PROBLEMA DEL MES

Septiembre – 2020

Soluciones

Real Sociedad
Matemática Española

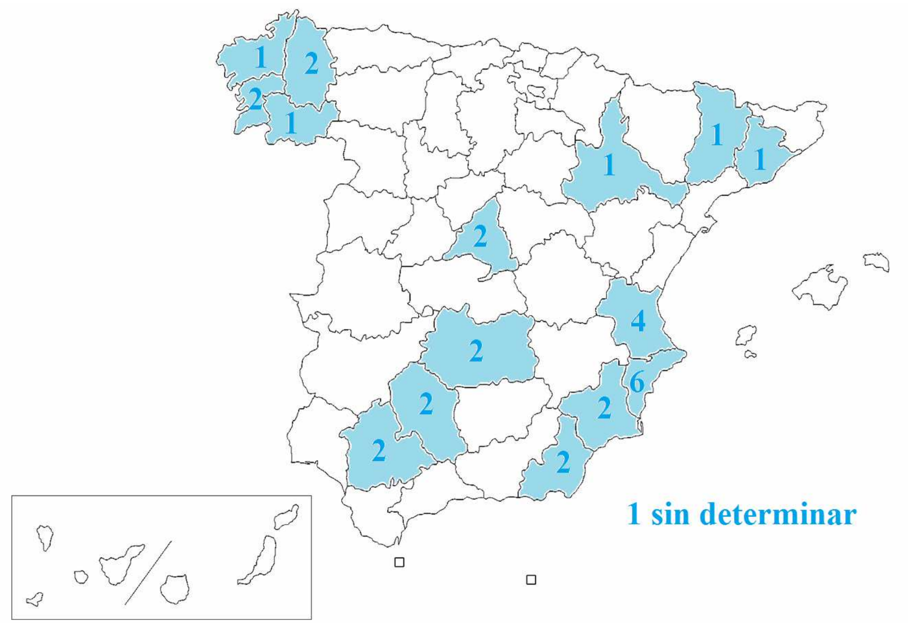
Alevín (5º/6º Primaria)

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
003	✓		✓		✓	
004	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

32 participantes (31 chicos / 1 chicas) 70 respuestas



A-004. Por tres y entre dos.

Elige un número cualquiera y ve anotando los resultados que obtengas al ir multiplicando por tres y dividiendo por dos alternativamente mientras dicho resultado sea un número entero. Obtendrás así la secuencia de números enteros más larga posible a partir del número elegido. Por ejemplo, si eliges 10:

$$10 \xrightarrow{\times 3} 30 \xrightarrow[\div 2]{} 15 \xrightarrow{\times 3} 45 \xrightarrow[\div 2]{} 22'5 \text{ secuencia de cuatro enteros}$$

Te daremos el problema por válido si respondes bien a estas dos cuestiones:

a) Si empiezas con 2020, ¿qué longitud alcanza la secuencia de enteros?

b) ¿Cuál es el número más pequeño con el que se puede alcanzar una secuencia de diez enteros de longitud?

Solución

a) Empezando por 2020 la secuencia de enteros llega a tener 6 enteros:

$$2020 \xrightarrow{\times 3} 6060 \xrightarrow[\div 2]{} 3030 \xrightarrow{\times 3} 9090 \xrightarrow[\div 2]{} 4545 \xrightarrow{\times 3} 13635$$

b) El número más pequeño con el se consigue una secuencia de diez enteros es 16:

$$16 \xrightarrow{\times 3} 48 \xrightarrow[\div 2]{} 24 \xrightarrow{\times 3} 72 \xrightarrow[\div 2]{} 36 \xrightarrow{\times 3}$$

$$108 \xrightarrow[\div 2]{} 54 \xrightarrow{\times 3} 162 \xrightarrow[\div 2]{} 81 \xrightarrow{\times 3} 243$$

Que es el más pequeño se puede justificar porque 16 en su descomposición en factores primos, sólo tiene cuatro factores 2 y, por tanto, sólo se podrá dividir por 2 cuatro veces. Siempre, antes de dividir por 2, se multiplica por 3, otras cuatro veces y, al final, se podrá hacer esta operación una vez más. Total, junto con el número de partida, se tendrá una secuencia de $1+4_{\times 3}+4_{\div 2}+1_{\times 3}=10$ enteros de longitud.

Esto, los más mayores, lo pueden justificar así: la secuencia de enteros tiene siempre el doble del número de factores dos que tiene el entero elegido más dos unidades

Empezando por

$$N = 2^n \cdot 3^m \cdot Q \xrightarrow{\times 3} 2^n \cdot 3^{m+1} \cdot Q \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-1} \cdot 3^{m+1} \cdot Q$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2^{n-1} \cdot 3^{m+2} \cdot Q \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-2} \cdot 3^{m+2} \cdot Q$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2^{n-2} \cdot 3^{m+3} \cdot Q \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-3} \cdot 3^{m+3} \cdot Q$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2^{n-k} \cdot 3^{m+(k+1)} \cdot Q \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-(k+1)} \cdot 3^{m+(k+1)} \cdot Q$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2^{n-(n-2)} \cdot 3^{m+(n-1)} \cdot Q \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-(n-1)} \cdot 3^{m+(n-1)} \cdot Q$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2 \cdot 3^{m+n} \cdot Q \xrightarrow[\div 2]{} 3^{m+n} \cdot Q \xrightarrow{\times 3} 3^{m+n+1} \cdot Q$$

Y el más pequeño no tendrá factores 3 ni factor Q alguno:

$$N = 2^n \xrightarrow{\times 3} 2^n \cdot 3 \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-1} \cdot 3$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2^{n-1} \cdot 3^2 \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-2} \cdot 3^2$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2^{n-2} \cdot 3^3 \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-3} \cdot 3^3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2^{n-k} \cdot 3^{k+1} \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-(k+1)} \cdot 3^{k+1}$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2^{n-(n-2)} \cdot 3^{(n-1)} \xrightarrow[\div 2]{} 2^{n-(n-1)} \cdot 3^{(n-1)}$$
$$\xrightarrow{\times 3} 2 \cdot 3^n \xrightarrow[\div 2]{} 3^n \xrightarrow{\times 3} 3^{n+1}$$

Si $n = k$, la longitud llega a ser de $2k + 2$ enteros (nunca longitud impar)

Sabiendo, en ambos casos, sin hacer operación alguna, en qué potencia de 3 acabará la secuencia multiplicada, en su caso, por el producto Q de factores primos impares que permanece inalterable de principio a fin.

*Bien resuelto por: **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Iván López Márquez** (C.I. Jesuitas. Alicante), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Luis Mascarell** (IES Lloixa. San Juan de Alicante), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Jubilado-Ourense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Prof. Jubilado. Coslada), **Juan Ramón Sisternes Alacot** (IES L'Om. Picassent), **Alejandro Cuevas Rodríguez** (IES Campos de Níjar. Campohermoso)*

Se recibieron dos soluciones incompletas.

I-004. Primos encadenados

Sabiendo que a, b, c y d son dígitos del 1 al 9, determina todos los números primos de dos cifras de la forma $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ y $\overline{da}$. Da todas las posibilidades.

Recuerda que $\overline{ab}$ representa al número formado por a decenas y b unidades para distinguirlo de ab que indica el producto de las cifras a y b.

Solución

Viendo la lista de los primeros números primos, hemos de descartar los de una cifra, los que llevan cifra par y los que acaban en cinco:

~~2 3 5 7~~ 11 13 17 19 ~~23 29~~ 31 37 ~~41 43 47 53 59 61 67~~ 71 73 79 ~~83 89~~ 97

Por tanto: $\{A, B, C, D\} \equiv \{1, 3, 7, 9\}$

Como sólo hay un número primo de dos cifras que empieza por 9, el 97, las posibilidades son:

$\overline{ab}$	$\overline{bc}$	$\overline{cd}$	$\overline{da}$	
97	71	-	19	Repetiría el 1
″	″	-	79	Repetiría el 7
97	73	31	19	✓
″	″	-	79	Repetiría el 7

Una solución y, obviamente, cualquier permutación circular de esos valores:

	a	b	c	d
1ª	9	7	3	1
2ª	1	9	7	3
3ª	3	1	9	7
4ª	7	3	1	9

Nota *Tal vez hubiera que haber recalcado en el enunciado que los dígitos eran distintos, pues algún participante abordó el problema sin esa condición.*

*Con un meticuloso tanteo podemos ver que, salvo permutaciones circulares, serían **16**. (sin esa consideración, **53**: una de un ciclo, 4 de ciclo doble y 11 de ciclo cuádruple)*

Empezando y acabando en 1 (11, 13, 17 ó 19 → 11, 31 ó 71)

	$\overline{ab}$	$\overline{bc}$	$\overline{cd}$	$\overline{da}$
1ª	11	11	11	11
2ª	”	”	13	31
3ª	”	”	17	71
2ª	11	13	31	11
-	”	”	-	31
4ª	”	”	37	71
3ª	11	17	71	11
5ª	”	”	73	31
-	”	”	-	71
-	11	19	-	11
-	”	”	-	31
6ª	”	”	97	71
2ª	13	31	11	11
7ª	”	”	13	31
8ª	”	”	17	71

	$\overline{ab}$	$\overline{bc}$	$\overline{cd}$	$\overline{da}$
4ª	13	37	71	11
9ª	”	”	73	31
-	”	”	-	71
3ª	17	71	11	11
8ª	”	”	13	31
10ª	”	”	17	71
5ª	17	73	31	11
-	”	”	-	31
11ª	”	”	37	71
-	17	79	-	11
-	”	”	-	31
12ª	”	”	97	71
6ª	19	97	71	11
13ª	”	”	73	31
-	”	”	-	71

Empezando y acabando en 3 (31 ó 37 → 13 ó 73)

2ª	31	11	11	13
5ª	”	”	17	73
7ª	31	13	31	13
9ª	”	”	37	73
8ª	31	17	71	13
-	”	”	-	73
-	31	19	-	13
13ª	”	”	97	73

4ª	37	71	11	13
11ª	”	”	17	73
9ª	37	73	31	13
14ª	”	”	37	73
-	37	79	-	13
15ª	”	”	97	73

Empezando y acabando en 7 (71, 73 ó 79 → 17, 37 ó 97)

3ª	71	11	11	17
4ª	”	”	13	37
6ª	”	”	19	97
8ª	71	13	31	17
-	”	”	-	37
-	”	”	-	97
10ª	71	17	71	17
11ª	”	”	73	37
12ª	”	”	79	97
-	71	19	-	17
-	”	”	-	37
-	”	”	-	97

5ª	73	31	11	17
9ª	”	”	13	37
13ª	”	”	19	97
11ª	73	37	71	17
14ª	”	”	73	37
15ª	”	”	79	97
12ª	79	97	71	17
15ª	”	”	73	37
16ª	”	”	79	97

Empezando y acabando en 9 (97 → 19 ó 79)

6ª	97	71	11	19
12ª	97	71	17	79
13ª	97	73	31	19
15ª	97	73	37	79
-	97	79	-	19
16ª	97	79	97	79

El juego de colores resulta muy explicito a la hora de contar los distintos casos

Bien resuelto por: ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Jubilado-Ourense),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Juan Ramón Sisternes Alacot*** *(IES L'Om. Picassent),* ***Jonás Costas Pais*** *(IES Álvaro Junqueiro. Vigo),* ***Antonio González Montalbán*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes*

Se recibieron también tres soluciones incorrectas por considerar 91 primo

Cadete (3º/4º ESO)

C-004. Enorme número de dos mil veinte cifras.

Un número de 2020 cifras comienza por 6. Cualquier número formado por dos cifras consecutivas es múltiplo de 17 o de 23. ¿Cuál es la última cifra del número?

Solución

La tabla siguiente muestra todos los múltiplos de 17 y 23 de dos cifras.

×	17	23
1	17	23
2	34	46
3	51	69
4	68	92
5	85	

Se observa que las cifras de las unidades contienen todos los dígitos del 1 al 9 sin repetir y en las de las decenas falta el 7 y se repite el 6.

El número pedido comienza por 6, por tanto, tiene dos posibles modos de seguir: 68...... y 69......

El primero de ellos es imposible pues sería: 68517 y quedaría cortado con cinco cifras. Descartado este camino el número tiene la forma: 69234 69234 … ... 69234 donde la secuencia 69234 se repite $2020/5=404$ veces exactamente. Luego la última cifra del número buscado 4.

$$\overbrace{69234\ldots\ldots\ldots\ldots69234}^{404\ \text{veces}}$$

Pero, ¡ojo!, como muy bien supo advertir *Nicolás Iserte*, el número formado por 403 veces la secuencia 69234 seguido de un bloque 68517 también vale. Luego la última cifra también puede ser 7.

$$\overbrace{69234\ldots\ldots\ldots\ldots69234}^{403\ \text{veces}}\ 68517$$

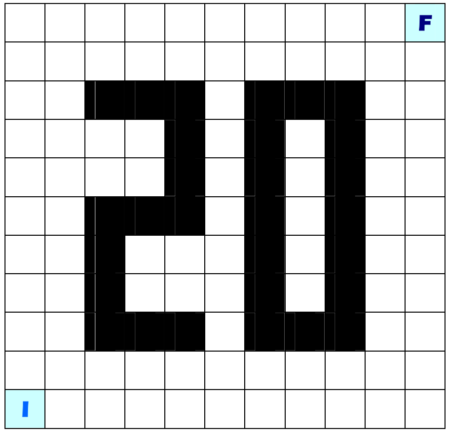
Bien resuelto por: ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella,* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Prof. Jubilado. Coslada),* ***Javier Badesa Pérez*** *(Colegio Santa Ana. Calatayud),* ***Juan Ramón Sisternes Alacot*** *(IES L'Om. Picassent),* ***Jonás Costas Pais*** *(IES Álvaro Junqueiro. Vigo)*

Se recibieron también cinco soluciones incompletas y una incorrecta.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-004. Obstáculo veinte.

Sobre esta cuadrícula solo puedes avanzar yendo de una celda, bien a la que tiene a su derecha, bien a la que tiene en su parte superior. ¿De cuántas formas puedes ir desde la celda inicial a la celda final teniendo en cuenta que tienes un veinte que obstaculiza algunos movimientos?



Solución

Ponemos sobre cada celda el número de formas de llegar a ellas, número que se obtiene sumando el número de formas de llegar a la celda inferior y a la celda de la izquierda que son las dos desde las que se puede acceder a la celda dada. Así sobre la celda final nos quedarán marcadas las formas de llegar a ella: 238.

1	11	21	31	41	57	73	89	105	131	**238**
1	10	10	10	10	16	16	16	16	26	107
1	9				6				10	81
1	8	15	22		6				10	71
1	7	7	7		6				10	61
1	6				6				10	51
1	5				6				10	41
1	4				6				10	31
1	3				6				10	21
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Bien resuelto por: ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***Daniel Cebrián Castillo*** *(IES Trassierra. Córdoba),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Prof. Jubilado. Coslada),* ***Daniel Guerra Avilés*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes),* ***Javier Badesa Pérez*** *(Colegio Santa Ana. Calatayud),* ***Juan Ramón Sisternes Alacot*** *(IES L'Om. Picassent),* ***Daniel Piqueras Valle*** *(IES Perdouro. Burela)*

Se recibieron también tres soluciones incorrectas.

Júnior

Jn-004. Error turiasionense.

Encuentra los números de cuatro cifras de manera que la suma de los cubos de sus cifras sea el propio número.

Solución

Llamamos: $n = \overline{abcd}$ con $a \neq 0$, b, c y d números naturales de una sola cifra y $x(n) = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$

Los cubos de números de una cifra son:

$0^3 = 0$	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$
$5^3 = 125$	$6^3 = 216$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$

Buscamos: $n = \overline{abcd} = x(n) = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$

$1000 \leq n = \overline{abcd} = x(n) = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 9999$

Pero es obvio que $x(n) \leq x(9999) \leq 9^3 + 9^3 + 9^3 + 9^3 = 2916$ por lo que, necesariamente, $a \leq 2$

Esto obliga a que $x(n) \leq 2^3 + 9^3 + 9^3 + 9^3 = 2195$ y, si a fuera 2, $b \leq 1$, forzando de nuevo a que $x(n) \leq 2^3 + 1^3 + 9^3 + 9^3 = 1467$ lo que contradice que $a = 2$. De aquí deducimos pues, que $\underline{a = 1}$

Luego $n = \overline{1bcd}$. Determinemos las tres cifras que faltan:

Si b, c, $d \leq 8$, entonces $x(n) \leq 1^3 + 8^3 + 8^3 + 8^3 = 1537$, que forzaría a que $b \leq 5$

Si $b = 5$ $\quad n = \overline{15cd} = 1500 + 10c + d = 1^3 + 5^3 + c^3 + d^3 \leq 126 + 8^3 + 8^3 = 1152$

Si $b = 4$ $\quad n = \overline{14cd} = 1400 + 10c + d = 1^3 + 4^3 + c^3 + d^3 \leq 65 + 8^3 + 8^3 = 1089$

Si $b = 3$ $\quad n = \overline{13cd} = 1300 + 10c + d = 1^3 + 3^3 + c^3 + d^3 \leq 28 + 8^3 + 8^3 = 1052$

Si $b = 2$ $\quad n = \overline{12cd} = 1200 + 10c + d = 1^3 + 2^3 + c^3 + d^3 \leq 8 + 8^3 + 8^3 = 1032$

Si $b = 1$ $\quad n = \overline{11cd} = 1100 + 10c + d = 1^3 + 1^3 + c^3 + d^3 \leq 2 + 8^3 + 8^3 = 1026$

Que, como vemos en todos estos cinco casos, la relación obtenida, resulta claramente absurda. Y, finalmente:

Si $b=0$ $\quad n=\overline{10cd}=1000+10c+d=1^3+0^3+c^3+d^3\leq 1+8^3+8^3=1025$

que forzaría $c\leq 2$

$c=2 \qquad n=\overline{102d}=1020+d=1^3+0^3+2^3+d^3\leq 9+8^3=521$

$c=1 \qquad n=\overline{101d}=1010+d=1^3+0^3+1^3+d^3\leq 2+8^3=514$

$c=0 \qquad n=\overline{100d}=1000+d=1^3+0^3+0^3+d^3\leq 1+8^3=513$

Relaciones, estas tres, también claramente absurdas.

Luego, al menos, una de las tres cifras que faltan tiene que ser 9:

Si $b=9$ $\quad n=\overline{19cd}=1900+10c+d=1^3+9^3+c^3+d^3=730+c^3+d^3$

Y de aquí: $c^3+d^3=1170$

Si $c=9$ $\quad n=\overline{1b9d}=1090+100b+d=1^3+b^3+9^3+d^3=730+b^3+d^3$

Y de aquí: $b^3+d^3=360$

Si $d=9$ $\quad n=\overline{1bc9}=1009+100b+10c=1^3+b^3+c^3+9^3=730+b^3+c^3$

Y de aquí: $b^3+c^3=279$

Y, en los tres casos, no hay dos cubos que sumen lo que dichas expresiones indican como bien puede verse en la tabla con los cubos de números de una cifra.

En definitiva, pues, no existe ningún número de cuatro cifras que coincida con la suma de los cubos de sus cifras.

NE: En la fase nacional de la XXXIV Olimpiada Matemática Española celebrada en Tarazona, provincia de Zaragoza, en el año 1998 se propuso el problema:

Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

El profesor Alejandro Miralles fue participante en dicha olimpiada y siempre lamentó no haber podido conseguir un mejor resultado por entender mal el enunciado del problema creyendo que se pedía lo que, a modo de descargo, aquí ha propuesto. De ahí el título de *Error turiasonense*, gentilicio de la ciudad donde se celebró.

Bien resuelto por: ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Juan Fco Cuevas Rodríguez*** *(IES Campos de Níjar. Campohermoso),* ***Juan Ramón Sisternes Alacot*** *(IES L'Om. Picassent),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf Meniñeiros. Friol)*

Se recibió también una solución incompleta

S-004. Dosiete.

Calcula el valor exacto de: $S_{27}=\sum_{n=1}^{27}\left\lfloor\frac{2^n}{7}\right\rfloor$

Generaliza: $S_m=\sum_{n=1}^{m}\left\lfloor\frac{2^n}{7}\right\rfloor$

Solución

El trabajo de campo aporta una información valiosísima:

	$\left\lfloor\frac{2^{3j+1}}{7}\right\rfloor$	$\left\lfloor\frac{2^{3j+2}}{7}\right\rfloor$	$\left\lfloor\frac{2^{3j+3}}{7}\right\rfloor$
$j=0$	$\left\lfloor\frac{2^1}{7}\right\rfloor=0$	$\left\lfloor\frac{2^2}{7}\right\rfloor=0$	$\left\lfloor\frac{2^3}{7}\right\rfloor=1$
$j=1$	$\left\lfloor\frac{2^4}{7}\right\rfloor=2$	$\left\lfloor\frac{2^5}{7}\right\rfloor=4$	$\left\lfloor\frac{2^3}{7}\right\rfloor=9$
$j=2$	$\left\lfloor\frac{2^7}{7}\right\rfloor=18$	$\left\lfloor\frac{2^8}{7}\right\rfloor=36$	$\left\lfloor\frac{2^9}{7}\right\rfloor=73$
$j=3$	$\left\lfloor\frac{2^{10}}{7}\right\rfloor=146$	$\left\lfloor\frac{2^{11}}{7}\right\rfloor=292$	$\left\lfloor\frac{2^{12}}{7}\right\rfloor=585$
…	… … … …	… … … …	… … … …
j	$\frac{2^{3j+1}-2}{7}$	$\frac{2^{3j+2}-4}{7}$	$\frac{2^{3j+3}-1}{7}$

Pues, vemos que las potencias de 2, al dividirlas por 7, dejan siempre resto, 2, 4 o 1 correlativamente. Justificado y bien expresado:

$$2^{3j+1}=2\cdot 8^j\equiv 2 \ \mathrm{mod}_7 \ \rightarrow \left\lfloor\frac{2^{3j+1}}{7}\right\rfloor=\frac{2^{3j+1}-2}{7}$$

$$2^{3j+2}=4\cdot 8^j\equiv 4 \ \mathrm{mod}_7 \ \rightarrow \left\lfloor\frac{2^{3j+2}}{7}\right\rfloor=\frac{2^{3j+2}-4}{7}$$

$$2^{3j+3}=8^{j+1}\equiv 1 \ \mathrm{mod}_7 \ \rightarrow \left\lfloor\frac{2^{3j+3}}{7}\right\rfloor=\frac{2^{3j+3}-1}{7}$$

Por tanto, operando detenidamente en el caso particular:

$$S_{27}=\sum_{n=1}^{27}\left\lfloor\frac{2^n}{7}\right\rfloor=\sum_{j=0}^{8}\left(\left\lfloor\frac{2^{3j+1}}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2^{3j+2}}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2^{3j+3}}{7}\right\rfloor\right)=$$
$$=\sum_{j=0}^{8}\left(\frac{2^{3j+1}-2}{7}+\frac{2^{3j+2}-4}{7}+\frac{2^{3j+3}-1}{7}\right)=$$
$$=\sum_{j=0}^{8}\left(\frac{2^{3j+1}+2^{3j+2}+2^{3j+3}}{7}-1\right)=\frac{1}{7}\cdot\sum_{n=1}^{27}2^j-9=$$

suma de una progresión geométrica de razón 2:

$$S_{27}=\frac{2^{28}-2}{7}-9=38347913$$

Y en general, operando también con sumo cuidado, y con referencia siempre hasta el término de orden mayor múltiplo de tres, tendremos tres posibilidades:

Si $m=3n$

$$S=\sum_{k=1}^{3n}\left\lfloor\frac{2^k}{7}\right\rfloor=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\left\lfloor\frac{2^{3j+1}}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2^{3j+2}}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2^{3j+3}}{7}\right\rfloor\right)=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2^{3j+1}-2}{7}+\frac{2^{3j+2}-4}{7}+\frac{2^{3j+3}-1}{7}\right)=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2^{3j+1}+2^{3j+2}+2^{3j+3}}{7}-1\right)=\frac{1}{7}\cdot\sum_{k=1}^{3n}2^j-n=\frac{2^{3n+1}-2}{7}-n$$

Si $m=3n+1$

$$S=\sum_{k=1}^{3n+1}\left\lfloor\frac{2^k}{7}\right\rfloor=\sum_{k=1}^{3n}\left\lfloor\frac{2^k}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2^{3n+1}}{7}\right\rfloor=$$
$$=\frac{2^{3n+1}-2}{7}-n+\frac{2^{3n+1}-2}{7}=\frac{2^{3n+2}-4}{7}-n$$

Si $m=3n+2$

$$S=\sum_{k=1}^{3n+2}\left\lfloor\frac{2^k}{7}\right\rfloor=\sum_{k=1}^{3n}\left\lfloor\frac{2^k}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2^{3n+1}}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2^{3n+2}}{7}\right\rfloor=$$
$$=\frac{2^{3n+2}-4}{7}-n+\frac{2^{3n+2}-4}{7}=\frac{2^{3n+3}-1}{7}-(n+1)$$

En definitiva:

$$S_m=\begin{cases}\dfrac{2^{m+1}-2}{7}-\dfrac{m}{3} & \text{si}\quad m=3n\\[2mm] \dfrac{2^{m+1}-4}{7}-\dfrac{m-1}{3} & \text{si}\quad m=3n+1\\[2mm] \dfrac{2^{m+1}-1}{7}-\dfrac{m+1}{3} & \text{si}\quad m=3n+2\end{cases}$$

■

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***Rafael Jiménez Llamas*** *(Máster Física Teórica. UAM),* ***Jordi Agustí Abella*** *(Prf. jubilado. La Seu de Urgell),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***José Ginés Espín Buendía*** *(IES El Bohío. Cartagena),* ***Manuel de la Rosa Fernández*** *(Máster UAB. Barcelona),* ***César Catalán Capaccioni*** *(Ingeniero Industrial. Valencia),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(Investigador Postdoctoral. US. Sevilla),* ***Pedro Sempere Valdés*** *(IES Mare Nostrum. Alicante)*

Se recibió también dos soluciones incompletas y tres incorrectas.