^*$ es una variedad fibrada de Seifert con base orientable de género g (en donde $g = (m - 2)/2$ si m es par y $g = (m - 1)/2$ si m es impar) con s agujeros.

La superficie esférica perforada G se eleva a una superficie orientable de género g perforada $\tilde{G}$. Si $q(E_i)$ no pertenece a R, W_i se eleva a dos toros macizos $\tilde{W}_i'$ y $\tilde{W}_i''$. Sobre $\partial\tilde{W}_i' = \tilde{T}_i'$ están las curvas $\hat{Q}_i'$, $\tilde{H}_i'$ y $\tilde{M}_i'$ que cubren a Q_i, H_i y M_i respectivamente, y sobre $\partial\tilde{W}_i'' = \tilde{T}_i''$ están las curvas $\hat{Q}_i''$, $\tilde{H}_i''$ y $\tilde{M}_i''$ que cubren a Q_i, H_i y M_i respectivamente. Nótese que $\tilde{G} \cap \tilde{T}_i' = \hat{Q}_i'$ y que $\tilde{G} \cap \tilde{T}_i'' = \hat{Q}_i''$. Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
&\tilde{M}_0' \sim \hat{Q}_0' + b\tilde{H}_0'; \text{ en } \tilde{T}_0'\\
&\tilde{M}_0'' \sim \hat{Q}_0'' + b\tilde{H}_0''; \text{ en } \tilde{T}_0''\\
&\tilde{M}_i' \sim \alpha_i\hat{Q}_i' + \beta_i\tilde{H}_i'; \text{ en } \tilde{T}_i'\\
&\tilde{M}_i'' \sim \alpha_i\hat{Q}_i'' + \beta_i\tilde{H}_i''; \text{ en } \tilde{T}_i''.
\end{aligned}$$

Si $q(E_i)$ pertenece a R, T_i se eleva a un único toro $\tilde{T}_i$, que puede construirse utilizando el corte $q^{-1}(A) \cap T_i$. Al hacerlo así, H_i se eleva a una fibra $\tilde{H}_i$ y Q_i se eleva a una transversal $\hat{Q}_i = \tilde{G} \cap \tilde{T}_i$. Si α_i es impar M_i se eleva a una curva $\tilde{M}_i$ homóloga a $\alpha_i\hat{Q}_i + 2\beta_i\tilde{H}_i$ en $\tilde{T}_i$. Si α_i es par, M_i se eleva a dos curvas, una cualquiera de las cuales, $\tilde{M}_i$, es homóloga a $(\alpha_i/2)\hat{Q}_i + \beta_i\tilde{H}_i$ en $\tilde{T}_i$ (ver en Fig. 9 el ejemplo $M \sim 5Q + 3H$).

Pegamos ahora un toro macizo $\tilde{W}_i$ a $\tilde{M}^*$, identificando $\partial\tilde{W}_i$ con $\tilde{T}_i$, de modo que $\tilde{M}_i$ sea un meridiano de $\tilde{W}_i$. Entonces $\tilde{W}_i$ admite una única fibración de Seifert compatible con la fibración de $\tilde{T}_i$. Como $\tilde{T}_i$ recubre a T_i, hay definida en $\tilde{T}_i$ una involución que conserva las fibras, cuyo espacio órbita es T_i y que transforma la transversal $\hat{Q}_i$ en la transversal Q_i y la fibra $\tilde{H}_i$ en la fibra H_i. Vamos a ver que esta involución puede ser extendida a una involución de $\tilde{W}_i$ que conserva las fibras y cuyo espacio órbita es W_i.

Si E_i es una fibra excepcional de multiplicidad impar, entonces como

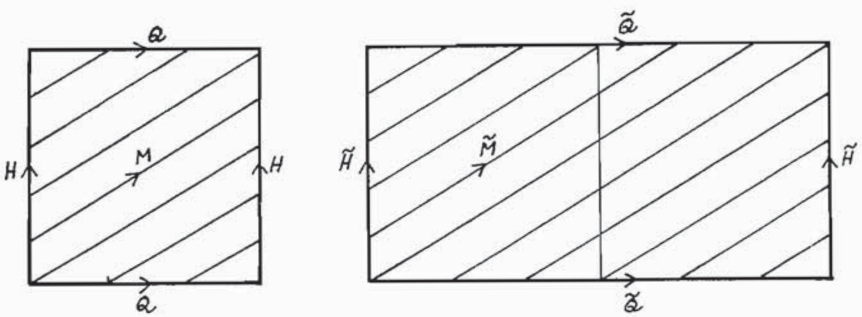


FIG. 9

$\tilde{M}_i \sim \alpha_i\hat{Q}_i + 2\beta_i\tilde{H}_i$, la involución definida en 4.2 transforma la transversal $\hat{Q}_i$ en una transversal, sea Q_i, y transforma la fibra $\tilde{H}_i$ en una fibra, sea H_i, y $\tilde{M}_i$ se aplica entonces en $\alpha_iQ_i + \beta_iH_i \sim M_i$; entonces el eje de $\tilde{W}_i$ es una fibra excepcional de multiplicidad α_i. Si E_i es la fibra excepcional de multiplicidad α_i par, entonces, como β_i es impar, siempre hay una involución de $\tilde{W}_i$ que transforma la transversal $\hat{Q}_i$ en una transversal, sea Q_i, y la fibra $\tilde{H}_i$ en una fibra, sea H_i, y entonces $\tilde{M}_i$ se aplica en $\alpha_iQ_i + \beta_iH_i \sim M_i$ (ver 4.4); en este caso no hay en W_i ningún punto singular. El eje de $\tilde{W}_i$ es una fibra excepcional de multiplicidad $\alpha_i/2$ si $\alpha_i > 2$ y una fibra general en el caso de ser $\alpha_i = 2$.

Estas observaciones hacen ver que la variedad así construida es $\tilde{L}$.

5.10. Para clasificar la variedad así obtenida, consideremos la superficie orientable de género g perforada $\tilde{G}$ que esta incluida en $\tilde{M}^*$. Los meridianos $\tilde{M}_0'$ y $\tilde{M}_0''$ de $\tilde{W}_0'$ y $\tilde{W}_0''$ respectivamente cumplen

$$\tilde{M}_0' \sim \hat{Q}_0' + b\tilde{H}_0'; \text{ en } \partial\tilde{W}_0'$$
$$\tilde{M}_0'' \sim \hat{Q}_0'' + b\tilde{H}_0''; \text{ en } \partial\tilde{W}_0''$$

siendo $\hat{Q}_0' = \tilde{G} \cap \tilde{W}_0'$ y $\hat{Q}_0'' = \tilde{G} \cap \tilde{W}_0''$. Tomemos un arco C sobre $\tilde{G}$ con origen en $\hat{Q}_0'$ y fin en $\hat{Q}_0''$. Sea D un entorno regular de C en $\tilde{G}$. Podemos modificar $\tilde{G}$ en $q^{-1}qD$ de modo que después de la modificación $\tilde{G} \cap \tilde{W}_0' = \hat{Q}_\#'$ y $\tilde{G} \cap \tilde{W}_0'' = \hat{Q}_\#''$ cumplan:

$$\hat{Q}_\#' \sim \hat{Q}_0' - b\tilde{H}_0'; \text{ en } \partial\tilde{W}_0'$$
$$\hat{Q}_\#'' \sim \hat{Q}_0'' + b\tilde{H}_0''; \text{ en } \partial\tilde{W}_0''$$

(ver [8, pag. 332, zu 6)]).

Entonces

$$\tilde{M}_0' \sim \hat{Q}_0' + b\tilde{H}_0' \sim \hat{Q}_\#' + 2b\tilde{H}_0'; \text{ en } \partial\tilde{W}_0'$$
$$\tilde{M}_0'' \sim \hat{Q}_0'' + b\tilde{H}_0'' \sim \hat{Q}_\#''; \text{ en } \partial\tilde{W}_0''$$

(ver Fig. 10).

En el caso de que E_i sea una fibra excepcional de multiplicidad $2\alpha_i$ y L tenga un número impar de componentes tenemos:

$$\tilde{M}_i \sim \alpha_i\hat{Q}_i + \beta_i\tilde{H}_i; \text{ en } \partial\tilde{W}_i.$$

Si ahora $\beta_i \geqslant \alpha_i$, entonces $\beta_i = \alpha_i + \beta_i'$, con $\beta_i' \geqslant 0$. Modificamos $\tilde{G}$ como antes pero tomando un arco desde $\hat{Q}_\#'$ a $\hat{Q}_i$; así conseguimos que después de la modificación la curva $\tilde{G} \cap \tilde{W}_i = \hat{Q}_i^*$ es homóloga a $\hat{Q}_i + \tilde{H}_i$. Así:

$$\tilde{M}_i \sim \alpha_i\hat{Q}_i^* - \alpha_i\tilde{H}_i + \beta_i\tilde{H}_i \sim \alpha_i\hat{Q}_i^* + \beta_i'\tilde{H}_i \text{ en } \partial\tilde{W}_i.$$

Pero debemos de incrementar b en uno.

Si E_i es una fibra excepcional de multiplicidad impar que es una componente de L, tenemos:

$$\tilde{M}_i \sim \alpha_i\hat{Q}_i + 2\beta_i\tilde{H}_i; \text{ en } \partial\tilde{W}_i.$$

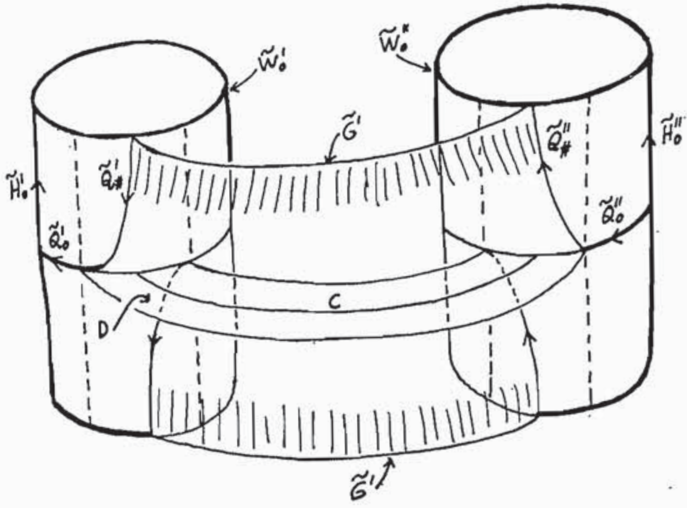


FIG. 10

Si $2\beta_i > \alpha_i$, entonces $2\beta_i = \alpha_i + \beta_i'$. Procedemos ahora como en el caso anterior.

Estas observaciones bastan para clasificar $\tilde{L}$.

5.11. Podemos ahora enumerar todas las variedades de Seifert M con base F_g, $g \geqslant 1$, que son homeomorfas a $\tilde{L}$ para algún enlace L de S^3 y tales que la involución que el recubrimiento define en M, es isótopa a una involución que mantiene las fibras de M.

a) Si L está formado por $2g + 2$ fibras de la fibración $(Oo0 \mid 1)$ (resp. $(Oo0 \mid -1)$) de S^3, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 2)$ (resp. $(Oog \mid -2)$).

b) Si L está formado por $2g + 1$ fibras generales de la fibración $(Oo0 \mid 0; (2\alpha, 1))$ de S^3, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 0; (\alpha, 1))$ si $\alpha > 1$, y $(Oog \mid 1)$ si $\alpha = 1$.

Del mismo modo, si L está formado de $2g + 1$ fibras generales de $S^3 = (Oo0 \mid -1; (2\alpha, 2\alpha - 1))$, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid -2; (\alpha, 2\alpha - 1))$. Como $2\alpha - 1 = \alpha + (\alpha - 1)$, $\tilde{L}$ es $(Oog \mid -1; (\alpha, \alpha - 1))$ si $\alpha > 1$ y $(Oog \mid -1)$ si $\alpha = 1$.

c) Si L está formado de $2g + 2$ fibras generales de la fibración $(Oo0 \mid 0; (\alpha, 1))$ (resp. $(Oo0 \mid -1; (\alpha, \alpha - 1))$) de S^3, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 0; (\alpha, 1); (\alpha, 1))$ (resp. $(Oog \mid -2; (\alpha, \alpha - 1); (\alpha, \alpha - 1))$).

d) Si L está formado de $2g + 1$ fibras generales y una fibra excepcional de la fibración $(Oo0 \mid 0; (\alpha, 1))$ (resp. $(Oo0 \mid -1; (\alpha, \alpha - 1))$) de S^3, siendo α impar, $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 0; (\alpha, 2))$ (resp. $(Oog \mid -2; (\alpha, 2\alpha - 2)) = (Oog \mid -1; (\alpha, \alpha - 2))$).

e) Si L está formado de $2g + 2$ fibras generales de la fibración $S^3 = (Oo0 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2))$, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 2b; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2); (\alpha_2, \beta_2))$.

f) Si L está formado de $2g + 1$ fibras generales y la fibra excepcional de multiplicidad α_1, siendo α_1 impar, de la fibración $(Oo0 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2))$ de S^3, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 2b; (\alpha_1, 2\beta_1); (\alpha_2, \beta_2); (\alpha_2, \beta_2))$.

g) Si L está formado de $2g + 1$ fibras generales de la fibración $(Oo0 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); (2\alpha_2, \beta_2)) = S^3$, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 2b; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2))$.

h) Si L está formado de $2g$ fibras generales y la fibra excepcional de multiplicidad α_1 de $(Oo0 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); (2\alpha_2, \beta_2)) = S^3$, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 2b; (\alpha_1, 2\beta_1); (\alpha_2, \beta_2))$.

i) Si L está formado de $2g$ fibras generales y las dos fibras excepcionales de la fibración $(Oo0 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2)) = S^3$, siendo α_1 y α_2 impares, entonces $\tilde{L}$ es $(Oog \mid 2b; (\alpha_1, 2\beta_1); (\alpha_2, 2\beta_2))$.

5.12. Sea M una variedad de Seifert orientable con base F_g, $g \geqslant 1$, y distinta de $S^1 \times S^1 \times S^1$. Supongamos que M es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace L de S^3 y sea u la involución en M correspondiente. Waldhausen ha demostrado en [8, Satz 10.1] que existe un autohomeomorfismo $\bar{u}$ de M que cumple:

a) $\bar{u}$ es isótopo a u.

b) $\bar{u}$ conserva las fibras de M.

Es claro que $\bar{u}^2$ es isótopo a la identidad.

Cuestión. ¿Existe $\bar{u}$ cumpliendo **a**), **b**) y tal que $\bar{u}^2$ es la identidad?

Si la respuesta a esta cuestión es afirmativa, las variedades enumeradas en 5.11. son las únicas variedades fibradas de Seifert con base F_g, $g \geqslant 1$, que son un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace de S^3.

5.13. *Ejemplos*, (ver [7, 160]).

a) Sobre el toro, situado en R^3, de Fig. 11 tomamos cuatro curvas disjuntas, cada una de ellas homóloga a $m + h$; obtenemos así un enlace L y $\tilde{L}$ es $(Oo1 \mid 2)$.

b) Sobre el toro, situado en R^3, de Fig. 12 tomamos tres curvas disjuntas, cada una de ellas homóloga a $m + 2h$; obtenemos así un enlace L siendo $\tilde{L} = (Oo1 \mid 1)$.

c) Sea la fibración $S^3 = (Oo0 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2))$, α_1 y α_2 impares; dos fibras excepcionales dan lugar a un enlace formado de dos nudos triviales enlazados simplemente. Esto implica que la variedad $(Oo0 \mid 2b; (\alpha_1, 2\beta_1); (\alpha_2, 2\beta_2))$ es P^3.

d) Sea la variedad $M = (Oo0 \mid 0; (2,1); (4, 1))$ y el nudo N formado por una fibra general de M. Entonces las variedades $M' = (Oo0 \mid 0; (2, 1); (2, 1); (2, 1))$ y $M'' = (Oo0 \mid 1; (4, 1); (4, 1))$ que son topológicamente distintas, son recubridores cíclicos de dos hojas ramificados sobre N, (basta aplicar los métodos de 5.9).

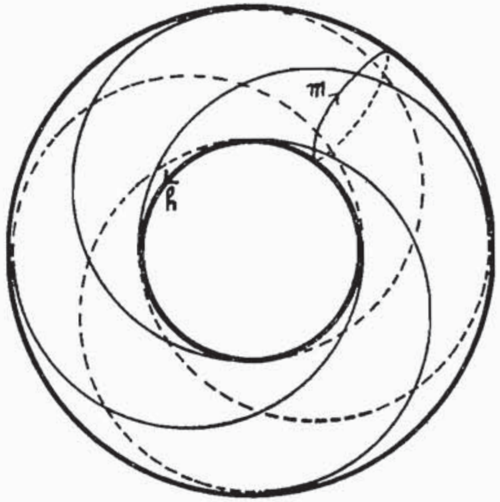


FIG. 11

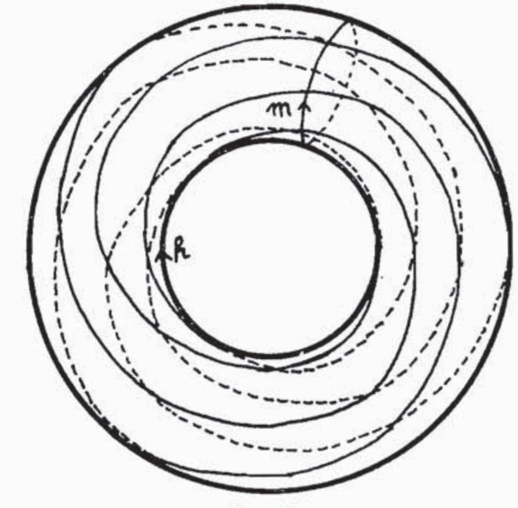


FIG. 12

Si y es un meridiano de N, $H_1(M - N)$ tiene la presentación $\{x, y \mid 6x + 4y = 0\}$, y existen entonces dos posibles representaciones de $H_1(M - N)$ sobre Z_2 que transforman y en el elemento no trivial; M' y M'' corresponden a estas dos representaciones.

5.14. Sea la variedad $M = (Oog \mid b)$ con $g > 0$. Si suponemos que M es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre S^3, existe una involución u de

M tal que los automorfismos inducidos por u, $u_1: H_1(M) \to H_1(M)$ y $u_2: H_2(M) \to H_2(M)$, tienen matriz $-\mathbf{E}$ (ver [2]). Como hemos indicado en 5.12., u es isótopo a un autohomeomorfismo $\bar{u}$ de M que conserva las fibras (exceptuado el caso $g = 1$, $b = 0$, es decir $M = S^1 \times S^1 \times S^1$). $\bar{u}$ induce entonces un autohomeomorfismo v en la base F_g de M. Tenemos (sucesión de Thom-Gysin):

$$\begin{array}{ccccccc}
H_0(F_g) & \xrightarrow{\lambda} & H_1(M) & \xrightarrow{p_*} & H_1(F_g) & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle v_0}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{u}_1}\downarrow & & {\scriptstyle v_1}\downarrow & & \\
H_0(F_g) & \xrightarrow{\lambda} & H_1(M) & \xrightarrow{p_*} & H_1(F_g) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

El núcleo de p_*, que es isomorfo a $Z/(b)$, está generado por la fibra H y transforma un generador de $H_0(F_g) = Z$ en H. Como la matriz de $\bar{u}_1$ es $-\mathbf{E}$, esto significa que, si $b \neq \pm 1, \pm 2$, v_0 tiene matriz $-\mathbf{E}$ lo cual no puede suceder.

Como $S^1 \times S^1 \times S^1$ no es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre S^3 (ver [2]), podemos concluir que $(Oog \mid b)$ con $g > 0$ y $b \neq \pm 1, \pm 2$, no es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre S^3.

Nótese que $(Oog \mid \pm 1)$ y $(Oog \mid \pm 2)$ son recubridores cíclicos de dos hojas ramificados sobre S^3, (ver 5.11.).

Estos resultados pueden utilizarse para obtener un enlace representado (N, ω) no separable, tal que ω es una representación de $\pi(S^3 - N)$ sobre el grupo de permutaciones de tres índices. Los ejemplos conocidos hasta ahora eran enlaces representados sobre el grupo de permutaciones de cuatro índices.

Para ello, consideremos un enlace N' formado de cuatro fibras generales de la fibración $(Oo0 \mid 1) = S^3$. Como un doble toro es un recubridor cíclico de tres hojas ramificado sobre cuatro puntos de S^2, la construcción de 5.9. permite presentar a $(Oo2 \mid 3)$ como un recubridor (cíclico) de tres hojas ramificado sobre N'. Esto significa que $(Oo2 \mid 3)$ es el recubridor asociado a una representación ω' de $\pi(S^3 - N')$ en el grupo de permutaciones de tres índices. Aplicando las alteraciones definidas en [3] y [6] a (N', ω'), obtenemos un enlace N y una representación ω de $\pi(S^3 - N)$ sobre el grupo de permutaciones de tres índices que asigna a cada meridiano de N, una trasposición. Como $M(N, \omega) = (Oo2 \mid 3)$ no es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre S^3, se deduce que (N, ω) no es separable (ver [3]).

§6. Recubridores ramificados sobre la esfera con asas

6.1. Representemos ahora la variedad fibrada de Seifert $(Oo1 \mid 0) = S^1 \times S^1 \times S^1$ como un cilindro macizo fibrado, en el que hay que llevar a cabo las identificaciones que se indican en Fig. 13. La simetría respecto al eje E define una involución cuyo espacio órbita es $S^1 \times S^2$, siendo la imagen de las curvas dobles c, E, F y G, las curvas c', E', F' y G' de Fig. 14. La simetría respecto al eje H define una involución en $S^1 \times S^2$ que transforma c' en G' y E' en F'. El espacio órbita de esta involución es S^3; la imagen de G' y E' es G'' y E'' respectivamente y la imagen de las curvas dobles H y K es H' y K' respectivamente (ver Fig. 15).

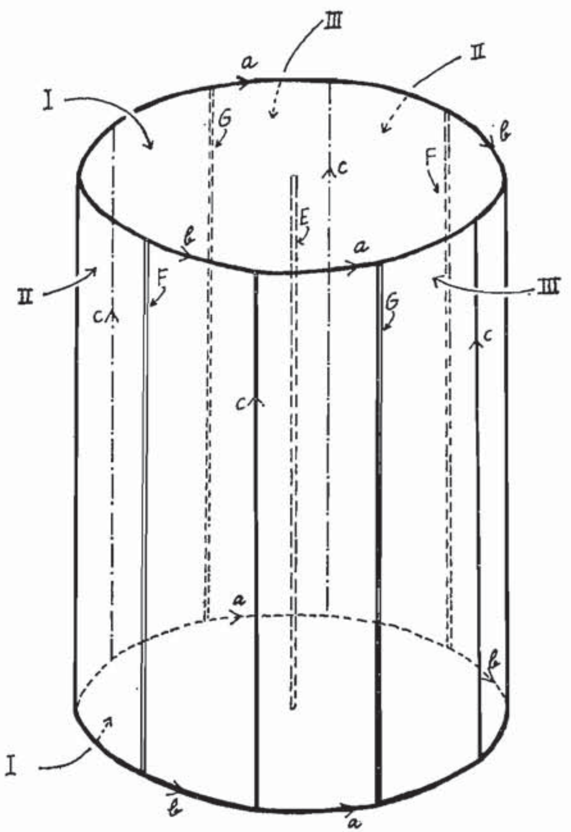


FIG. 13

Por tanto [5] $(Oo1 \mid 0)$ es $M(N, \omega)$ para (N, ω) el enlace representado de Fig. 15. La bola B de Fig. 15 se eleva a dos toros macizos fibrados de $(Oo1 \mid 0)$. Nótese también que $M(N, \omega) \to S^3$ se factoriza así $M(N, \omega) \to (On2 \mid 0) \to S^3$, siendo $M(N, \omega) \to (On2 \mid 0)$ un recubridor doble (no ramificado) (ver § 3 y [5]).

En enlace representado de Fig. 15 puede llevarse, mediante las modificaciones definidas en [3], al enlace representado de [2, Fig. 1].

Resumimos estos resultados en el siguiente

TEOREMA. *La variedad* $(Oog \mid 2b; (\alpha_1, \beta_1); (\alpha_1, \beta_1); \cdots; (\alpha_r, \beta_r); (\alpha_r, \beta_r))$ *es homeomorfa a* $M(N, \omega)$ *siendo* (N, ω) (como se representa en la Fig. 16). *Además* $M(N, \omega)$ *es un recubridor doble (no ramificado) sobre* $(On\ g + 1 \mid b; (\alpha_1, \beta_1); \cdots; (\alpha_r, \beta_r))$.

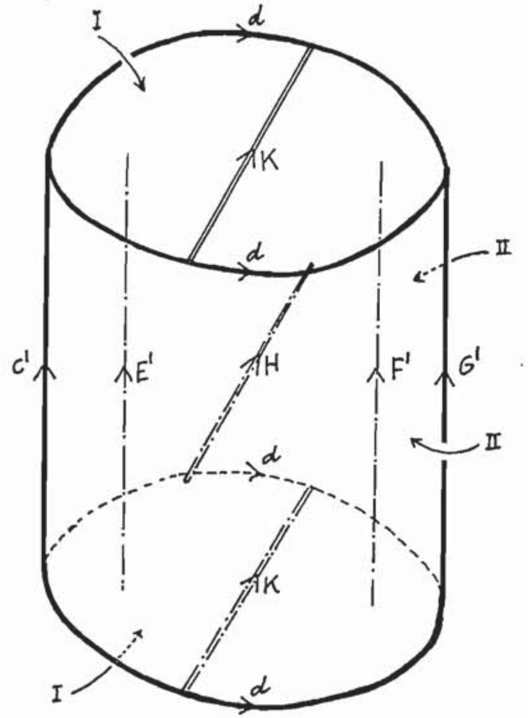


FIG. 14

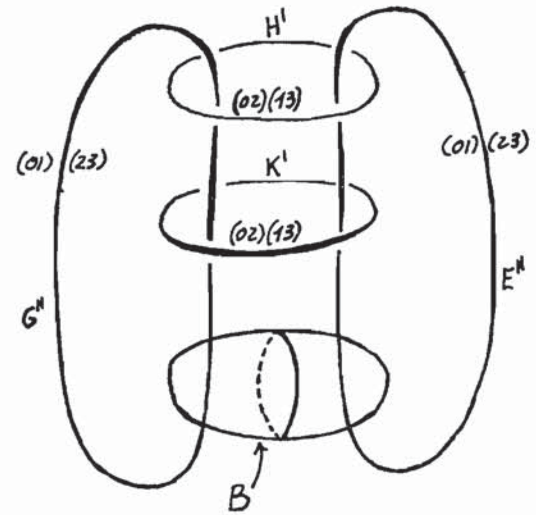


FIG. 15

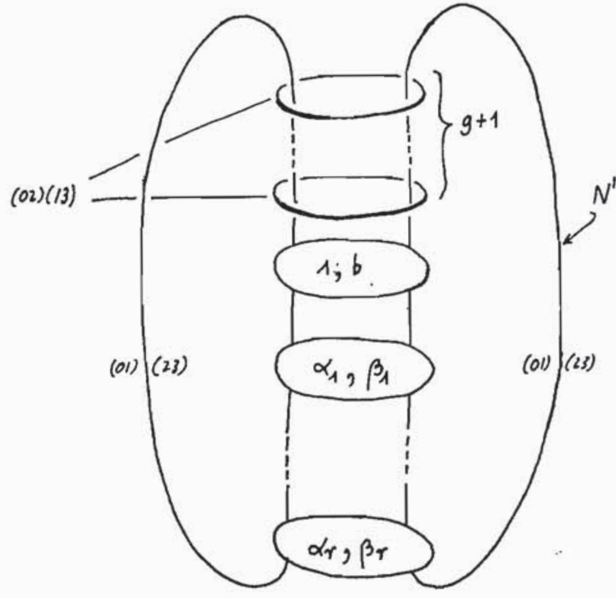


Fig. 16

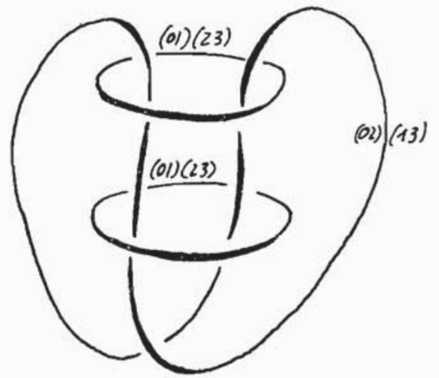
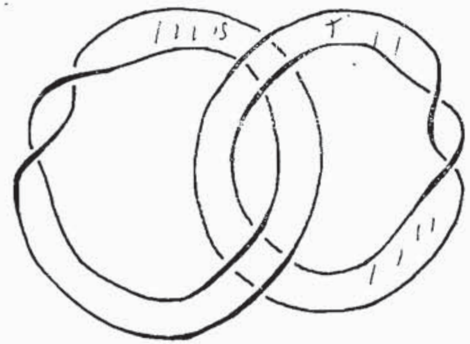


Fig. 17

6.2. *Ejemplos.*

a) Sea $(Oo0 \mid b;\ (\alpha_1, \beta_1);\ (\alpha_2, \beta_2))$ una fibración de S^3, entonces en el enlace representado (N, ω) de Fig. 16, la componente N' es trivial (ver 3.2, ejemplo **a**)). Podemos factorizar $M(N, \omega) \to S^3$ así: $M(N, \omega) \to \tilde{N}' = S^3 \xrightarrow{\tau} S^3$, siendo $M(N, \omega) \to S^3$ el recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre el enlace $\tau^{-1}(N - N')$. Por tanto $(Oog \mid 2b;\ (\alpha_1, \beta_1);\ (\alpha_1, \beta_1);\ (\alpha_2, \beta_2);\ (\alpha_2, \beta_2))$ es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace de S^3 (comparar 5.11, **e**)).



[illegible]
[illegible] $S^1 \times S^1 \times$
[illegible]
[illegible]
[illegible] $S^1 \times S^1$

Fig. 18

Por ejemplo, si (N, ω) es el enlace representado de Fig. 17, entonces $M(N, \omega)$ es $(Oo1 \mid 2)$. En este caso, puede construirse fácilmente el enlace $\tau^{-1}(N - N')$ de $\tilde{N}' = S^3$, y se comprueba que es el representado en Fig. 18.

El enlace de Fig. 18 ha sido hallado en 5.13, **a**) de otra manera

b) Consideremos el enlace representado (N, ω) de Fig. 16, y supongamos que $r \geqslant 3$. Siempre que la cuestión propuesta en 5.12 tenga respuesta afirmativa, $M(N, \omega)$ no es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace de S^3; por tanto, al aplicar a (N, ω) las alteraciones definidas en [3], obtenemos un enlace representado no separable (ver [2], [3] y [4]).

6.3. Sea ahora la variedad $(Oo2 \mid 0)$ representada como un cilindro macizo fibrado, en el que hay que llevar a cabo las identificaciones que se indican en Fig. 19. La simetría respecto al eje E define una involución cuyo espacio órbita es $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$ (Fig. 20). La bola B de Fig. 20 se eleva a un toro macizo fibrado en $(Oo2 \mid 0)$; tenemos pues:

Teorema. *Una variedad* $(Oog \mid b;\ (\alpha_1, \beta_1);\ \cdots\ ;\ (\alpha_r, \beta_r))$ *es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace de una esfera con g asas.*

§7. Las variedades de Waldhausen

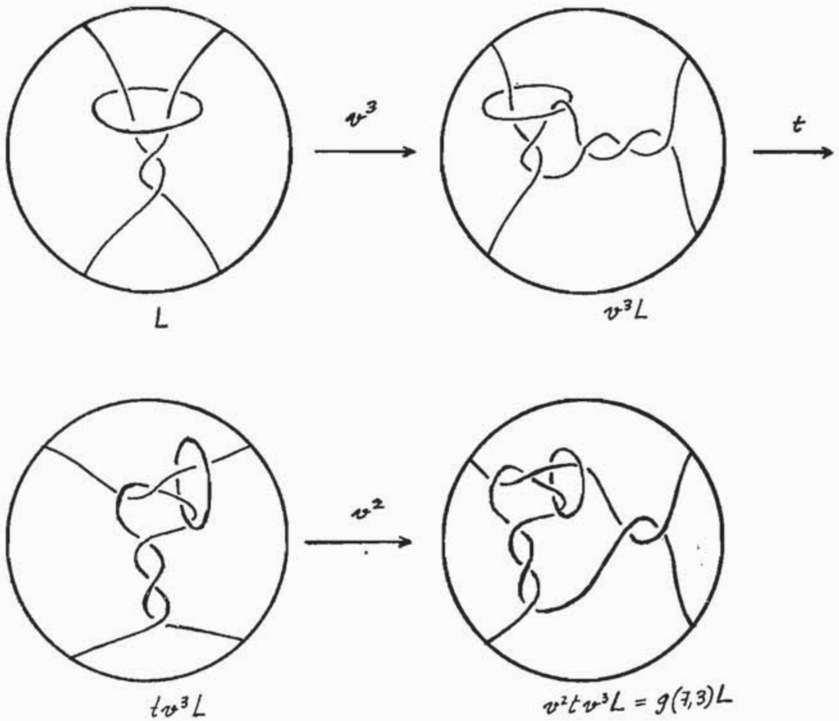
7.1. En esta sección indicaremos el modo por el que, parte de los resultados obtenidos, pueden generalizarse a las variedades de Waldhausen ("Graphenmannigfaltigkeit") definidas y estudiadas en [8].

7.2. Este número es una continuación de 1.1. Definimos $g(\alpha, \beta)$ como $v^n t v^m t \cdots t v^k t v^j t v^i$ y $\bar{g}(\alpha, \beta)$ como $\bar{v}^n \bar{t} \cdots \bar{t} \bar{v}^i$. Es claro que $\bar{g}(\alpha, \beta)\tilde{H}$ es homóloga a $\alpha\tilde{Q} + \beta\tilde{H}$ en $\partial\tilde{B}$.

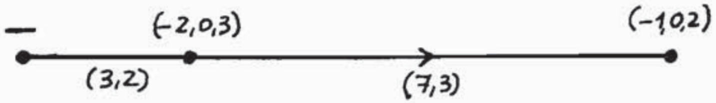
Para fijar las ideas, supongamos que B es la bola de Fig. 21 y L la curva representada en su interior. Es claro que (§3.) $\tilde{L}$ es $(On1 \mid 2)$ perforado de un toro macizo fibrado, cuya fibra es $\tilde{H}$.

Podemos extender a B el homeomorfismo $g(\alpha, \beta)$. Entonces el recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre la curva $g(\alpha, \beta)\ L$ de B es $(On1 \mid 2)$ perforado de un toro macizo fibrado cuya fibra es homóloga a $\tilde{g}(\alpha, \beta)\tilde{H} \sim \alpha\hat{Q} + \beta\tilde{H}$ en $\partial\hat{B}$.

Si, por ejemplo, $\alpha = 7$, $\beta = 3$, entonces $g(7, 3) = v^2tv^3$ y tenemos:



7.3. Sea la variedad M representada por el grafo



Vamos a construir un enlace N de S^3 tal que $\tilde{N} = M$. Sea el enlace N' de Fig. 22. Sabemos (§3.) que $\tilde{N}'$ es $(On2 \mid 3;\ (3, 2))$ y que la bola B se eleva a un toro macizo $\tilde{B}$ fibrado con fibra $\tilde{H}$. Damos a ∂B la orientación inducida por $S^3 - B$.

Modificar los arcos A_1A_2, A_3A_4, en el interior de B, por $g(7, 3)L$ definido en 7.2, equivale a sustituir $\tilde{B}$ por $(On1 \mid 2)$ perforado de un toro macizo fibrado cuya fibra es homóloga a $7\hat{Q} + 3\tilde{H}$ en $\partial\hat{B}$.

Con estas observaciones, es fácil probar el siguiente

TEOREMA. *Sea M una variedad de Waldhausen cuyo grafo $A(M)$ es un árbol valorado de modo que, si a un vértice μ_j del grafo le corresponde el triple (g_j, r_j, s_j),*

es $g_j \leqslant 0$ y $r_j = 0$; entonces M es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace L de S^3.

Nótese que el enlace L, cuya existencia asegura el Teorema, es fácilmente calculable.

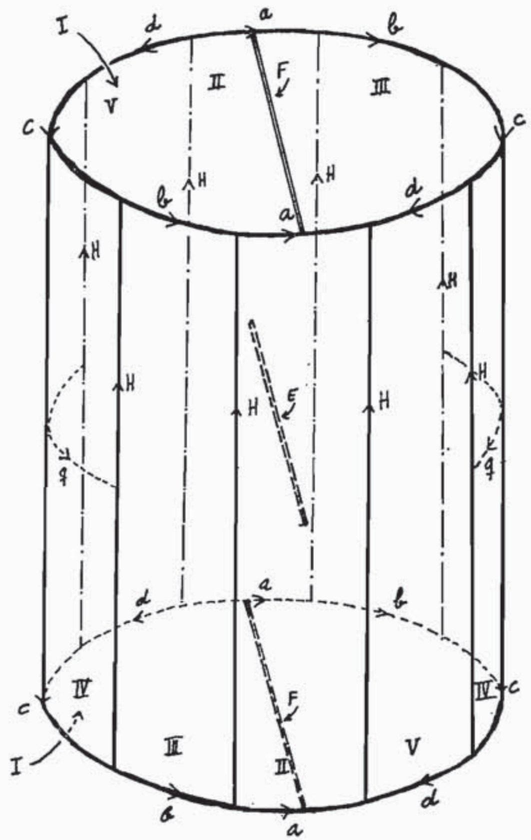


FIG. 19

7.4. Si $A(M)$ no es un árbol, entonces M es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace de una esfera con asas y lo mismo sucede si en el grafo $A(M)$ existe un vértice μ_j para el que $g_j > 0$. Es fácil convencerse de ello mediante el siguiente ejemplo.

Sea el grafo $A(M)$ de Fig. 23, en el que existe un ciclo que llamaremos Z, y sean los enlaces N' y N'' de Fig. 24. Entonces $\tilde{N}' = (Oo1 \mid 1;\ (3, 1))$ y $\tilde{N}'' = (Oo1 \mid 2;\ (3, 1))$. Para construir un enlace L, tal que $\tilde{L} = M$, deberemos vaciar las bolas B_1, B_2, B_1' y B_2' de Fig. 24 y pegar luego, de un determinado modo, ∂B_1

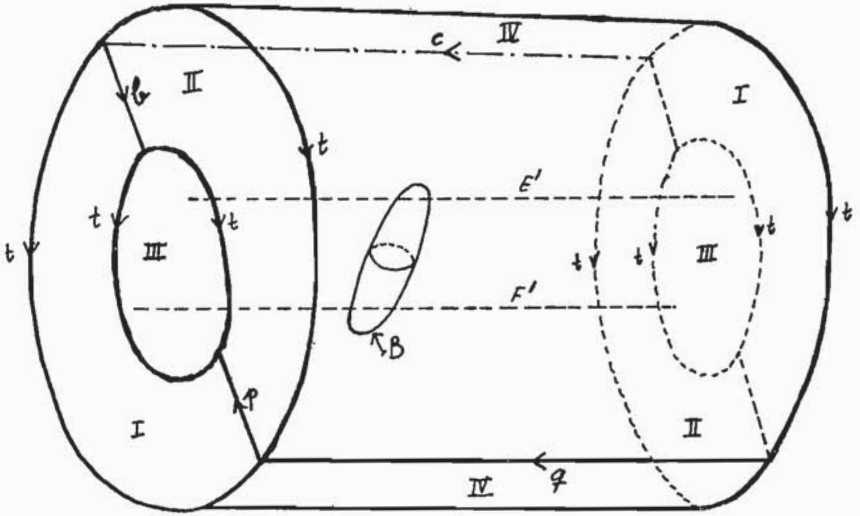


FIG. 20

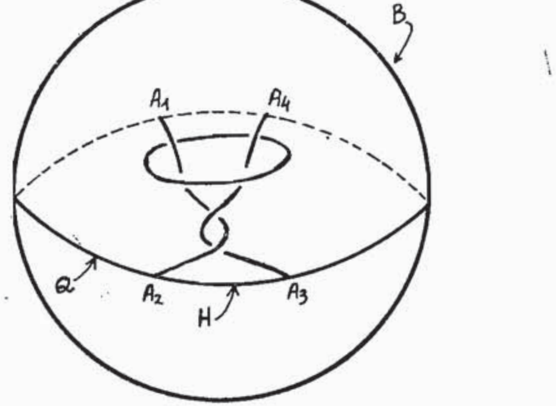


FIG. 21

con $\partial B_1'$ y ∂B_2 con $\partial B_2'$. Nótese que, una vez pegados ∂B_1 con $\partial B_1'$, pueden identificarse ∂B_2 con $\partial B_2'$ de dos modos distintos que dan lugar a dos enlaces de $S^1 \times S^2$ esencialmente distintos; las variedades recubridoras correspondientes son las dos variedades distintas, determinadas por las dos posibles valoraciones del ciclo Z, con $\epsilon = +1$ ó con $\epsilon = -1$ (ver [8, 9.2.8.])

7.5. Un S^1-fibrado sobre una superficie F_g, es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre una esfera con g asas (§6.). No es difícil ver que una variedad

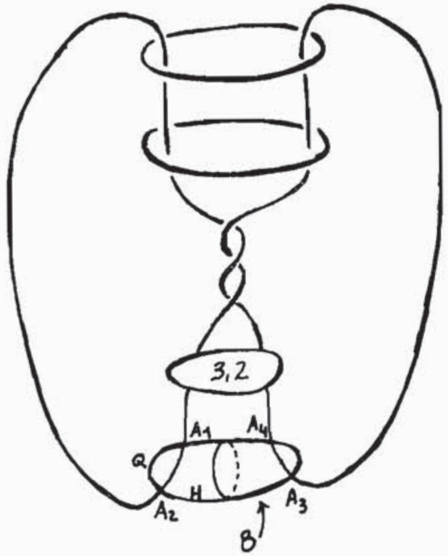


FIG. 22

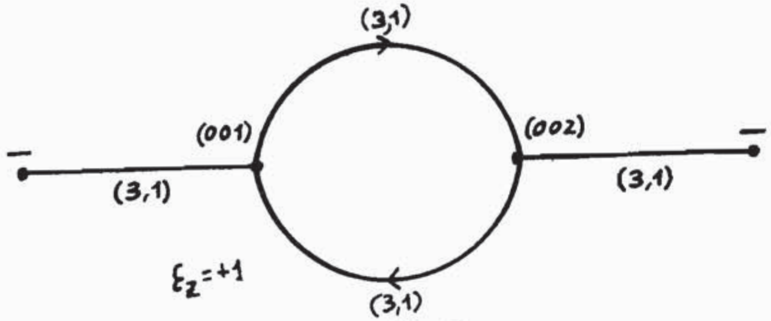


FIG. 23

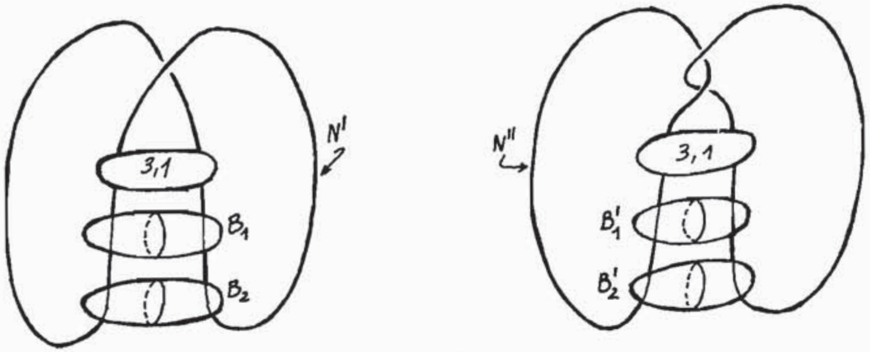


FIG. 24

de Waldhausen M, sin borde, es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre un enlace de una variedad formada del siguiente modo. A cada vértice valorado con $(g_j, 0, s_j)$ le corresponde una esfera con g_j asas si $g_j > 0$, o una esfera si $g_j \leqslant 0$; luego es preciso hacer una suma conexa de estas piezas, tomando después tantas asas como ciclos independientes tiene $A(M)$.

Tenemos por tanto el

TEOREMA. *Toda variedad de Waldhausen sin borde es un recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre una esfera con g asas, en donde g se obtiene al sumar los ciclos independientes de $A(M)$ y los $g_j > 0$ asociados a los vértices del grafo $A(M)$.*

UNIVERSIDAD DE MADRID

REFERENCIAS

[1] J. H. CONWAY, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*' Computational Problems in Abstract Algebra. John Leech, Ed. Pergamon Press, New York (1970) 329–58.
[2] R. H. FOX, *A note on branched cyclic coverings of spheres*. Rev. Mat. Hisp.-Amer. **32** (1972) 158–66.
[3] J. M. MONTESINOS, *Reducción de la conjetura de Poincaré a otras conjeturas geométricas*. Rev. Mat. Hisp-Amer. **32**(1972) 33–51.
[4] ——— , *Una familia infinita de nudos representados no separables*. Rev. Mat. Hisp-Amer. **33**(1973) 32–5.
[5] ——— , *Representaciones de enlaces en relación con recubridores dobles ramificados*. En preparación.
[6] ——— , *Una nota a un teorema de Alexander*, Rev. Mat. Hisp.-Amer. **32**(1972) 167–87.
[7] H. SEIFERT, *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume*, Acta Math. **60**(1933) 147–238.
[8] F. WALDHAUSEN, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten* I y II. Invent. Math. **3**(1967) 308–33 y **4**(1967) 87–117.
[9] ———, *Über Involutionen der 3-Sphäre*, Topology **8**(1969) 81–91.