Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Junio – 2020

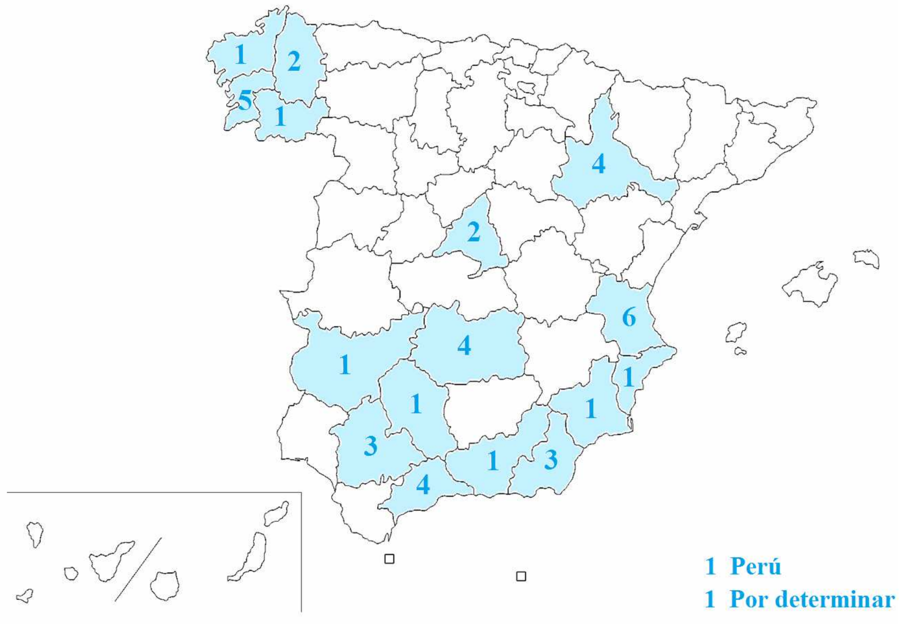
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
001	✓	✓	✓	✓	✓	✓
002	✓	✓	✓	✓	✓	✓
003						

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

99 soluciones de 42 participantes



Alevín (5º/6º Primaria)

A-002. Cuestión de cifras.

Intenta probar, no sólo con valores particulares, también en general, que, sean a, b y c las cifras que sean, estas expresiones siempre valen lo mismo:

I) $\dfrac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{a+b+c}$ II) $\dfrac{\overline{abcd}-\overline{cd}}{\overline{ab}}+\dfrac{\overline{bcd}-d}{\overline{bc}}$

Recuerda que $\overline{abc}$ representa al número formado por a centenas, b decenas y c unidades para distinguirlo de abc que indica el producto de las cifras a, b y c, que también queda más claro así: $a \cdot b \cdot c$

*<u>Solución de **Alejandro Cuevas Rodríguez** (P6 - CEIP Concordia. Campohermoso)</u>*

El problema consiste en demostrar que para cualquier a, b, c y d que sea una cifra del 1 al 9, I) y II) siempre van a tener el mismo valor *(aunque no sean iguales entre sí).*

• Vamos a probar con algunos valores particulares en el caso I).

$a=1,\ b=3$ y $c=6$ $\quad \frac{13+36+61}{1+3+6}=\frac{110}{10}=11$

$a=5,\ b=9$ y $c=2$ $\quad \frac{59+92+25}{5+9+2}=\frac{176}{16}=11$

Ahora vamos a probarlo generalmente:

$\dfrac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{a+b+c}$ Sustituimos

$\dfrac{10a+b+10b+c+10c+a}{a+b+c}$ Reagrupamos

$\dfrac{10a+a+10b+b+10c+c}{a+b+c}$ Sumamos

$\dfrac{11a+11b+11c}{a+b+c}$ Sacamos factor común

$\dfrac{11(a+b+c)}{a+b+c}$ Cancelamos factores

$\underline{11}$

• Vamos a probar con algunos valores particulares en el caso II).

$a=8,\ b=3,\ c=5$ y $d=0$ $\quad \frac{8350-50}{83}-\frac{350-0}{35}=\frac{8300}{83}+\frac{350}{35}=100+10=110$
que aquí sí que puede ser 0

$a=3,\ b=2,\ c=7$ y $d=9$ $\quad \frac{3279-79}{32}-\frac{279-9}{27}=\frac{3200}{32}+\frac{270}{27}=100+10=110$

Ahora vamos a probarlo generalmente:

$$\frac{\overline{abcd}-\overline{cd}}{\overline{ab}}+\frac{\overline{bcd}-d}{\overline{bc}}$$ Sustituimos

$$\frac{(1000a+100b+10c+d)-(10c+d)}{10a+b}+\frac{(100b+10c+d)-d}{10b+c}$$ Restamos

$$\frac{1000a+100b}{10a+b}+\frac{100b+10c}{10b+c}$$ Sacamos factor común

$$\frac{100(10a+b)}{10a+b}+\frac{10(10b+c)}{10b+c}$$ Tachamos factores

$$100+10=\underline{110}$$

*También resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (IES Ruiz de Alda. San Javier), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Francisco Javier Babarro Rodríguez** (Profesor de Dibujo. San Cibrao das Viñas), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Jorge Trallero Alastuey** (Prof: C. Romareda. Zaragoza), **Jorge Lafuente Gil** (Colegio Salesiano San Juan Bosco. Valencia), **Adrián Macías Quintero** (IES Arrabal. Carmona), **Celso de Frutos de Nicolás** (Prof. Jubilado. Coslada), **Eduardo González Jiménez** (Ingeniero. Málaga), **Marco Antonio Gonzales Gamarra** (Prof: EBR Secundaria. Perú), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud), **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella) y **Cristian Andrés Córdoba Silvestre** (IES Dámaso Alonso. Puertollano).*

Se recibió también una solución incorrecta.

Infantil (1º/2º ESO)

I-002. Operación Diple.

Llamamos **diple** de un número cualquiera a su doble disminuido en una unidad y lo representamos así: $\langle n\rangle=2n-1$. He aquí algunos ejemplos: $\langle 7\rangle=13$ ó $\langle\langle 7\rangle\rangle=25$

Resuelve en cada caso estas dos ecuaciones con diples:

a) $\langle\langle x\rangle\rangle+\langle x\rangle=x$ b) $\langle\langle\langle y\rangle\rangle\rangle+\langle\langle y\rangle\rangle=\langle y\rangle$

Solución

a) $\langle\langle x\rangle\rangle+\langle x\rangle=x \to \langle 2x-1\rangle+2x-1=x \to 2(2x-1)-1+2x-1=x \to$
$4x-3+2x-1=x \to 6x-4=x \to 5x=4 \to 10x=8 \to \underline{x=0'8}$

Y comprobamos: $\langle\langle 0'8\rangle\rangle+\langle 0'8\rangle=\langle 0'6\rangle+0'6=0'2+0'6=0'8$

b) Haciendo $\langle y\rangle=x$, nos queda el apartado anterior $\Rightarrow \langle y\rangle=x=0'8 \to \underline{y=0'9}$

También, como antes, podemos hacerlo paso a paso:

$\langle\langle\langle y\rangle\rangle\rangle+\langle\langle y\rangle\rangle=\langle y\rangle \to \langle\langle 2y-1\rangle\rangle+\langle 2y-1\rangle=2y-1 \to$
$\langle 4y-3\rangle+4y-3=2y-1 \to 8y-7+4y-3=2y-1 \to$
$12y-10=2y-1 \to 10y=9 \to \underline{y=0'9}$

Y, de nuevo, comprobamos: $\langle\langle\langle 0'9\rangle\rangle\rangle+\langle\langle 0'9\rangle\rangle=\langle\langle 0'8\rangle\rangle+\langle 0'8\rangle\overset{*}{=}0'8=\langle 0'9\rangle$

* *por el apartado anterior*

*Bien resuelto por: **Iria López Dios** (C. San José. Lugo), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Francisco Javier Babarro Rodríguez** (Profesor de Dibujo. San Cibrao das Viñas), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Julia Poncelas Cañizares** (IES Litoral. Málaga), **Jorge Trallero Alastuey** (Prof: C. Romareda. Zaragoza), **Claudio Rodríguez Lobato** (IES Cerro del Viento. Benalmádena), **Jorge Lafuente Gil** (Colegio Salesiano San Juan Bosco. Valencia), **Adrián Macías Quintero** (IES Arrabal. Carmona), **Celso de Frutos de Nicolás** (Prof. Jubilado. Coslada), **Eduardo González Jiménez** (Ingeniero. Málaga), **Lucía Bernués Berdala** (IES Martina Bescós. Cuarte de Huerva), **Amalia Gruescu** (IES Las Marinas. Roquetas de Mar), **Marco Antonio Gonzales Gamarra** (Prof: EBR Secundaria. Perú), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud), **Álvaro Lafuente Gil** (Colegio Salesiano San Juan Bosco. Valencia), **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella), **María García Morales** (IES Meléndez Valdés. Villafranca de los Barros), **Antonio González Montalbán** (IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes), **Jonás Costas Pais** (IES Álvaro Junqueiro. Vigo), **Cristian Andrés Córdoba Silvestre** (IES Dámaso Alonso. Puertollano) y **Emigdio Pérez Pérez** (CC Sta Mª de la Huerta. Almoradí).*

Se recibió también una solución incompleta y otra incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

C-002. Inecuación con radicales.

Determina la cantidad de pares de números enteros (m,n) que cumplen la desigualdad: $\frac{m}{\sqrt{m}}+\frac{3}{n\cdot\sqrt{m}}<\frac{4\cdot\sqrt{n}}{n}$

Solución

Por ser radicandos, los enteros m y n no pueden ser negativos y, por figurar en los denominadores, tampoco pueden ser nulos.

Operando: $\frac{m}{\sqrt{m}}+\frac{3}{n\sqrt{m}}<\frac{4\sqrt{n}}{n} \to mn+3<4\sqrt{mn} \to mn-4\sqrt{mn}+3<0$

expresión de segundo grado en $\sqrt{mn}$ que, fácilmente, podemos descomponer en factores y hallar su signo: $(\sqrt{mn}-1)(\sqrt{mn}-3)<0$

Luego: $1<\sqrt{mn}<3 \to 1<mn<9$

Así, recorriendo, por ejemplo, los posibles valores de m:

$$\text{para } m=1 \rightarrow 1<n<9 \Rightarrow 7 \text{ pares: } (1,n) \text{ con } n\in\{2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$\text{para } m=2 \rightarrow 1<2n<9 \Rightarrow 4 \text{ pares: } (2,n) \text{ con } n\in\{1,2,3,4\}$$
$$\text{para } m=3 \rightarrow 1<3n<9 \Rightarrow 2 \text{ pares: } (3,n) \text{ con } n\in\{1,2\}$$
$$\text{para } m=4 \rightarrow 1<4n<9 \Rightarrow 2 \text{ pares: } (4,n) \text{ con } n\in\{1,2\}$$
$$\text{para } m=5 \rightarrow 1<5n<9 \Rightarrow 1 \text{ par: } (5,1)$$
$$\text{para } m=6 \rightarrow 1<6n<9 \Rightarrow 1 \text{ par: } (6,1)$$
$$\text{para } m=7 \rightarrow 1<7n<9 \Rightarrow 1 \text{ par: } (7,1)$$
$$\text{para } m=8 \rightarrow 1<8n<9 \Rightarrow 1 \text{ par: } (8,1)$$

En total, <u>19 pares</u>.

<u>Solución de Javier Badesa Pérez (E2 - Colegio Santa Ana. Calatayud)</u>

Actúa igual hasta llegar a $1<mn<9$ y, a partir de ahí, en el último paso afina mucho mejor:

Como la cantidad de pares (m,n) tales que $mn=t$ es la misma que el número de divisores de t (tanto m como n ha de ser divisores y, si $m=d$, $n=mn/d$), se deduce que hay tantos pares como posibles valores de m y por tanto como divisores de $mn=t$.

Entonces, si llamamos $d(t)$ al número de divisores de un número t, tendremos:

$$\text{Cantidad de pares } (m,n) = d(2)+d(3)+d(4)+d(5)+d(6)+d(7)+d(8) =$$
$$=2+2+3+2+4+2+4=19$$

Por lo que se concluye que hay <u>19 pares</u> (m,n) que cumplen la condición inicial.

*También resuelto por: **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Jorge Trallero Alastuey** (Prof: C. Romareda. Zaragoza), **Marco Antonio Gonzales Gamarra** (Prof: EBR Secundaria. Perú), **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella) y **Cristian Andrés Córdoba Silvestre** (IES Dámaso Alonso. Puertollano).*

Se recibieron también cinco soluciones incompletas y dos incorrectas por incluir los pares con valores negativos.

Jv-002. Preparando la EBAU.

Por turnos, dos jugadores van substituyendo los cuadrados negros por números en un tablero que representa un sistema homogéneo, sistema que, como bien sabes, siempre es compatible. Gana el primer jugador si, al final, queda indeterminado y, el segundo, si resulta determinado. ¿Hay alguna estrategia ganadora para el primero o el segundo en jugar? De ser así, ¿cuál sería dicha estrategia?

Estudia el juego en estos dos casos:

a) $\left.\begin{array}{l} \blacksquare x+\blacksquare y=0 \\ \blacksquare x+\blacksquare y=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \blacksquare x+\blacksquare y+\blacksquare z=0 \\ \blacksquare x+\blacksquare y+\blacksquare z=0 \\ \blacksquare x+\blacksquare y+\blacksquare z=0 \end{array}\right\}$

a) El primero siempre puede conseguir que una fila o una columna de la matriz del sistema sea nula colocando dos ceros en sus turnos. De no actuar así, el segundo que sería el último en jugar siempre podría lograr que el determinante de la matriz del sistema fuera distinto de cero y, así, el sistema resultaría determinado.

b) También el primero que siempre puede, por ejemplo, conseguir dos ecuaciones iguales: pone un primer coeficiente en una primera ecuación y cuando el segundo:
- coloque un coeficiente en la misma ecuación, él la completa en su siguiente movimiento.
- coloque un coeficiente en una segunda ecuación, él replica poniendo el mismo valor en el correspondiente coeficiente de la tercera ecuación.

*Bien resuelto por: **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud) y **Cristian Andrés Córdoba Silvestre** (IES Dámaso Alonso. Puertollano).*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y siete incorrectas.

Jn-002. Compleja operación.

Si $x+\dfrac{1}{x}=-1$, determina el valor de $a_n=x^n+\dfrac{1}{x^n}$ y $b_n=x^n-\dfrac{1}{x^n}$ $\forall n\in N$

*Solución de **Javier Badesa Pérez** (E2 - Colegio Santa Ana. Calatayud)*

$$x+\frac{1}{x}=-1 \qquad a_n=x^n+\frac{1}{x^n} \qquad b_n=x^n-\frac{1}{x^n}$$

- En primer lugar hallaremos a_n.

Veamos que: $$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)=x^n+\frac{1}{x^{n-2}}+x^{n-2}+\frac{1}{x^n}\ \rightarrow$$

$$-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)\ \rightarrow$$

$$-a_{n-1}=a_n+a_{n-2}\ \rightarrow\ \underline{a_n=-a_{n-1}-a_{n-2}}$$

Además sabemos que, si en algún momento $a_k=a_1$ y $a_{k+1}=a_2$, al depender cada término de los dos anteriores únicamente, ocurrirá que se repetirá siempre $a_1,\ a_2,\ldots a_k=a_1,\ a_{k+1}=a_2\ldots$ y, por tanto, $a_{m+nk}=a_m\ \ \forall n\in Z^+$ [A]

Calculemos ahora a_2: $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=a_2+2\ \rightarrow\ a_2=1-2=-1$

Y usando que $a_n=-a_{n-1}-a_{n-2}$, obtendremos: $a_3=2,\ a_4=-1,\ a_5=-1,\ldots$

Y por lo visto en [A], como $a_4=a_1$ y $a_5=a_2$, se deduce que $a_{3n+1}=a_1$, $a_{3n+2}=a_2$, $a_{3n+3}=a_3$. Así que:

$$\underline{a_n=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad mod_3(n)=1\\ -1 & \text{si} \quad mod_3(n)=2\\ 2 & \text{si} \quad mod_3(n)=0\end{cases}}$$

- Ya sólo nos queda obtener b_n.

Para ello deduciremos b_1

$$x+\frac{1}{x}=-1\ \rightarrow\ x^2+1=-x\ \rightarrow\ x^2+x+1=0\ \rightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}$$

$$b_1=x-\frac{1}{x}=x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}-\frac{1}{\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}-\frac{2}{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}-\frac{2(\pm\sqrt{3}\cdot i+1)}{(\pm\sqrt{3}\cdot i-1)(\pm\sqrt{3}\cdot i+1)}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}-\frac{\pm 2\sqrt{3}\cdot i+2}{(\pm\sqrt{3}\cdot i)^2-1^2}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}-\frac{\pm 2\sqrt{3}\div i+2}{-4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}+\frac{\pm\sqrt{3}\cdot i+1}{2}=\pm\sqrt{3}\cdot i$$

Es decir, que b_1 puede ser $+\sqrt{3}\cdot i$ ó $-\sqrt{3}\cdot i$.

Ahora hallemos b_2 en función de b_1

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2-\frac{1}{x^2}\ \rightarrow\ -1\cdot b_1=b_2\ \rightarrow\ b_2=-b_1$$

Por último, observemos que: $$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1}-\frac{1}{x^{n-1}}\right)=x^n-\frac{1}{x^{n-2}}+x^{n-2}-\frac{1}{x^n}\ \rightarrow$$

$$-b_{n-1}=b_n+b_{n-2}\ \rightarrow\ \underline{b_n=-b_{n-1}-b_{n-2}}$$

Usando esto queda: $b_3=0$, $b_4=b_1$, $b_5=-b_1,\ldots$

Y por una deducción similar a la de [A] (es la misma pero cambiando a por b) veremos que

$$\underline{b_n=\begin{cases}b_1 & \text{si} \quad mod_3(n)=1\\ -b_1 & \text{si} \quad mod_3(n)=2\\ 0 & \text{si} \quad mod_3(n)=0\end{cases}} \qquad \text{donde } b_1=\pm\sqrt{3}\cdot i=\pm\sqrt{-3}$$

*También resuelto por: **Ignacio Larrosa Cañestro** (Prof Jubilado. A Coruña), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (IES Ruiz de Alda. San Javier), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Juan Francisco Cuevas Rodríguez** (IES Campos de Níjar. Campohermoso), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco García Cortés** (Estudiante de Matemáticas. Universidad de Sevilla), **Ana Mascato García** (Prf: IES Sanxenxo), **Leonardo Costa Lesage** (IES Pere Boïl. Manises), **Natalia Carnero Álvarez** (IES Álvaro Cunqueiro. Vigo) y **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella).*

Se recibieron también tres soluciones incompletas y una incorrecta.

S-002. Clásico *sincostan.*

Resuelve este sistema trigonométrico de ecuaciones:
$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=\tan^2 z\\ \sin^2 y+\cos^2 z=\tan^2 x\\ \sin^2 z+\cos^2 x=\tan^2 y\end{cases}$$

Solución

Conocidas son las relaciones pitagóricas: $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ y $\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1$.

El sistema puede escribirse así:

$$\begin{cases}1-\cos^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{\cos^2 z}-1\\ 1-\cos^2 y+\cos^2 z=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\\ 1-\cos^2 z+\cos^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 y}-1\end{cases}$$

Quitando denominadores:

$$\begin{cases}\cos^2 z\cdot(1-\cos^2 x+\cos^2 y)=1-\cos^2 z\\ \cos^2 x\cdot(1-\cos^2 y+\cos^2 z)=1-\cos^2 x\\ \cos^2 y\cdot(1-\cos^2 z+\cos^2 x)=1-\cos^2 y\end{cases}$$ y sumando las tres ecuaciones:

$$2\cdot(\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z)=3 \quad\to\quad M_A=\frac{\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z}{3}=\frac{1}{2}$$

O sumando: $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 y}+\dfrac{1}{\cos^2 z}=6 \quad\to\quad M_H=\dfrac{3}{\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 y}+\dfrac{1}{\cos^2 z}}=\dfrac{1}{2}$

Y, como $M_A=M_H$, las medias aritmética y harmónica coinciden:

$$\cos^2 x=\cos^2 y=\cos^2 x=\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\quad\to\quad \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\to\quad \underline{x=45^\circ+90^\circ\cdot j}\qquad j\in Z$$

$$\cos^2 y=\frac{1}{2}\quad\to\quad \cos y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\to\quad \underline{y=45^\circ+90^\circ\cdot k}\qquad k\in Z$$

$$\cos^2 z=\frac{1}{2}\quad\to\quad \cos z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\to\quad \underline{z=45^\circ+90^\circ\cdot 1}\qquad 1\in Z$$

Cualquier terna formada por esos valores de x, y y z es solución del sistema.

Leonardo Costa Lesage (B2 - IES Pere Boïl. Manises) actúa de forma totalmente similar haciendo el cambio de variables: $a=\cos^2 x$, $b=\cos^2 y$ *y* $c=\cos^2 z$

Cristian Andrés Córdoba Silvestre (B1 - IES Dámaso Alonso de Puertollano) obtiene también que: $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=\dfrac{3}{2}$ *y* $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 y}+\dfrac{1}{\cos^2 z}=6$

Y prueba, antes de aplicar, que $\forall\, a,b,c\in\Re^+\ (a+b+c)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$.

Y, como en este caso, haciendo el mismo cambio de variable $a=\cos^2 x$, $b=\cos^2 y$ *y* $c=\cos^2 z$, *se da la igualdad, concluye como en la solución oficial.*

Encontraron también solución (a falta de perfilarla más con algún detalle): ***Daniel Cao Labora*** *(UVigo),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(Prof Jubilado. Coruña),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Juan Francisco Cuevas Rodríguez*** *(IES Campos de Níjar. Campohermoso),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Natalia Carnero Álvarez*** *(IES Álvaro Cunqueiro. Vigo),* ***Jorge Trallero Alastuey*** *(Prof: C. Romareda. Zaragoza),* ***César Catalán Capaccioni*** *(Ingeniero Industrial. Valencia),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Eduardo González Jiménez*** *(Ingeniero. Málaga)*

Se recibieron también cinco soluciones incompletas.

■