Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Mayo – 2020

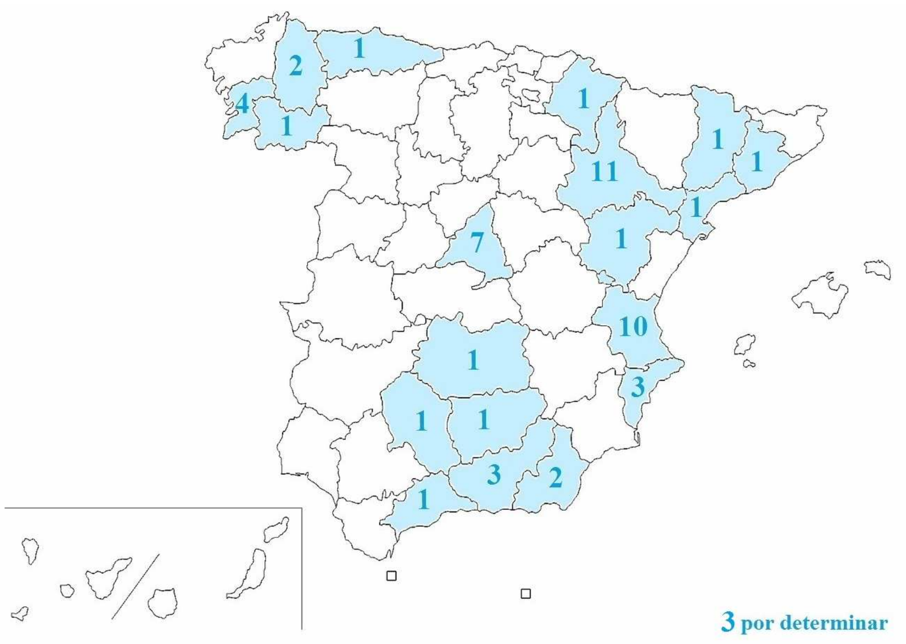
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
001	✓	✓	✓	✓	✓	✓
002						

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

90 soluciones de 56 participantes



Alevín (5º/6º Primaria)

A-001. Al final, un cero

Elige un número de dos cifras y multiplica sus cifras. Con el resultado, vuelve a hacer lo mismo, multiplica sus cifras. Repite, así, el procedimiento hasta que obtengas un número con una sola cifra. ¿Cuántos números de dos cifras hay que al final de ese procedimiento reiterativo te lleven al 0 como número de una cifra?

Solución

En un solo paso obtendremos un 0 si el número de dos cifras lleva un 0. Cumplen esto los acabados en cero.

En dos pasos obtendremos un 0, si al multiplicar las cifras del número de dos cifras obtenemos un número de los que nos llevan a 0 en un solo paso.

En tres pasos obtendremos un 0, si al multiplicar las cifras del número de dos cifras obtenemos un número de los que nos llevan a 0 en dos pasos.

Y ya no es posible en cuatro, o más, pasos, pues los números obtenidos con tres pasos no se pueden obtener como producto de sus dos cifras.

La siguiente tabla resume lo dicho:

<table>
<tr><td>1 paso :</td><td colspan="2">10</td><td colspan="4">20</td><td colspan="3">30</td><td colspan="2">40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td></tr>
<tr><td>2 pasos:</td><td>25</td><td>52</td><td colspan="2">45</td><td colspan="2">54</td><td colspan="2">56</td><td>65</td><td>58</td><td>85</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>3 pasos:</td><td>55</td><td>–</td><td>95</td><td>59</td><td>96</td><td>69</td><td>78</td><td>87</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td></td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
</table>

En definitiva son 24 los números de dos cifras que al final nos dan un cero reiterando el procedimiento descrito. Por orden:

10 20 25 30 40 45 50 52 54 55 56 58
59 60 65 69 70 78 80 85 87 90 95 96

Bien resuelto por: ***Alejandro Cuevas Rodríguez*** *(CEIP Concordia. Campohermoso),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Prof. Jubilado. Coslada),* ***Diego Salón Hernández*** *(CEIP Lucio Gil Fagoaga. Requena),* ***Álvaro Lafuente Gil*** *(Colegio Salesiano San Juan Bosco. Valencia) y* ***Carmen Alves Sabín*** *(British Council School. Pozuelo de Alarcón).*

Se recibió también una solución incompleta y otra incorrecta.

I-001. Números COVID-91

Números **COVID-91** son todos aquellos enteros positivos a los que les pasa lo mismo que al **91**, que al hallar su doble tienen una cifra más que ellos: Por ejemplo, **91** tiene dos cifras y $2 \cdot 91 = 182$ tiene tres. Si los ponemos todos en orden creciente, qué número ocupa el lugar **2020º**.

Solución

De una cifra, **5**: 5, 6, 7, 8 y 9

De dos cifras, **50**: del 50 al 99

De tres cifras, **500**: del 500 al 999

De cuatro cifras, **5000**: del 5000 al 9999

… … … … … … … … … … … … … … …

Hasta el tercer bloque hay **555** números COVID-91. El **2020º** estará en el cuarto, y para llegar a él faltan $2020 - 555 = 1465$

Luego el **2020º** es: $4999 + 1465 = \underline{6464}$

*Bien resuelto por: **Iria López Dios** (Colegio San José. Lugo), **Hugo Martínez Luca** (CEIP Val de la Atalaya. María de Huerva), **Jorge Lafuente Gil** (Colegio Salesiano San Juan Bosco. Valencia), **Ana Moreno Martínez** (Colegio La Presentación. Baza), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Diego Salón Hernández** (CEIP Lucio Gil Fagoaga. Requena), **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Diego Benavent Pérez** (Colegio Alemán. Valencia), **Héctor Marco Bazán** (CEIP Val de la Atalaya. María de Huerva), **Roque Manuel Araujo Rodríguez** (CPI. Pontecesures), **Celso de Frutos de Nicolás** (Prof. Jubilado. Coslada), **Jonás Costas Pais** (IES Álvaro Junqueiro. Vigo), **Ángel Blázquez García** (CEIP Val de la Atalaya. María de Huerva), **Lucía Heras Santamaría** (CEIP Val de la Atalaya. María de Huerva), **Iván Tello Rubio** (CEIP Val de la Atalaya. María de Huerva), **Carla Mendoza Aranda** (CEIP Val de la Atalaya. María de Huerva), **Mario Balda Agudo** (Ave María de la Quinta. Granada), **Beatriz Caballero Luna** (CEIP Val de la Atalaya. María de Huerva), **Álvaro Lafuente Gil** (Colegio Salesiano San Juan Bosco. Valencia), **Emigdio Pérez Pérez** (CC Sta Mª de la Huerta. Almoradí) y **Carmen Alves Sabín** (British Council School. Pozuelo de Alarcón).*

Llegaron también cuatro soluciones incorrectas.

C-001. Reconversión en el viejo Oeste

Joe Cooper y el viejo McNamara son ganaderos de toda la vida. Cansados de recorrer los verdes valles y las altas montañas, deciden un día vender sus reses y convertirse en unos apacibles granjeros. Llevan las reses al mercado y reciben por cada una un número de dólares igual al número total de reses que han puesto en venta. Con este dinero compran ovejas a **10 $** por cabeza y, con lo que les sobra, una cabra.

De regreso a casa discuten y deciden dividir el rebaño a partes iguales, pero resulta que les sobra una oveja. Joe Cooper se queda la oveja y la da a McNamara la cabra.

- Pero, así, yo tengo menos que tú – dice McNamara – porque las cabras valen menos que las ovejas.

- Muy bien – responde Cooper – Te daré mi Colt del **45** para cubrir la diferencia.

¿Qué vale el Colt del **45**?

Solución

El número total de dólares que reciben por su ganado es un cuadrado perfecto, pues, venden n reses a n dólares cada una. Con n^2 dólares adquieren las ovejas y una cabra. Como compran un número impar de ovejas a **10** dólares por cabeza (la cabra vale menos y, por tanto, su precio es de una cifra en dólares), la cifra de las decenas del total invertido, de n^2, ha de ser un número impar.

> *Es fácil probar que los únicos números cuadrados con un número impar en las decenas tienen **6** como cifra de las unidades.*
>
> ***16, 36, 196, 256, 576, 676... ...***

Como el número cuadrado tiene que terminar en **6**, la cabra tiene que valer forzosamente **6 $**, sin importar las ovejas que compren:

Por ejemplo:

__6__ reses a __6 $__ cada una = __36 $__ = __3__ ovejas a __10 $__ + la cabra

__16__ reses a __16 $__ cada una = __256 $__ = __25__ ovejas a __10 $__ + la cabra

El litigio se resuelve equiparando el precio de la oveja impar (**10$**) menos el valor que el Colt del **45** tiene para Joe Cooper que lo ofrece, con el precio de la cabra (**6$**) y el Colt del **45** que recibe McNamara.

Por tanto, el arma vale la mitad de la diferencia entre los costes de la oveja y la cabra, esto es, **2 $**.

*Las dos únicas soluciones correctas fueron enviadas por **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra) y por **Mario Balda Agudo** (Ave María de la Quinta. Granada).*

Las otras catorce soluciones recibidas fueron incorrectas: ninguna tuvo en cuenta que, para Joe Cooper, el Colt también tenía un valor, que su cesión a McNamara pretendía equiparar la diferencia, pero no fue altruista en absoluto.

Jv-001. Cociente y restos iguales

Al hacer esta división entre dos enteros positivos se obtiene un cociente y un resto iguales. Sabiendo, además, que la diferencia entre el dividendo y el divisor es 2020, ¿quiénes pueden ser esos dos enteros positivos?

Solución

Llamando d al divisor y c al cociente (igual al resto), se tiene: $2020 + d = cd + c \;\rightarrow$

$$2020 = cd + c - d \;\rightarrow\; 2019 = cd + c - d - 1 = (c-1)(d+1)$$

Como $c < d$ y $2019 = 3 \cdot 673$, tabulando tenemos dos únicas posibilidades:

$c-1$	$d+1$		c	d
1	2019	$\rightarrow$	2	2018
3	673	$\rightarrow$	4	672

que bien podemos comprobar:

$$\begin{array}{r|l} 4038 & 2018 \\ \hline -4036 & 2 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2692 & 672 \\ \hline -2688 & 4 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Bien resuelto por: ***Manuel Vicente Bolaños Quesada*** *(IES Miguel Sánchez López. Torredelcampo),* ***Cristian Andrés Córdoba Silvestre*** *(IES Dámaso Alonso. Puertollano),* ***Juan Francisco Cuevas Rodríguez*** *(IES Campos de Níjar. Campohermoso),* ***Daniel Piqueras Valle*** *(IES Perdouro. Burela),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***David Villa Blanco*** *(IES Avelina Cerra. Ribadesella) y* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Prof. Jubilado. Coslada).*

También se recibieron seis soluciones incompletas y seis incorrectas.

Jn-001. Décima persistente

Justifica razonadamente que en la expresión decimal de todos los términos de esta curiosa sucesión $a_n = \sqrt{9n^2 + 4n}$ la décima siempre es la misma.

Solución de ***Manuel Vicente Bolaños Quesada*** *(B1 - IES MSL. Torredelcampo)*

El problema es equivalente a demostrar que las cifras de las unidades de $\lfloor 10 \cdot a_n \rfloor$ es siempre la misma para todo n.

Sea $b_n = \lfloor 10a_n \rfloor = \left\lfloor 10\sqrt{9n^2+4n} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{900n^2+400n} \right\rfloor$

Notemos que:

1º) $$900n^2 + 400n = (30n+6)^2 + 40n - 36 > (30n+6)^2 \qquad (n \geq 1)$$

2º) $$(30n+7)^2 = 900n^2 + 420n + 49 > 900n^2 + 400n \;\Rightarrow$$
$$(30n+7)^2 > 900n^2 + 400n > (30n+6)^2$$

Entonces: $\left\lfloor \sqrt{900n^2+400n} \right\rfloor = \sqrt{(30n+6)^2} = 30n+6$

Como $10 \mid 30n$, la expresión decimal de $30n$ acaba en 0 y, por tanto, b_n acaba en 6 para todo n.

También resuelto por: ***Juan Francisco Cuevas Rodríguez*** *(IES Campos de Níjar. Campohermoso),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra) y* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell).*

También llegó una solución incompleta y otra incorrecta.

S-001. Eme Ene Eñe

Determina todas las ternas de enteros positivos no nulos $(m,n,ñ)$ que cumplen:

a) $\left(m-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(n-\frac{1}{ñ}\right)\cdot\left(ñ-\frac{1}{m}\right)\in N$

b) $\left(m+\frac{1}{n\cdot ñ}\right)\cdot\left(n+\frac{1}{ñ\cdot m}\right)\cdot\left(ñ+\frac{1}{m\cdot n}\right)\in N$

Solución

a) $\left(m-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(n-\frac{1}{ñ}\right)\cdot\left(ñ-\frac{1}{m}\right)=m\cdot n\cdot ñ-m-n-ñ+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{ñ}-\frac{1}{m\cdot n\cdot ñ}\in N\rightarrow$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{ñ}-\frac{1}{m\cdot n\cdot ñ}=\frac{m\cdot n+n\cdot ñ+ñ\cdot m-1}{m\cdot n\cdot ñ}\in N$$

Podemos analizar los siguientes casos:

I. Si una de las componentes de la terna es 1, por ejemplo, $\underline{ñ=1}$

$$\frac{m\cdot n+n+m-1}{m\cdot n}\in N\ \rightarrow\ \frac{n+m-1}{m\cdot n}\in N\ \rightarrow\ \frac{n+m-1}{m\cdot n}\geq 1\ \rightarrow$$

$n+m-1\geq m\cdot n\ \rightarrow\ 0\geq(m-1)\cdot(n-1)$ que sólo se cumplirá cuando una componente sea 1 y la otra cualquier valor natural. Y esto en cualquier orden.

II. Si una de las componentes es 2, por ejemplo, $\underline{ñ=2}$

$$\frac{m\cdot n+n\cdot 2+2\cdot m-1}{m\cdot n\cdot 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2\cdot m\cdot n}\in N$$

Esta expresión no se cumplirá para valores altos de m y n. Si $m,n\geq 4$ se ve claramente que no hay solución, pues, sus inversos serían menores de $1/4$ y, entonces: $0<\frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2\cdot m\cdot n}<1$, no puede ser natural.

Luego habría que estudiar, por ejemplo, estos subcasos:

- $\underline{n=3}\ \rightarrow\ \frac{5\cdot m+5}{6\cdot m}\in N\ \rightarrow\ 6\cdot m\,|\,(5\cdot m+5)\ \Rightarrow\ \underline{m=5}$ y otras ternas con estas componentes en cualquier orden también valdrían.
- $\underline{n=2}\ \rightarrow\ \frac{4\cdot m+3}{4\cdot m}\in N\ \rightarrow\ 4\cdot m\,|\,(4\cdot m+3)$ no es posible.
- $\underline{n=1}\ \rightarrow\ \frac{3\cdot m+1}{2\cdot m}\in N\ \rightarrow\ 2\cdot m\,|\,(3\cdot m+1)\ \Rightarrow\ \underline{m=1}$ caso particular de las que ya obtuvimos en el caso anterior.

III. Y, finalmente, si todas las componentes son mayores o iguales que 3, se ve claramente que no hay solución, pues, sus inversos serían menores de $1/9$ y, entonces, $0<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{ñ}-\frac{1}{m\cdot n\cdot ñ}<1$, no puede ser natural.

En definitiva, ternas $(m,n,ñ)$ solución son, pues, todas estas:

$\underline{(1,1,k)}$, $\underline{(1,k,1)}$ y $\underline{(k,1,1)}$ con k entero positivo

$\underline{(2,3,5)}$, $\underline{(2,5,3)}$, $\underline{(3,2,5)}$, $\underline{(3,5,2)}$, $\underline{(5,2,3)}$ y $\underline{(5,3,2)}$

b) $\left(m+\frac{1}{n\cdot ñ}\right)\cdot\left(n+\frac{1}{ñ\cdot m}\right)\cdot\left(ñ+\frac{1}{m\cdot n}\right)=\frac{(m\cdot n\cdot ñ+1)^3}{m^2\cdot n^2\cdot ñ^2}\in N\ \rightarrow$

$$m\cdot n\cdot ñ\,|\,(m\cdot n\cdot ñ+1)\ \rightarrow\ m\cdot n\cdot ñ\,|\,1\ \Rightarrow\ \underline{m=n=ñ=1}$$

*Bien resuelto por: **Daniel Cao Labora** (UVIGO), **Manuel Alonso Guerrero Franco** (UCM) y **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella). Los profesores **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba) y **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell) entendieron que los dos apartados eran condiciones que se habían de dar simultáneamente, debido, sin duda, a no recalcar de forma suficientemente clara esa diferencia en el enunciado.*

Se recibieron también tres soluciones incompletas y tres incorrectas.

■