Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Octubre – 2020

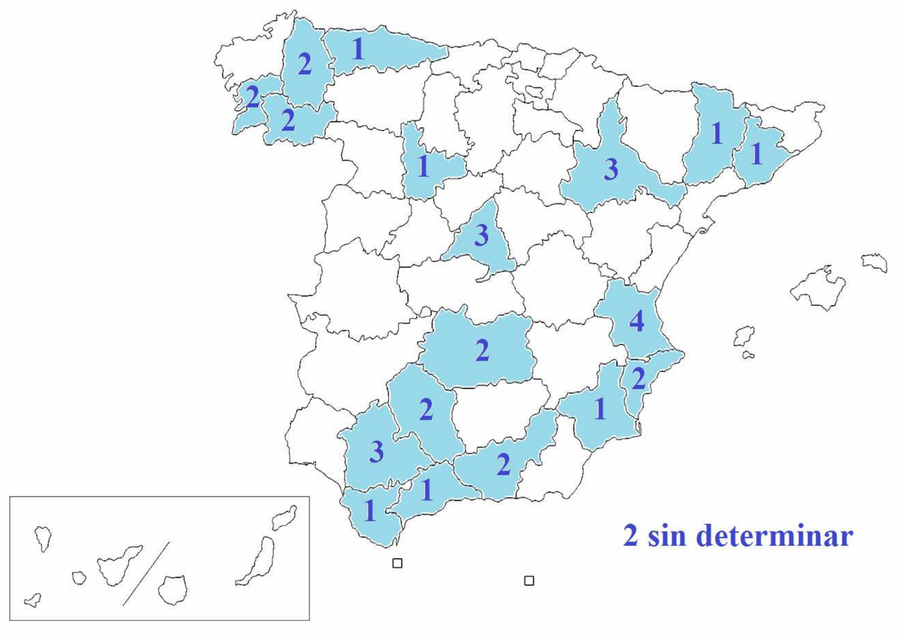
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
004	✓	✓	✓	✓	✓	✓
005	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

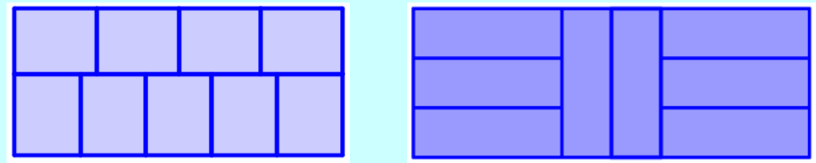
71 respuestas de 36 participantes (28 chicos / 8 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-005. Configuraciones modulares.

Cada una de estas configuraciones se realiza a partir de una misma pieza **básica**.



La primera tiene un área de **180 cm²**, ¿qué perímetro tiene la pieza básica?

Y la segunda tiene un perímetro de **22 cm**, ¿qué área tiene su pieza básica?

Solución

Siendo **a** y **b** las dimensiones de la pieza básica, tenemos:

En el primer caso que: $9\cdot a\cdot b=180$, $4\cdot a=5\cdot b$ y se pide $p=2\cdot(a+b)$

Así: $a\cdot b=20$ y $b=\frac{4}{5}a=0'8\cdot a \rightarrow 0'8\cdot a^2=20 \rightarrow a^2=25$

Luego $a=5$ y $b=4$, siendo el perímetro: $\underline{p}=2\cdot(4+5)=\underline{18}$ cm

Y en el segundo que: $6b+4a=22$, $b=3a$ y se pide $S=a\cdot b$

Así: $18\cdot a+4\cdot a=22\cdot a=22 \rightarrow a=1$ y $b=3$

Luego el área de la pieza básica es: $\underline{S}=1\cdot 3=\underline{3}$ cm².

*Además del proponente, **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), lo resuelven bien: **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Iván López Márquez** (Colegio Inmaculada Jesuitas. Alicante), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Profesor jubilado. Coslada), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud), **Máximo Madueño Mateos** (IES Dunas de las Chapas. Marbella) y **Javier Eduardo Gallardo Ghisoli** (Ingeniero Electrónico. Madrid)*

Se recibió también una solución incompleta.

Infantil (1º/2º ESO)

I-005. Velas numéricas.

Un abuelo, una abuela y sus dos nietos cumplen años el mismo día y todos nacieron en años distintos. El día de la celebración se produjo el siguiente diálogo familiar:

Nieto: *¡Qué curioso! Con sólo dos velas* (cada vela representa un dígito) *podremos adornar con los años correspondientes las cuatro tartas.*

Abuela: *Eso sólo ocurre este año.*

Justifica si tiene, o no, razón la abuela.

Nieta: *Si, y la diferencia de edad entre dos de nosotros es la edad del otro…*

Abuelo: *Una razón más que hace a nuestra familia tan especial.*

Averigua la edad de estos cuatro miembros de familia *tan especial.*

Solución

Sean las edades de los protagonistas: $E_1 = a$, $E_2 = b$, $E_3 = 10a + b$ y $E_4 = 10b + a$, con $a < b < 10a + b < 10b + a$ por haber nacido en años distintos.

Sí, la abuela tiene razón. Veamos cómo cualquier familia que cumpla esta propiedad, lo hará únicamente en un año.

Las edades al cabo de k años (o hace k años, si es negativo) serían: $E'_1 = a + k$, $E'_2 = b + k$, $E'_3 = 10a + b + k$ y $E'_4 = 10b + a + k$

Las dos primeras, $a + k$ y $b + k$, deben seguir siendo menores de 10, pues, son únicamente dos velas las que se emplean para señalar los cuatro cumpleaños. Las de uno de los abuelos, no importa si él o ella, serían a para las decenas y $b + k$ para las unidades y, las del otro, b para las decenas y $a + k$ para las unidades. Y para que esto fuese posible, se debería cumplir que: $a = a + k$ y $b = b + k$, lo que implica $\underline{k = 0}$

Y la diferencia a la que hace alusión la nieta podría ser:

- $\underline{E_4 - E_3 \equiv E_1}$

  $10b + a - (10a + b) = a \quad \to \quad 9b - 9a = a \quad \to \quad 9b = 8a$

  Y, como a y b son números de una cifra, $a = 9$ y $b = 8$

  Pero esto es absurdo: no se cumple que $a < b$

- $\underline{E_4 - E_3 \equiv E_2}$

  $10b + a - (10a + b) = b \quad \to \quad 9b - 9a = b \quad \to \quad 8b = 9a$

  Y, como a y b son números de una cifra, $a = 8$ y $b = 9$.

  Así, las edades serían: $\underline{E_1 = 8}$, $\underline{E_2 = 9}$, $\underline{E_3 = 89}$ y $\underline{E_4 = 98}$

Bien resuelto por: ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Ángel Blázquez García*** *(CEIP Val de la Atalaya. Mª de Huerva),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Profesor jubilado. Coslada),* ***Javier Badesa Pérez*** *(Colegio Santa Ana. Calatayud),* ***Antonio González Montalbán*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes),* ***Nisrine Marhabi*** *(IES Vega Baja. Callosa de Segura),* ***Máximo Madueño Mateos*** *(IES Dunas de las Chapas. Marbella),* ***Beatriz López Paredes*** *(IES As Lagoas. Ourense),* ***Javier Eduardo Gallardo Ghisoli*** *(Ingeniero Electrónico. Madrid),* ***Santiago Díaz Guillot*** *(Escuelas San José. Jesuitas. Valencia),* ***Dorthy Ramos*** *y* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena)*

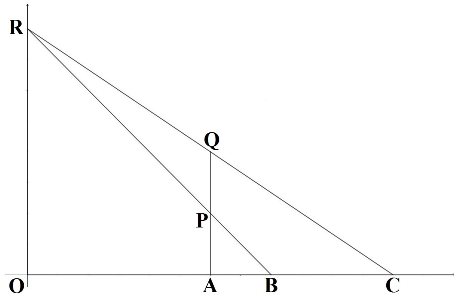
Se recibieron también tres soluciones incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-005. Cilindros de cera.

Dos velas cilíndricas de la misma longitud tienen distinto grosor, de modo que una de ellas se consume en **4** horas mientras la otra lo hace en **6**, se encienden a la vez. Halla el tiempo que ha de transcurrir hasta que la longitud de una de ellas sea doble que la de la otra. *(Se supone que ambas velas disminuyen su longitud con velocidades constantes).*

Solución-1



En el plano coordenado, como muestra la figura, situamos el tiempo en horas sobre el eje **OX** y la longitud de las velas sobre el eje **OY**.

Pongamos $OA = t$, $OB = 4$, $OC = 6$ y $OR = \ell$ la longitud inicial de las velas

La condición del enunciado es:

$$AQ = 2 \cdot AP$$

OBR es semejante a **ABP** y **OCR** lo es a **ACQ**, por tanto: $\dfrac{\ell}{AP} = \dfrac{4}{4-t}$ y $\dfrac{\ell}{2 \cdot AP} = \dfrac{6}{6-t}$

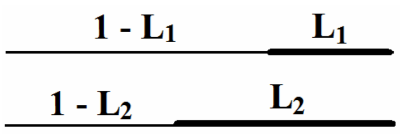
de donde: $\dfrac{4}{4-t} = \dfrac{12}{6-t} \quad \Rightarrow \quad \underline{t = 3}$ con independencia del valor de ℓ y de **AP**.

Solución-2

Sin pérdida de generalidad, suponemos que las velas miden 1 u.d.l. inicialmente. Y transcurrido un tiempo t las longitudes de las velas han de ser $L_2 = 2 \cdot L_1$

Vela-1

Vela-2

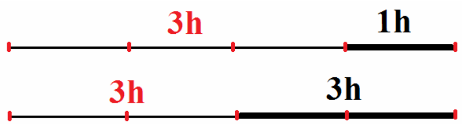


$$v_1 = \frac{1}{4} = \frac{1-L_1}{t}$$

$$v_2 = \frac{1}{6} = \frac{1-L_2}{t}$$

$$4 \cdot (1-L_1) = t = 6 \cdot (1-L_2) = 6 \cdot (1-2 \cdot L_1) \quad \rightarrow \quad L_1 = \frac{1}{4},\ L_2 = \frac{1}{2} \ \text{y} \ \underline{t=3}$$

que casi de cabeza podíamos haberlo intuido:



*Bien resuelto por: **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Profesor jubilado. Coslada), **Gonzalo Espinola Castro** (IES Llanes. Sevilla), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud), **Mario Balda Agudo** (E3-AMª de la Quinta. Granada), **Lucía Herráiz Cano** (Colegio Los Sauces. Torrelodones), **Jonás Costas Pais** (E3 - IES Álvaro Junqueiro. Vigo), **Hada Galán Lamas** (EscuelaWaldorf-Meniñeiros. Friol), **Samuel Orellana Mateo** (IES Almoraima. Castellar de la Frontera), **Máximo Madueño Mateos** (IES Dunas de las Chapas. Marbella), **Javier Eduardo Gallardo Ghisoli** (Ingeniero Electrónico. Madrid) y **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Jv-005. Sistema muy peculiar.

Halla los valores reales que satisfacen el sistema: $\begin{cases} x_1x_2+x_3x_4=2 \\ x_1x_3+x_2x_4=2 \\ x_1x_4+x_2x_3=2 \end{cases}$

Solución

(I) – (II) $\quad x_1(x_2-x_3)+x_4(x_3-x_2)=0 \quad \rightarrow \quad (x_1-x_4)(x_2-x_3)=0$

(II) – (II) $\quad x_1(x_3-x_4)+x_2(x_4-x_3)=0 \quad \rightarrow \quad (x_1-x_2)(x_3-x_4)=0$

(I) – (III) $\quad x_1(x_2-x_4)+x_3(x_4-x_2)=0 \quad \rightarrow \quad (x_1-x_3)(x_4-x_2)=0$

Lo que sólo es posible si son:

a) todas iguales: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

Y, por tanto, $x_ix_i+x_ix_i=2 \quad \rightarrow \quad 2x_i^2=2 \quad \rightarrow \quad x_i = \pm 1$

Dos soluciones: $\underline{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1}$

b) tres iguales y una libre. Por ejemplo: $x_1 = x_2 = x_3$ y $x_4 = \lambda$

Y, por tanto, $x^2+\lambda x = 2 \quad \rightarrow \quad \left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = \frac{8+\lambda^2}{4}$

$$x+\frac{\lambda}{2} = \frac{\pm\sqrt{8+\lambda^2}}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-\lambda\pm\sqrt{8+\lambda^2}}{2}$$

Son soluciones: $\underline{x_1 = x_2 = x_3 = \frac{-\lambda\pm\sqrt{8+\lambda^2}}{2}}$, $\underline{x_4 = \lambda}$ y cualquier otra distribución de la terna de iguales y la cuarta incógnita libre.

*Además del proponente, **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), lo resuelven bien: **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud), **Javier Eduardo Gallardo Ghisoli** (Ingeniero Electrónico. Madrid)*

Se recibieron también una solución incompleta.

Júnior

Jn-005. Abecenteros.

Halla los valores enteros a, b y c que cumplen el sistema: $\begin{cases} a^2+b+3<5a \\ b^2+c+8<7b \\ c^2+a+15<9c \end{cases}$

Solución

Por ser a, b y c enteros:

$$\left.\begin{matrix} a^2+b+3<5a \\ b^2+c+8<7b \\ c^2+a+15<9c \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} a^2+b+4\le 5a \\ b^2+c+9\le 7b \\ c^2+a+16\le 9c \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} a^2-4a+4\le a-b \\ b^2-6b+9\le b-c \\ c^2-8c+16\le c-a \end{matrix}\right\}$$

Sumando las tres inecuaciones:

$(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2\le 0 \quad \rightarrow$ Negativo no puede ser y, en el caso nulo, $a=2$, $b=3$ y $c=4$, como bien puedes comprobar, no funciona. Luego, el sistema no tiene solución.

Bien resuelto por: ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Javier Badesa Pérez*** *(Colegio Santa Ana. Calatayud),* ***Javier Eduardo Gallardo Ghisoli*** *(Ingeniero Electrónico. Madrid)*

Sénior

S-005. Cuestión de doses.

Resuelve y comprueba la ecuación: $2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}=2^2$

Donde $\lfloor x\rfloor$, $\lceil x\rceil$ y $\{x\}$ representan la parte entera por defecto, la parte entera por exceso y la parte decimal, respectivamente, del número real x

Solución

Recorriendo todo el espectro real tenemos:

- Caso I: $x\in\,]-\infty,-1[$

  Así: $x<-1$, $\lfloor x\rfloor\le -2$, $\lceil x\rceil\le 1$ y, siempre, $\{x\}<1$

  Como la exponencial de base 2 es una función estrictamente creciente:

  $2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}<2^{-1}+2^{-2}+2^{-1}+2^1=3'25<4=2^2$

  Luego, no hay soluciones en este intervalo.

- Caso II: $x=-1$ que, claramente, no es solución:

  $2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}=2^{-1}+2^{-1}+2^{-1}+2^0=2'5<4=2^2$

- Caso III: $x\in\,]-1,0[$

  Así: $\lfloor x\rfloor=-1$, $\lceil x\rceil=0$ y $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor=x-(-1)=x+1$

  $4=2^2=2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}=2^x+2^{-1}+2^0+2^{x+1}=3\cdot 2^x+3/2$

  $3\cdot 2^x=5/2 \quad \rightarrow \quad x=\log_2(5/6)$

  Solución que comprobamos debidamente:

  $x=\log_2(5/6) \quad \rightarrow \quad x+1=\log_2(5/6)+\log_2 2=\log_2(10/6)$

  $2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}=2^x+2^{-1}+2^0+2^{x+1}=\frac{5}{6}+\frac{3}{6}+\frac{6}{6}+\frac{10}{6}=4$

- Caso IV: $x=0$ que, claramente, también es solución:

  $2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}=2^0+2^0+2^0+2^0=4=2^2$

- Caso V: $x\in\,]0,1[$

  Así: $\lfloor x\rfloor=0$, $\lceil x\rceil=1$ y $\{x\}=x$

  $4=2^2=2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}=2^x+2^0+2^1+2^x=2\cdot 2^x+3$

  $2^{x+1}=1 \quad \rightarrow \quad x=-1$ que no está en el intervalo.

- Caso VI: $x=1$ que, claramente, no es solución:

  $2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}=2^1+2^1+2^1+2^1=8>4=2^2$

- Caso VII: $x\in\,]1,+\infty[$

  Así: $x\ge 1$, $\lfloor x\rfloor\ge 1$, $\lceil x\rceil\ge 2$ y, siempre, $\{x\}>0$

  De nuevo, por la monotonía de la exponencial de base 2:

  $2^x+2^{\lfloor x\rfloor}+2^{\lceil x\rceil}+2^{\{x\}}>2^1+2^1+2^2+2^0=9>4=2^2$

  Luego, tampoco hay soluciones en este intervalo.

En definitiva, la ecuación sólo tiene dos soluciones: $x=\log_2(5/6)$ y $x=0$

Solución de Alberto Castaño Domínguez (Universidad de Sevilla)

(Asumimos que la incógnita x *es un número real).*

- Supongamos en primer lugar que x es entero. En este caso x no tiene parte fraccionaria, es decir, $\{x\}=0$, con lo que $x=\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil$.

  Así, la ecuación tiene la forma: $3\cdot 2^x+1=2^2$, es decir, $2^x=1$ y, por tanto, $\underline{x=0}$, que efectivamente es una solución porque los cuatro sumandos del miembro de la izquierda de la ecuación del enunciado valen 1.

- Supongamos que x es un número real no entero y escribamos $x=m+y$ donde $m=\lfloor x\rfloor\in Z$ e $y=\{x\}\in]0,1[$.

  La ecuación propuesta quedaría ahora así: $2^m\cdot 2^y+2^m+2\cdot 2^m+2^y=2^2$ y la podemos transformar en: $2^y=\dfrac{4-3\cdot 2^m}{2^m+1}$

  El miembro de la izquierda es un número real en el intervalo $]1,2[$.

  Aplicando esa condición al miembro de la derecha, llegamos a que: $\dfrac{2}{5}<2^m<\dfrac{3}{4}$

  La única potencia entera de dos en ese intervalo es 2^{-1}, esto es, $m=-1$, con lo que $2^y=\dfrac{4-3\cdot 2^{-1}}{2^{-1}+1}=\dfrac{5}{3}\quad\rightarrow\quad y=\log_2(5/3)$

  Obtenemos por tanto una nueva solución: $\underline{x=-1+\log_2(5/3)}$, que también verifica la ecuación del enunciado, puesto que $\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{5}{3}=4$

  En conclusión, la ecuación tiene dos soluciones: $\underline{x=0}$ y $\underline{x=-1+\log_2(5/3)}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Andrés Manuel González Gallego*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Javier Badesa Pérez*** *(Colegio Santa Ana. Calatayud),* ***Isidre Puigmitjà Rodoreda*** *(PwC Deals. Barcelona),* ***Javier Suárez Labat*** *(Facultad de Matemáticas. US),* ***Javier Eduardo Gallardo Ghisoli*** *(Ingeniero Electrónico. Madrid),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(Investigador Postdoctoral. US),* ***Francisco Montiel Aguilera*** *(IES Manuel de Falla. Maracena)*

Se recibieron también seis soluciones incompletas.