Actas del V Congreso de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina (Mallorca, 1977). Editado en Madrid : Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, 1978. ISBN 84-00-04340-5

UNA DESCOMPOSICION DE UN CONJUNTO SEMI-ALGEBRAICO

por

TOMAS J. RECIO MUÑIZ
Departamento de Algebra y Fundamentos
Universidad Complutense. Madrid

Si consideramos un conjunto algebraico real $V \subseteq \mathbb{R}^n$, dado por un ideal $I(V) \subseteq \mathbb{R}[X]$, contrariamente a lo que sucede en el caso complejo el anillo $\mathbb{R}[X]/I(V)$ no es suficientemente bueno para el estudio de determinadas propiedades de V. Así, por ejemplo, dicho anillo puede ser un dominio de integridad y sin embargo V puede no ser conexo (en la topología usual de $\mathbb{R}^n$); o la localización del citado anillo en un determinado punto de V puede ser no regular a pesar de poseer V en un entorno de dicho punto (con la topología de $\mathbb{R}^n$) unas ecuaciones algebraicas locales que lo hacen homeomorfo a una variedad lineal. Ninguno de estos casos pueden ocurrir considerando conjuntos algebraicos complejos.

Surge así la idea de sustituir el anillo de polinomios $\mathbb{R}[X]$ por otro anillo de propiedades algebraicas buenas y que contenga más funciones que $\mathbb{R}[X]$. Se trata del anillo N de funciones de Nash globales: esto es, del anillo de funciones analíticas definidas en todo $\mathbb{R}^n$ y que localmente dependen algebraicamente sobre el cuerpo de funciones racionales. Recientemente dicho anillo ha sido estudiado, entre otros por Risler [1], Mostowski [2] y Efroymsom [3], [4], poniendo de manifiesto su manejabilidad algebraica. Sumergimos así el estudio de los conjuntos algebraicos reales en la geometría de los conjuntos nashicos (i. e. definidos como solución de un número de ecuaciones dadas por funciones de Nash). Lojasiewicz [5] pone de manifiesto que tanto los conjuntos nashicos como los algebraicos reales no son sino conjuntos semialgebraicos de acuerdo con la siguiente

DEFINICIÓN.—Un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es semialgebraico si existe en polinomios $\{g_{ij}\}$, $\{f_{ij}\}$, $i \in I$, $j \in J$ en número finito tales que

$$W = \bigcup_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_{ij}(x) > 0 \quad f_{ij}(x) = 0, \quad j \in J\}.$$

En particular diremos (c. f. Abellanas [6]) que un conjunto es prealgebraico si en la definición anterior W puede definirse con desigualdades no estrictas, esto es

$$W = \bigcup_{i \in I} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid h_{ij}(x) \geqslant 0 ; \quad j \in J \}, \quad h_{ij} \in \mathbb{R}[X].$$

Estos conjuntos prealgebraicos son particularmente cómodos de manejar y muchas de sus características geométricas pueden ser recogidas algebraicamente (c. f. Abellanas [6] y Recio [7]). Puesto que el cierre de un conjunto semialgebraico es también semialgebraico y un número de propiedades (p. ej. la dimensión) se conserva por la clausura, la importancia de los conjuntos prealgebraicos se pone de manifiesto con la siguiente proposición cuya demostración constituye el § 2 de nuestro trabajo.

PROPOSICIÓN.—Todo conjunto semialgebraico cerrado es prealgebraico.

En su demostración juega un papel esencial la siguiente variación sobre un lema de separación debido a Efroymsom [4]:

LEMA.—Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto semialgebraico de la forma

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) > 0, \ldots, f_S(x) > 0 \},$$

donde $f_i \in \mathbb{R}[X]$; sean C_1 y C_2 subconjuntos semialgebraicos cerrados y disjuntos de D. Existen polinomios $\{g_{ij}\}$ $i \in I$, $j \in J$ en número finito tales que

$$S = \bigcup_{i \in I} \{ x \in D \mid g_{ij}(x) \geqslant 0, \quad j \in J \} \supseteq C_1$$

y $S \cap C_2 = \varnothing$.

En el estudio de la relación entre los ideales de las funciones de Nash globales y del anillo de polinomios aparece como instrumento natural la localización. Esta se ve dificultada por el hecho —indicado al principio— de no recoger fielmente el caso algebraico el comportamiento local de un conjunto algebraico. El olvido de este fenómeno conduce a demostraciones poco precisas como la del lema 2.11 del artículo de Risler [1] donde afirma que para un conjunto algebraico V, localmente la multiplicidad como conjunto algebraico coincide con la multiplicidad como conjunto analítico. Para obviar esta dificultad surge la idea de utilizar otro anillo local que se aproxime más al conjunto algebraico alrededor del punto de estudio y cuya construcción se realiza a semejanza de los anillos locales de los gérmenes analíticos. Como se pone de manifiesto en el desarrollo de este trabajo, resulta conveniente generalizar este recurso a los conjuntos semialgebraicos de acuerdo con la siguiente

DEFINICIÓN.—Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semialgebraico, $p \in \mathbb{R}^n$. Definamos el ideal local de W en p.

$$I(W_p) = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid U_p,$$

entorno de p en la topología usual de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in W \cap U_p \}.$$

Si $\mathbb{R}[X]_p$ es el anillo localizado de $\mathbb{R}[X]$ respecto al ideal maximal del punto p, denotamos por $J(W_p) = I(W_p)\,\mathbb{R}[X]_p$.

El anillo local $\mathbb{R}[X]_p/J(W_p)$ refleja ahora tan fielmente como es posible las propiedades locales de W en p. Redefinimos las nociones de punto múltiple, de multiplicidad, de regularidad, de dimensión, etc., en términos de este anillo, y a ellas nos referiremos en lo sucesivo. El párrafo § 3 de nuestro trabajo está dedicado a recoger las propiedades globales de los conjuntos de puntos regulares, múltiples, etc., de acuerdo con estas nuevas definiciones.

Usando la equivalencia entre conjuntos semialgebraicos cerrados y prealgebraicos y el estudio realizado para estos en Recio [7] probamos:

PROPOSICIÓN.—Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ semialgebraico. Entonces el conjunto de puntos regulares de V es denso en V.

PROPOSICIÓN.—Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ semialgebraico de dimensión d. Entonces el mínimo conjunto algebraico que lo contiene es de dimensión d.

Usando estas proposiciones en un proceso de inducción respecto a la dimensión de un conjunto semialgebraico probamos la siguiente condición de finitud:

PROPOSICIÓN.—Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ semialgebraico. La familia $\{I(V_p)\}_{p \in \mathbb{R}^n}$ es una familia finita de ideales.

Sean $I_1, \ldots, I_m$ los distintos ideales así obtenidos para cierto V; y escribamos para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$V_i = \{ p \in \mathbb{R}^n \mid I(V_p) = I_i \}.$$

Se tiene

PROPOSICIÓN.—$\forall\, i = 1, \ldots, m$, V_i es un conjunto semialgebraico.

En general, aun siendo V algebraico, los conjuntos V_i no son algebraicos sino semialgebraicos. De ahí la necesidad de realizar este estudio en el marco de la geometría semialgebraica. Para V cerrado, los $\{V_i\}$ $i = 1, \ldots, m$ forman una partición de V, y para V arbitrario una partición de su cierre $\bar{V}$. Como consecuencia de estas proposiciones demostramos para V algebraico la siguiente

PROPOSICIÓN.—Sea V_μ el conjunto de los puntos de V de multiplicidad mayor o igual a μ (con $\mu \in N$). Entonces V_μ es semialgebraico.

Y en general para V semialgebraico tenemos

PROPOSICIÓN.—El conjunto de los puntos regulares de dimensión d de V, con $0 \leqslant d \leqslant \dim V$ es semialgebraico.

Las proposiciones demostradas en el § 3 ponen de manifiesto las modificaciones que nuestras definiciones introducen respecto de las proposiciones correspondientes con las definiciones clásicas, tanto en el marco de la geometría algebraica (donde aparecen ahora los conjuntos semialgebraicos) como en el de la geometría analítica (consiguiendo ecuaciones globales). El párrafo § 4 continúa en la misma dirección en torno a la noción de coherencia.

DEFINICIÓN.—Dado un conjunto algebraico V, y un punto $p \in V$, decimos que V es coherente en p (en sentido algebraico) si existe un entorno de p en V y unos polinomios que generan el ideal J $(V_{p'})$ para cada p' en dicho entorno.

Usando la descomposición de V podemos demostrar

PROPOSICIÓN.—Sea V un conjunto algebraico. Entonces el conjunto de los puntos coherentes de V es semialgebraico.

Usualmente la definición de coherencia en un punto para un conjunto algebraico se realiza considerando este como conjunto analítico. Con esta definición analítica era conocido que el conjunto de puntos de no-coherencia no era analítico (c. f. Acquitaspace-Broglia-Tognoli [8]) y que su dimensión era menor que dim V-2 (c. f. Fensch [9]); Galbiati [10] demuestra que dicho conjunto es semianalítico. En todos estos casos la consideración de la coherencia analítica no permite obtener ecuaciones globales, como hacemos nosotros, si bien la totalidad de los ejemplos manejados corresponde a conjuntos algebraicos. Por medio de un viejo ejemplo de Cartan [11] ponemos de manifiesto que ambas nociones de coherencia no coinciden sobre un conjunto algebraico: más aún, demostramos

PROPOSICIÓN.—Sea V_p germen de un conjunto algebraico real. Si V_p es analíticamente coherente es algebraicamente coherente.

Es así posible enunciar el resultado de Fensch referido a nuestra definición de coherencia.

Bibliografía

[1] Risler, J. J.: *Sur l'anneau des fonctions de Nash globales.* «Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.», 4.ª Serie, t. 8, 1975, pp. 365-378.

[2] Mostowski, T.: *Some properties of the ring of Nash functions.* «Ann. Scuola N. Sup.», Pisa, 1970, vol. III-2, pp. 245-266.

[3] Efroymsom, G.: *A Nüllstellensatz for Nash rings.* «Pac. J. of Math.», vol. 54, núm. 1, 1974.

[4] — — *Substituition in Nash functions.* «Pac. J. of Math.», vol. 63, núm. 1, 1976.

[5] Lojasiewicz, S.: *Ensembles semianalytiques.* Lec. Note at the I. H. E. S., 1965.

[6] Abellanas, P.: *R-álgebras analíticas valoradas.* Estudios de Matemática. Homenagem ao Pr. A. Almeida Costa, Lisboa, 1974.

[7] Recio, T.: *Conjuntos preanalíticos, prealgebraicos y prenashicos.* «Col Mon. y Mem.», XIII, I. Jorge Juan, Madrid, 1977.

[8] Acquitaspace-Broglia-Tognoli: *Sull'insieme di non coerenza di un insieme analitico reale.* «Lincei. Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat.», vol. LV, F, 1973.

[9] Fensch, W.: *Reel analytische Strukturen.* Munster, 1966.

[10] Galbiati, M.: *Stratifications et ensemble de non coherence d'un espace analytique reel.* «Invent. Math.», 1976, pp. 113-128.

[11] Cartan, H.: *Varietes analytiques reelles et varietes analytiques complexes.* «Bull. Soc. Math. France», 85, 1957, pp. 77-79.

UNA DESCOMPOSICION DE UN CONJUNTO SEMIALGEBRAICO

Tomás J. Recio Muñiz
Dptº Algebra y Fundamentos
Universidad Complutense
MADRID.

1. Dado un conjunto algebraico real $V \subseteq R^n$ de ideal $I(V) \subseteq R[\underline{X}]$, y un punto $p \in V$ sustituimos en las definiciones clásicas de regularidad y multiplicidad de p, el anillo local $R[\underline{X}]_p / I(V)R[\underline{X}]_p$, por $R[\underline{X}]_p / J(V_p)$ donde $J(V_p) = I(V_p)R[\underline{X}]_p$, con $I(V_p) = \{f \in R[\underline{X}] \mid \exists\, U_p$ entorno de p en la topología usual de R^n, $f(x) = 0, \ \forall x \in U_p \cap V\}$. Asimismo establecemos una definición (algebraica) de coherencia de V en p, diciendo que p es coherente si existe un cierto entorno con la topología usual, U_p, y un número finito de polinomios que generan el ideal $J(V_{p'})$ para cada $p' \in U_p$. El objetivo de este trabajo es el de realizar el estudio de los conjuntos de puntos regulares, (respectivamente de multiplicidad superior a un número dado, coherentes) poniendo de manifiesto que se trata de conjuntos semialgebraicos. En cada caso la técnica de la demostración consiste en descomponer el conjunto algebraico dado en subconjuntos formados por aquellos puntos p donde el ideal $I(V_p)$ es fijo; dichos subconjuntos son semialgebraicos y existe sólo un número finito de ellos. Para facilitar el estudio de los conjuntos semialgebraicos se establece -apoyado en un lema de Efroymsom- que todo conjunto semialgebraico cerrado puede escribirse utilizando unicamente desigualdades no estrictas.

La idea que subyace en todo el trabajo es la de estudiar los conjuntos algebraicos reales de la manera más afinada posible, poniendo de manifiesto aquellas propiedades en cuya formulación los métodos clásicos resultan demasiado laxos al no introducir la topología de R^n y los métodos analíticos olvidan las característicasde finitud y globalidad de los conjutos algebraicos: esto es, aquellas propiedades que pueden formularse en términos de topología de R^n y polinomios.

§2. Establecemos en este párrafo un resultado de caracter técnico sobre los conjuntos semialgebraicos que enunciamos así: "Todo conjunto semialgebraico cerrado es definible utilizando sólo desigualdades no estrictas" (compárese con Mostowski [1] lema 6).

2.1. <u>Definición</u>.

$\omega \subseteq R^n$ es un conjunto semialgebraico si existen polinomios $\{g_{ij}\}$, $\{f_{ij}\}$, $i \in I$, $j \in J$ en número finito tales que

$$\omega = \bigcup_{i \in I} \{x \in R^n \mid g_{ij}(x) > 0, \quad f_{ij}(x) = 0, \; j \in J\}$$

Diremos que $\omega \subseteq R^n$ es prealgebraico si existen polinomios $\{h_{ij}\}$, $i \in I, j \in J$ en número finito, tales que

$$\omega = \bigcup_{i \in I} \{x \in R^n \mid h_{ij}(x) \geq 0, \quad j \in J\}$$

De manera análoga definiríamos conjuntos semialgebraicos y prealgebraicos sobre un subconjunto $U \subseteq R^n$.

Sea $D \subseteq R^n$ un abierto semialgebraico de la forma

$$D = \{x \in R^n \mid f_1(x) > 0, \ldots, f_s(x) > 0\},$$

para ciertos polinomios $f_1, \ldots, f_s$. Sean C_1 y C_2 dos subcon juntos semialgebraicos disjuntos y cerrados de D.

2.2. Lema.

Existen polinomios $\{g_{ij}\}$, $i \in I$, $j \in J$, en número finito tales que

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in D \mid g_{ij}(x) \geq 0, \quad j \in J\} \supseteq C_1 \quad \text{y}$$

$$S \cap C_2 = \phi.$$

Demostración.

Se trata de una aplicación inmediata del Lema de Separación de Efroymson [2]. En efecto, en dicho Lema se construye -en nuestras hipótesis- una partición de R^n en un número finito de conjuntos semialgebraicos conexos tal que

$$C_1 = \bigcup_{i \in I_1} T_i \ , \qquad C_2 = \bigcup_{j \in I_2} T_j \ ,$$

donde T_i, T_j son miembros de la partición que posee la propiedad de que es posible subdividir T_i, T_j en unión de conjuntos semialgebraicos tales que

$$\forall i \in I_1, \quad T_i = \bigcup_{l \in L_i} T^i_l \ , \quad \forall j \in I_2, \quad T_j = \bigcup_{s \in S_j} T^j_s$$

y existen unos polinomios $p_1, \dots, p_k$ verificando

$$\overline{T}_i \cap \overline{T}_j = \phi \Longrightarrow \forall l \in L_i, \quad \forall s \in S_j, \quad \exists\, p_m, \quad 1 \leq m \leq k,$$

$$\pm\, p_m(T^i_l) \geq 0 \quad \text{y} \quad \pm\, p_m(T^j_s) < 0,$$

donde se entiende que en ambas expresiones simultaneamente es $+p_m$ ó $-p_m$.

Ahora, dado $i \in I_1$, $l \in L_i$ consideremos el conjunto $M_{i,l}$ tal que, dado $j \in I_2$, $s \in S_j$, exista $h \in M_{i,l}$ y un polinomio $t_h^{i,l}$ con

$$t_h^{i,l}(T_l^i) \geq 0 \quad . \qquad y \qquad t_h^{i,l}(T_s^j) < 0.$$

Sea

$$S = \bigcup_{\substack{i \in I_1 \\ l \in L_i}} \{x \in D \mid t_h^{i,l}(x) \geq 0, \quad h \in M_{i,l}\} \ ;$$

es fácil comprobar que en efecto

$$S \supseteq C_1 \qquad y \qquad S \cap C_2 = \phi. \qquad\qquad \text{c.q.d.}$$

2.3. Lema.

Sea G_o abierto semialgebraico de R^n de la forma

$$G_o = \{x \in R^n \mid g_1(x) > 0, \ldots, g_r(x) > 0\}$$

para ciertos polinomios $g_1, \ldots, g_r$. Sea

$$Z_o = \{x \in G_o \mid g(x) = 0\}$$

para un cierto polinomio g. Entonces para cada abierto $G \subseteq R^n$ semialgebraico, tal que $G \supseteq Z_o$, se tiene que existe

$$S' = \bigcup_{i \in I'} \{x \in G_o \mid f_{ij}(x) > 0, \quad j \in J'\} \ ,$$

con $\{f_{ij}\}$, $i \in I'$, $j \in J'$, conjunto finito de polinomios, verificando $G \supseteq S' \supseteq Z_o$.

Demostración.

Se trata de una versión semialgebraica no acotada de un lema de Lojasiewicz [3]. Sea $C(G)$ el complementario de G en R^n y consideremos a los efectos de aplicar el lema 2.2. los conjuntos $C(G) \cap G_o$ y Z_o. Son dos subconjuntos de G_o, semialgebraicos cerrados y disjuntos. Existirá por tanto un cierto

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in G_o \mid g_{ij}(x) \geq 0 \quad j \in J\}$$

tal que

$$S \supseteq C(G) \cap G_o \qquad y \qquad S \cap Z_o = \phi$$

Sea $S' = C(S) \cap G_o$. Entonces S' es de la forma pedida en este lema y además

$$G_o \cap C(S) \subseteq G \cup C(G_o),$$

luego

$$G_o \cap C(S) \subseteq G \qquad y \qquad G_o \cap C(S) \supseteq Z_o.$$

c.q.d.

2.4. Proposición.

Sea S un conjunto semialgebraico abierto (respectivamente, cerrado) en D. Entonces existen polinomios $\{f_{ij}\}$, $i \in I$, $j \in J$, en número finito tales que

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in D \mid f_{ij}(x) > 0, \quad j \in J\}$$

(respectivamente $S = \bigcup_{i \in I} \{x \in D \mid f_{ij}(x) \geq 0, \quad j \in J\}$)

Demostración.

Supongamos que S es abierto, definido por ciertos polinomios

$$S = \bigcup_{i \in L} \{x \in D \mid t_{ij}(x) > 0, \quad h_{ij}(x) = 0 \quad j \in H\}$$

Tenemos, para cada $i \in L$, utilizando la notación del lema anterior,

$$G_o = \{x \in D \mid t_{ij}(x) > 0, \quad j \in H\} \qquad y \qquad Z_o =$$

$$= \{x \in G_o \mid \sum_j h_{ij}^2(x) = 0\}, \qquad G = S. \text{ Entonces } G \supseteq Z_o.$$

Asi existen polinomios $m_{p,q}$ tales que

$$S \supseteq H_i = \bigcup_{p \in P} \{x \in G_o \mid m_{p,q}(x) > 0, \quad q \in Q\} \supseteq Z_o$$

Luego $S = \bigcup_{i \in L} H_i$, de donde se sigue la proposición.

La correspondiente demostración para S cerrado se obtiene pasando al complementario. c.q.d.

§3.

3.1. Definición.

Sea $V \supseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semialgebraico. Diremos que $p \in V$ es regular de dimensión d si existen $f_1,\ldots,f_{n-d}$ polinomios con diferenciales independientes en p tales que el germen de V en p, V_p, tiene como ecuaciones locales

$$f_1 = 0,\ldots,f_{n-d} = 0.$$

3.2. Nota.

De acuerdo con esta definición todos los puntos de la curva plana de ecuación global

$$x^2 + y^2 - x^3 = 0$$

son regulares, el origen es regular de dimensión 0, pues $x = 0$, $y = 0$ son ecuaciones locales de dicha curva en el origen; los restantes puntos son regulares de dimensión uno pues en ellos $x^2 + y^2 - x^3 = 0$ es una ecuación local.

Asimismo, de acuerdo con esta definición, los puntos de la superficie

$$x^2 - zy^2 = 0$$

en el eje z negativo (menos el origen) son regulares de dimensión uno, pues su ecuaciones locales son $x = 0$, $y = 0$. Sin embargo el origen en la curva plana

$$y^3 + 2x^2y - x^4 = 0$$

no es regular, aunque sí existe una función analítica f, con diferencial no nula en dicho punto, tal que $f = 0$ es una ecuación local de dicha curva. Dicha función analítica puede tomarse algebraica sobre el anillo de polinomios; es decir, podemos tomar f como función de Nash definida en un entorno del origen.

Si sustituimos en la definición 3.1. los polinomios por funciones de Nash definidas en un entorno del punto a considerar obtenemos la definición de punto regular en el sentido de Nash, o brevemente, N-regular. Dado un conjunto V semialgebraico, Lojasiewicz ([3], §21-n°13, prop. 2) prueba la densidad y semialgebricidad de los puntos N-regulares de V, identificando V con el correspondiente subconjunto del espacio proyectivo y tratando este como variedad de Nash.

3.3. <u>Proposición</u>.

Sea $V \supseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semialgebraico. Entonces el conjunto de puntos regulares de V en denso (con la topología usual de $\mathbb{R}^n$) en V.

<u>Demostración</u>.

Sea N_d el conjunto de los puntos N-regulares de V de dimensión d. Probaremos que si $p \in N_d$, en cada entorno de p en $\dot{V}$ existen puntos regulares de dimensión d, con lo que -teniendo en cuenta las consideraciones precedentes- obtenemos la proposición. Tomemos un entorno U_p de p tal que

$$U_p \cap V = \{f_1 = 0, \ldots, f_{n-d} = 0\}$$

con $f_1, \ldots, f_{n-d}$ funciones de Nash definidas en U_p y con diferenciales independientes en p. Entonces $U_p \cap V$ es un conjunto semialgebraico cerrado en U_p, y prealgebraico por tanto (§2. def. 2-1). Para estos conjuntos es fácil probar la densidad de los puntos regulares de dimensión d (c.f. [4]). c.q.d.

3.4. <u>Proposción</u>.

Sea V un conjunto semialgebraico de dimensión d. Entonces el minimo conjunto algebraico que lo contiene es de dimensión d.

Demostración.

Sea $\overline{V}$ el cierre topológico de V; se trata de un conjunto semialgebraico cerrado y de dimensión d. Por otra parte coinciden los minimos conjuntos algebraicos que contienen a V y a $\overline{V}$, respectivamente. La proposición se reduce al caso prealgebraico en el que ya ha sido demostrada [4]. c.q.d.

Dado un conjunto semialgebraico $V \supseteq \mathbb{R}^n$, consideremos la familia de ideales asociados a $\underline{V}$, $\{I(V_p)\}_{p \in \mathbb{R}^n}$ donde para $p \in \mathbb{R}^n$, definimos el ideal del anillo de polinomios $I(V_p) \supseteq \mathbb{R}[x_1 .... x_n] = \mathbb{R}[\underline{x}]$ como en §1.

Se verifica

3.5. Proposición.

Dado V semialgebraico, y su cierre $\overline{V}$, coinciden las familias de ideales asociados.

Demostración.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$, U_p un entorno de p y f un polinomio nulo sobre $V \cap U_p$; así f se anula sobre el cierre de $V \cap U_p$ y por tanto sobre $\overline{V} \cap U_p$ (Bourbaki, Gen Top. Ch. I, §1.6 Prop. 5). Asi $f \in I(V_p)$ implica $f \in I(\overline{V}_p)$. El recíproco es trivial.

c.q.d.

3.6. Proposición.

Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto semialgebraico. Entonces la familia de ideales asociados es finita.

Demostración.

Por inducción en la dimensión de V, siendo trivial el caso $\dim V = 0$. Supongamos cierta la proposición para dimensión $d-1$ y sea V de dimensión d. Sea $\mathrm{Reg}_d\, V$ el conjunto de puntos regulares de V de dimensión d, y $\overline{\mathrm{Reg}_d\, V}$ su cierre topo lógico. Este último conjunto es semialgebraico -en efecto, se trata de la clausura de los puntos N-regulares de dimensión d de V, que forma un conjunto semialgebraico [3]. Veamos que la familia de ideales

$$\{I(V_p)\}_{p \notin \overline{\mathrm{Reg}_d V}}$$

es finita.

Consideremos el conjunto $S = V - (\overline{\mathrm{Reg}_d V} \cap V)$, semialgebraico abierto en V, de dimensión estrictamente menor que d. Si $p \notin \overline{\mathrm{Reg}_d V}$, los germenes V_p y S_p coinciden. Así, por hipótesis de inducción la familia

$$\{I(S_p)\}_{p \in \mathbb{R}^n}$$

es finita y a fortiori, $\{I(V_p)\}_{p \notin \overline{\mathrm{Reg}_d V}}$ lo será también.

Sea pues, $p \in \overline{\mathrm{Reg}_d V}$; y sea V'_p el minimo germen de conjunto algebraico que contiene a V_p. Observemos que si denotamos por V' al conjunto algebraico de los ceros de $I(V_p)$ su germen en p coincide con V'_p (consistencia de la notación) y además se verifican

i) $I(V'_p) = I(V_p)$

ii) Existe un entorno de p que denotamos U_p donde $V' \supseteq V$ y es el minimo conjunto algebraico que contiene a V en ese entorno.

iii) $\dim V' = d$.

En general V' no tiene por que contener a V. Sea pues V'' el minimo conjunto algebraico que contiene a V. Entonces $V'' \supseteq V'$, y puesto que ambos conjuntos son de dimensión d (3.4), las componentes irreducibles $V'_1,\dots,V'_t$ de V' de dimensión d

coincidiran con ciertas componentes de V''. Sea $\omega_1', \ldots, \omega'_s$ las componentes irreducibles de V' de dimensión menor que d. Para cada $i : 1 \ldots s$ formemos el conjunto

$$\tilde{\omega}_i' = V \cap \omega_i' \cap \left[\bigcap_{\substack{j \neq i \\ j=1\ldots s}} \complement (\omega_j') \right] \cap \left[\bigcap_{i=1..t} \complement (V_i') \right] ,$$

de los puntos de $V \cap \omega_i'$ que no estan en ninguna otra componente de V'. Se trata de un conjunto semialgebraico de dimensión $\dim \omega_i' < d$. Restringamos dicho conjunto, con el mismo nombre, al entorno U_p de la condición ii) de arriba. En él $\tilde{\omega}_i'$ es abierto en V, pues en U_p,

$$\tilde{\omega}_i' = V \cap \left[\bigcap_{\substack{j \neq i \\ j=1..s}} \complement (\omega_j') \right] \cap \left[\bigcap_{i=1..t} \complement (V_i') \right].$$ Así, si

$p' \in \tilde{\omega}_i'$ en dicho entorno, $I\left[(\tilde{\omega}_i')_{p'}\right] = I(V_{p'})$ y como $\dim \tilde{\omega}_i'$ es menor que d, dicho ideal coincidirá con alguno de la familia finita $\{I(V_p)\}_{p \notin \overline{\mathrm{Reg}_d V}}$. Dado que $\dim \tilde{\omega}_i' = \dim \omega_i'$ tomando $p' \in \tilde{\omega}_i'$ donde

$\dim (\tilde{\omega}_i')_{p'} = \dim \omega_i'$, el ideal correspondiente tendrá dimensión $\dim \omega_i'$; luego $I(\omega_i')$ coincide con algún ideal asociado a la citada familia. c.q.d.

3.7. Proposición.

Sea V un conjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^n$ y sean $I_1, \ldots$ $\ldots, I_m$ los distintos ideales asociados a V. Para cada $i = 1 \ldots$ $\ldots m$, sea

$$\tilde{V}_i = \{p \in \mathbb{R}^n \mid I(V_p) = I_i\}$$

Entonces $\tilde{V}_i$ es semialgebraico.

Demostración.

Por inducción en $\dim V$. Si esta es cero resulta trivialmente. Sea ahora $\dim V = d$, y $V_1,\ldots,V_m$, los conjuntos algebraicos de ideales $I_1,\ldots,I_m$ respectivamente. Supongamos que

$$\dim V_i = d \qquad \text{sii} \qquad i = 1\ldots r \leq m.$$

Para $i > r$, los conjuntos $\tilde{V}_i$ resultan ser semialgebraicos por hipótesis de inducción, pues pueden construirse a partir del conjunto semialgebraico

$$S = V - (\overline{\mathrm{Reg}_d\, V} \cap V)$$

cuya dimensión es estrictamente menor que $\dim V$.

Ordenemos $V_1,\ldots,V_r$ respecto a la inclusión, y sea, digamos, V_1 maximal en dicho orden. Supongamos que $\omega_1,\ldots,\omega_l$ son sus componentes irreducibles de dimensiones $d_1,\ldots,d_l$ respectivamente. Demostraremos que $\tilde{V}_1 = \bigcap_{i=1\ldots l} \overline{\mathrm{Reg}_{d_i}(\omega_i \cap V)} \cap$ $\cap\ \overline{\mathrm{Reg}_d\, V}$ y por tanto es semialgebraico.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$, tal que $I(V_p) = I_1$; es decir $p \in \tilde{V}_1$. Sea U_p un entorno abierto de p donde $V_1 \supseteq V$ y V_1 sea el mínimo conjunto algebraico que contiene a V en dicho entorno. Como dichas propiedades se mantienen en todo subentorno de U_p, deduciremos que $\forall i = 1,\ldots l$, $p \in \overline{\mathrm{Reg}_{d_i}\, V \cap \omega_i}$.

Recíprocamente, sea $p \in \bigcap_{i=1\ldots l} \overline{\mathrm{Reg}_{d_i}(\omega_i \cap V)} \cap \overline{\mathrm{Reg}_d\, V}$. Consideremos el mínimo conjunto algebraico que contiene al germen de $\omega_i \cap V$ en p. Tal conjunto debe ser de dimensión d_i y contenido en ω_i; por ser éste irreducible concluimos que coincide con ω_i.

Si f es un polinomio nulo sobre V_p, f se anula sobre el germen de $\omega_i \cap V$, luego sobre ω_i, para cada $i = 1...l$. Asi f se anula sobre V_1, y por tanto $I(V_p) \subseteq I(V_1)$. Por la maximalidad de V_1 deducimos que $I(V_p) = I(V_1)$, es decir, $p \in \tilde{V}_1$.

Consideremos $V - \tilde{V}_1$. Es un conjunto semialgebraico contenido en V y abierto en él, cuyos ideales asociados coinciden con los de V excepto I_1. Podemos, pues, aplicar a estos el razonamiento anterior, obteniendo la proposición por un argumento descendente. c.q.d.

3.8. Definición.

Sea V un conjunto algebraico real; p un punto de V. Diremos que p es multiple (de multiplicidad μ) si el anillo local

$$R[x]_p \Big/ I(V_p)R[x]_p$$

tiene múltiplicidad μ. En particular, si dicho anillo es regular obtenemos una definición equivalente a 3.1. (c.f. [4]).

3.9. Proposición.

Sea V un conjunto algebraico real, μ un entero mayor o igual que uno. Sea V_μ el conjunto de puntos de V de multiplicidad mayor o igual que μ. Entonces V_μ es semialgebraico.

Demostración.

Sean $I_1 .... I_m$ los ideales asociados a V, $V_1,...,V_m$ los conjuntos algebraicos por ellos definidos y $\tilde{V}_1,...,\tilde{V}_m$ los conjuntos semialgebraicos asociados, con la notación de la proposición 3.7. Designemos por $V_1^\mu,...,V_m^\mu$, los puntos de $V_1,...,V_m$

de multiplicidad (en el sentido clásico de ecuaciones globales) mayor o igual que μ.

Demostraremos que

$$V_\mu = \bigcup_{i=1\dots m} [\tilde{V}_i \cap V_i^\mu].$$ Esto es suficiente para nuestra proposición puesto que es sabido (c.f. por ejemplo [5]) que para cada $i = 1\dots m$, V_i^μ es un conjunto algebraico.

Sea $p \in V_\mu$. Entonces, por definición

$$\mu = \text{mult. } R[\underline{x}]_p \big/ I(V_p)R[\underline{x}]_p$$

Pero existe cierto $1 \leq i_o \leq m$ tal que $I(V_p) = I(V_{i_o})$. Asi $p \in V_{i_o}^\mu \cap \tilde{V}_{i_o}$. Reciprocamente sea $p \in \tilde{V}_{i_o} \cap V_{i_o}^\mu$, $1 \leq i_o \leq m$. Entonces $I(V_p) = I(V_{i_o})$, y $\mu = \text{mult } R[\underline{x}]_p \big/ I(V_{i_o})R[\underline{x}]_p$

3.10. Proposición.

Sea V semialgebraico. Entonces el conjunto de los puntos regulares de dimensión d, con $0 \leq d \leq \dim V$, es semialgebraico.

Demostración.

Con la notación anterior, sean $V_1\dots V_m, \tilde{V}_1, \dots \tilde{V}_m$, los conjuntos algebraicos y semialgebraicos respectivamente, asociados a V. Fijado $0 \leq d \leq \dim V$. Sean $V_1\dots V_r$ aquellos conjuntos algebraicos de dimensión d, y denotemos por $RV_1, \dots, RV_r$ los subconjuntos de cada uno de ellos de puntos regulares de dimensión d. Demostraremos que

$$\text{Reg}_d\, V = \bigcup_{i=1..r} (R\, V_i \cap (\overset{\circ}{\widehat{\tilde{V}_i \cap V}})),$$

donde $\overset{\circ}{\widehat{\tilde{V}_i \cap V}}$ denota el interior de $\tilde{V}_i \cap V$ en la topología inducida en V_i (pues $\tilde{V}_i \subseteq V_i$).

Sea $p \in V$ regular de dimensión d. Entonces existe un entorno U_p tal que $U_p \cap V$ es un conjunto algebraico regular de dimensión d, y por tanto coincide con el minimo conjunto algebraico que contiene a V_p. Asi $p \in R\,V_i$, para cierto $i:1\ldots r$, y puesto que la regularidad es una propiedad abierta $p \in \overset{\circ}{\overbrace{\tilde{V}_i \cap V}}$.

Reciprocamente sea $p \in R\,V_i \cap (\overset{\circ}{\overbrace{\tilde{V}_i \cap V}})$, para cierto $i:1\ldots r$. Por ser $p \in \tilde{V}_i$, localmente en p, $V_i \supseteq V$. Pero asimismo por hipótesis, localmente $V_i \subseteq \tilde{V}_i \cap V \subseteq V$. Deducimos que los germenes de V_i y V en p coinciden. Dado que $p \in R\,V_i$, resulta ser un punto regular de dimensión d de V.

Claramente $\overset{\circ}{\overbrace{\tilde{V}_i \cap V}}$ es un conjunto semialgebraico; en efecto, se trata del conjunto $V_i - \overline{(V_i - (\tilde{V}_i \cap V))}$, donde el cierre se entiende efectuado en la topología de $\mathbb{R}^n$. Demostremos por último que $R\,V_i$ es un conjunto semialgebraico. Sean $V_i^1,\ldots,V_i^h$ las componentes de V_i de dimensión d, y sean $V_i^{h+1},\ldots,V_i^s$ las de dimensión menor que d. Llamemos $R\,V_i^1,\ldots,R\,V_i^h$ a los conjuntos de puntos regulares de dimensión de las componentes respectivas. Estos conjuntos son semialgebraicos -pues coinciden con los conjuntos de puntos regulares en sentido clásico (c.f. [4]). Veamos entonces que

$$R\,V_i = \bigcup_{j=1\ldots h} (R\,V_i^j \cap \tilde{\omega}_i^j)$$

donde $\tilde{\omega}_i^j$ es el conjunto

$$\tilde{\omega}_i^j = \{p \in V_i \mid I((V_i)_p) = I(V_i^j)\}$$

que es semialgebraico (3.7). Sea $p \in R\,V_i$; entonces

$$I((V_i)_p) \supseteq I(V_i) = \bigcap_{j=1..s} I(V_i^j),$$ y por ser $I((V_i)_p)$ de dimensión d, coincidirá este ideal con algún $I(V_i^j)$ con

$1 \leq j \leq h$. Asi localmente V_i coincide con V_i^j y por tanto $p \in R\, V_i^j$. Reciprocamente, si $p \in \tilde{\omega}_i^j$, coinciden en dicho punto los germenes de V_i y V_i^j; siendo p además regular en V_i^j, resultara regular en V_i. c.q.d.

3.11. <u>COROLARIO</u>.

Sea V semialgebraico. El conjunto de los puntos regulares de dimensión d en sentido nashico y no en el sentido algebraico forma un conjunto semialgebraico de dimensión estrictamente menor que d.

<u>Demostración</u>.

Sean $R_N\, V$, $R\, V$ los puntos regulares de V de dimensión d en sentido de Nash y algebraico (3.1) respectivamente. Puesto que son conjuntos semialgebraicos $R_N\, V - R\, V$ será semialgebraico. Si su dimensión fuera d, a fortiori, $\overline{R\,V} - R\,V$ sería de dimensión d, lo cual es absurdo. c.q.d.

3.12. <u>Definición</u>.

Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico, p un punto de V. Diremos que p es coherente si existe un entorno de p, U_p, tal que para cada $p' \in U_p \cap V$, si designamos por

$$J(V_p) = I(V_p)\, R[\underline{x}]_p, \qquad \text{entonces}$$

$$(J(V_p) \cap R[\underline{x}])\, R|\underline{x}|_{p'} = J(V_{p'}).$$

3.13. <u>Proposición</u>.

Sea V un conjunto algebraico real. Entonces el conjunto de sus puntos coherentes es semialgebraico.

Demostración.

Sean $V_1,\dots,V_m$ los conjuntos algebraicos asociados y $\tilde{V}_1,\dots,\tilde{V}_m$ los conjuntos semialgebraicos correspondientes. Para cada $i : 1\dots m$, designemos por

$$\hat{V}_i = \{p \in V \mid J(V_p) = I(V_i)\, R[\underline{x}]_p\}$$

Sea T el conjunto de puntos coherentes de V. Entonces $T = \bigcup_{i:1\dots m} \mathring{\hat{V}}_i$; donde $\mathring{\hat{V}}_i$ designa el interior de $\hat{V}_i$ en V.

En efecto; sea $p \in T$. Por definición, si $I(V_p) = I(V_j)$ para cierto $1 \leq j \leq m$, existe un entorno de p en V, tal que para cada p' en dicho entorno $I(V_{p'})\, R[\underline{x}]_{p'} = I(V_j)\, R[\underline{x}]_{p'}$, y por tanto $p \in \mathring{\hat{V}}_j$.

Recíprocamente, sea $p \in \mathring{\hat{V}}_j$; entonces $J(V_p) = I(V_j)\, R[\underline{x}]_p$, y en un entorno de p en V se tendrá, $J(V_{p'}) = I(V_j)\, R[\underline{x}]_{p'}$; luego $p \in T$.

Veamos que $\hat{V}_i$ es semialgebraico, $1 \leq i \leq m$. Sean $\{V_j\}_{j\in J}$, la subfamilia de $\{V_1,\dots,V_m\}$, formada por los conjuntos algebraicos que son unión de componentes irreducibles de V_i. Y para cada $j \in J$, sean $\omega_j^1,\dots,\omega_j^{s_j}$, los componentes irreducibles de V_i que no estan en V_j.

Demostraremos que

$$\hat{V}_i = \tilde{V}_i \cup \left[\bigcup_{j\in J} (\tilde{V}_j \cap C(\bigcup_{h=1}^{s_j} \omega_j^h)\right]$$

Sea $p \in \hat{V}_i$; consideremos $I(V_p)$; si $I(V_p) = I(V_i)$, por definición, $p \in \tilde{V}_i$; en otro caso, sea $I(V_p) = I(V_r)$ para $1 \leq r \leq m$. Como $I(V_p)\, R[\underline{x}]_p = I(V_i)\, R[\underline{x}]_p$, y todas las componentes de $I(V_p)$ pasan por p, deducimos que estas son un subconjunto del de las componentes de $I(V_i)$ (y por tanto $r = j \in J$);

concretamente por p no pasan las componentes de $I(V_i)$ que no estan en $I(V_j)$. Asi $p \in \tilde{V}_j \cap C(\bigcup_{h=1}^{s_j} \omega_j^h)$.

Reciprocamente, sea $p \in \tilde{V}_i$; entonces $I(V_p) = I(V_i)$, luego $p \in \hat{V}_i$. Si $p \notin \tilde{V}_i$ y $p \in \tilde{V}_j \cap C(\bigcup_{h=1}^{s_j} \omega_j^h)$ se sigue que $I(V_p) = I(V_j)$; y por tanto

$$J(V_p) = I(V_j)\, R[\underline{x}]_p = I(V_i)\, R[\underline{x}]_p$$

puesto que por p no pasan los componentes de V_i que no estan en V_j. c.q.d.

3.14. Sea V un conjunto nâshico (o analîtico) en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Recordemos que si $p \in V$, p es coherente en sentido nashico (respectivamente, analîtico) si existe un entorno de p en V, U_p, tal que, si designamos $N(U_p)$, $N_{p'}$ (respectivamente $A(U_p)$, $A_{p'}$) los anillos de funciones de Nash en U_p, y los germenes de funciones de Nash en p' (respectivamente, analîticas), existen $f_1,\dots,f_r \in N(U_p)$ tales que inducen en $N_{p'}$, $\forall p' \in U_p$ el ideal del germen $V_{p'}$ (respectivamente $f_1,\dots,f_r \in A(U_p)$, induciendo el ideal correspondiente en $A_{p'}$). Si V es nashico, se demuestra [6] que la coherencia de un punto de V en sentido de Nash es equivalente a la coherencia en sentido analîtico. Para V analîtico, Galbiati [7] ha demostrado que el conjunto de puntos de no coherencia es semianalîtico y que su dimensiôn es menor que dim V-2. (Fensch [8]). Dicho conjunto, en general no es analîtico (c.f. [9]).

Observemos en cambio que la coherencia algebraica (en el sentido de nuestra definiciôn 3.12) no implica la coherencia analîtica, como se pone de manifiesto en el siguiente

3.15. Ejemplo. [Cartan [10]]

Sea $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x+y)(x^2+y^2) = x^4\}$; V es algebraico irreducible, de dimensión dos. Todos los puntos en un entorno del origen son regulares de dimensión dos salvo el propio origen. Asi, para p' en dicho entorno $I(V_{p'})$ será un ideal de dimensión dos que contiene al ideal primo $I(V_o) = (z(x+y).(x^2 + y^2) - x^4) R[x\ y\ z]$, luego coincide con él. Asi el origen es coherente desde el punto de vista algebraico, mientras que, analíticamente, la coherencia falla en los puntos de la forma $(0,0,z)$, $z \neq 0$.

3.16. Proposición.

Sea V_p germen de un conjunto algebraico real. Entonces, si V_p es analíticamente coherente, es algebraicamente coherente.

Demostración.

Sea $I(V_p) \subseteq R|x|$ primo; por ser V_p coherente y tener todos sus componentes analíticamente irreducibles de igual dimensión deducimos que la dimensión es localmente constante. Razonando como en el ejemplo anterior concluimos que V_p es coherente en sentido algebraico.

Sea $I(V_p) = p_1 \cap \dots \cap p_r$ ideales primos. La coherencia algebraica de V_p se seguirá si probamos que $V(p_1),\dots,V(p_r)$ son coherentes algebraicamente en p. Ahora bien, $V(p_1),\dots,V(p_r)$ son en p unión de componentes irreducibles analíticamente, de V_p. Asi la coherencia analítica de V_p implica la de sus componentes, y por tanto la de cada $V(p_i)$ $i : 1\dots r$; luego estamos en el caso irreducible y la proposición se sigue del apartado anterior. c.q.d.

3.17. <u>COROLARIO</u>.

Sea V conjunto algebraico real de dimensión d. El conjunto de puntos no coherentes de V (en sentido algebraico) es un conjunto semialgebraico de dimensión menor o igual que $d-2$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Mostowski, T. "Some properties of the ring of Nash functions". Ann. Scuola N. Sup. Pisa. 1970. Vol III-2 p. 245-266.

[2] Efroymson, G. "Substituition in Nash functions". Pac. J. of Math. Vol 63-1. 1974.

[3] Lojasiewicz, S. "Ensembles semianalytiques". Lec. Note at the I.H.E.S. 1965.

[4] Recio, T. "Conjuntos preanalíticos, prealgebraicos y prenashicos". Monografias y Memorias del I. Jorge Juan XIII Madrid 1977.

[5] Nagata, M. "Local Rings". Interscience. 13. 1962.

[6] Lazzeri, F.- Tognoli, A. "Alcune propieta degli spazi algebrici". Ann. Scuola N. Sup. Pisa. 1970. 24. pág. 597-632.

[7] Galbiati, M. "Stratifications et ensemble de non coherence d'un espace analytique reel". Invent. Math. 1976. pág. 113-128.

[8] Fensch, W. "Reel analytische Strukturen". Munster. 1966.

[9] Acquitaspace - Broglia - Tognoli. "Sull'insieme di non coerenza di un insieme analitico reale". Lincei Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat. Vol LV. F. 1973.

[10] Cartan, H. "Varietes analytiques reelles et varietes analytiques complexes". Bull. Soc. Math. France 85. 1957. pág. 77-99.