Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Noviembre – 2020

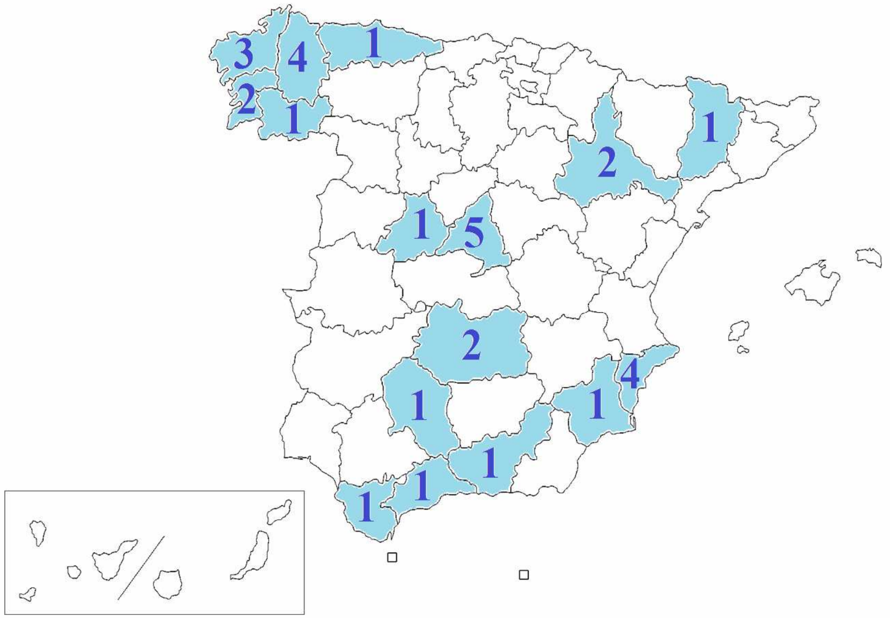
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
004	✓	✓	✓	✓	✓	✓
005	✓	✓	✓	✓	✓	✓
006	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

71 respuestas de 31 participantes (26 chicos / 5 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-006. En la misma línea.

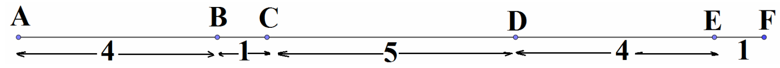
Los puntos A, B, C, D, E y F, no necesariamente en ese orden, están sobre una misma recta. Y además, sobre la longitud que les separan, se sabe que $AB = DE$ y $BC = EF$. De estas palabras, ¿podrías asegurar con rotundidad que $AC = DF$?

Si la respuesta es afirmativa, justifica que ocurre siempre, no sólo en el caso particular en el que hayas hecho un dibujo. Si la respuesta es negativa, si que basta con que nos muestres un único dibujo como contraejemplo.

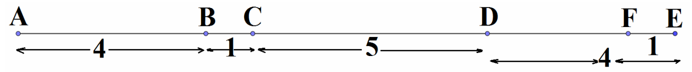
Solución

Puede, o no, cumplirse como podemos ver, siendo $AB = DE = 4$ y $BC = EF$, en los siguientes ejemplos:

I. Aquí, si: $AC = DF = 5$



II. Aquí, no: $AC = 5 \neq 3 = DF$



Bien resuelto por: ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Rubén Andreu Bon*** *(Madrid),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol)*

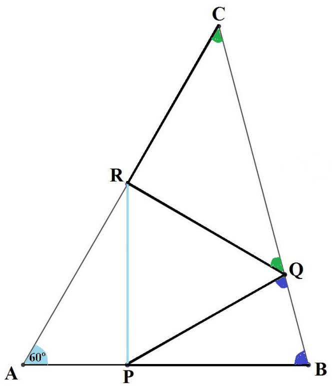
Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Infantil (1º/2º ESO)

I-006. Poligonal equilátera abierta.

ABC es un triángulo con $\angle A = 60°$. Señala los puntos **P**, **Q** y **R** sobre los lados **AB**, **BC** y **CA** respectivamente de forma que la línea poligonal abierta **BPQRC** sea equilátera, esto es que todos sus segmentos sean de igual longitud y, además, que $AR = 2 \cdot AP$. ¿Qué medirán los otros ángulos $\angle B$ y $\angle C$ del triángulo?

Solución



- Como **ABC** es un triángulo con $\angle A = 60°$, $\angle B + \angle C = 120°$
- Como la poligonal **BPQRC** es equilátera, los triángulos: **BPQ**, **PQR** y **QRC** son isósceles.

  BPQ isósceles $\rightarrow$ $\angle B = \angle PQB$ y

  QRC isósceles $\rightarrow$ $\angle C = \angle CQR$

  Sumando $\angle B + \angle C = 120° = \angle PQB + \angle CQR$ y, así, en el punto **Q**. el ángulo que falta para el llano es: $\angle PQR = 180° - 120° = 60°$

  Luego el triángulo **PQR**, además de isósceles, es equilátero.

- Y, finalmente, como $\angle A = 60°$ y $AR = 2 \cdot AP$, el triángulo **APR** es claramente un cartabón, medio triángulo equilátero o, lo que es lo mismo, un triángulo rectángulo de ángulos $30° : 60° : 90°$

  $\angle ARP + \angle PRQ = 30° + 60° = 90$ $\rightarrow$ $\angle QRC = 90°$ para completar el llano en **R**. Así **QRC**, además de ser isósceles, es también rectángulo. Luego $\underline{\angle C = 45°}$ y, en consecuencia, $\underline{\angle B = 75°}$

Bien resuelto por: ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Raúl Orellana Mateo*** *(IES Almoraima. Castellar de la Frontera),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Rubén Andreu Bon*** *(Madrid),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol)*

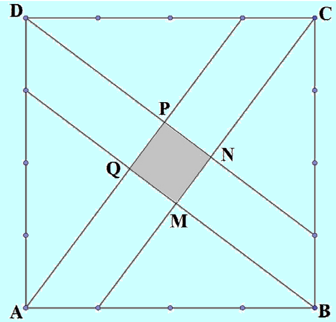
Se recibió también una solución incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

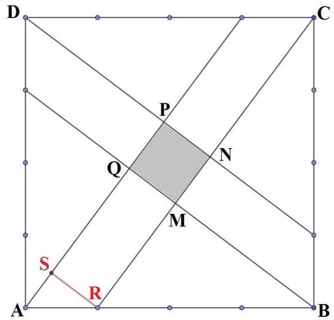
C-006. Cuadrado emenepecú.

Sea el cuadrado **ABCD** de lado **10 cm**.

Determina el valor del área de **MNPQ**.



Solución



Llamemos **R** al punto que señala el primer cuarto del lado **AB**. Así, viendo la figura, **RBC** es claramente un triángulo rectángulo pitagórico de proporciones:

$RB : BC : CR \equiv 3 : 4 : 5$ u.d.l. (2'5 cm)

Y **S** al punto del segmento **AP**, o **AQ**, que corta su perpendicular por **R**.

Todos los triángulos rectángulos de la figura son semejantes a este **RBC**, esto es, de proporciones $3 : 4 : 5$.

En particular **ASR**, con $AR = 2'5$ cm. Por tanto: $AS : SR : AR \equiv 1'5 : 2 : 2'5$ cm

Y, como $SR = QM = 2$, el área pedida será: $\underline{S_{MNPQ}} = QM^2 = \underline{4}$ cm²

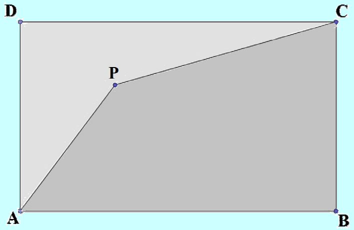
Bien resuelto por: ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Noa Salinas González*** *(E4-IES Isaac Díaz Prada. Sada),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(IES Carballeira. Ourense),* ***Lucía Herráiz Cano*** *(Colegio Los Sauces. Torrelodones),* ***Mario Balda Agudo*** *(Ave María de la Quinta. Granada),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Diego González Lozano*** *(IES Gredos. Piedrahita),* ***Rubén Andreu Bon*** *(Madrid),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Talea*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Hada Galán Lamas*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Arnau Carracedo*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Jv-006. Partición en cuadriláteros de un rectángulo.

$ABCD$ es un rectángulo y queremos situar un punto P en su interior de modo que el área del cuadrilátero $ABCP$ sea n veces más que la del cuadrilátero $ADCP$.

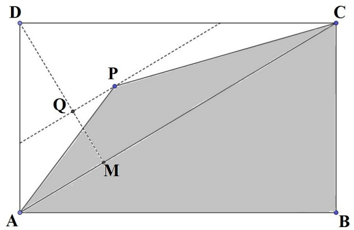
- ¿Dónde debe estar P?
- ¿Qué cuadrilátero tiene mayor perímetro?



Solución

Trazamos la diagonal AC, y llamando a el área del rectángulo y x a la del triángulo APC, tenemos la condición:

$$\frac{a}{2}+x=n\left(\frac{a}{2}-x\right) \rightarrow x=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{a}{2}$$



Como los triángulos ACD y ACP comparten la base AC, basta que sus respectivas alturas verifiquen la misma relación anterior entre sus áreas.

Para ubicar el punto P puede hacerse la construcción que se muestra en la figura:

- Se traza la altura AM y se divide por Q de modo que. $\frac{QM}{DM}=\frac{n-1}{n+1}=\frac{x}{a/2}$
- La paralela por Q a AC determina un segmento interior al rectángulo en el que podemos colocar P verificando la condición del enunciado.

La respuesta a la segunda pregunta es trivial: los perímetros son iguales ya que comparten dos lados y los otros dos son iguales

*Bien resuelto por: **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell), **Hugo Lladró Prats** (IES Francisco Figueras Pacheco. Alicante), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Manuel Vázquez Mourazos** (Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol), **Rubén Andreu Bon** (Madrid), **Javier Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud)*

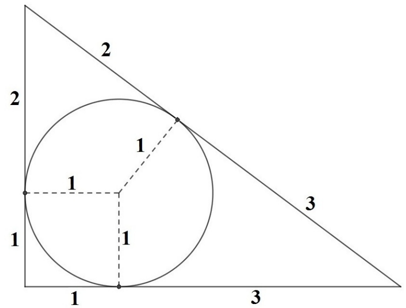
Se recibieron también cuatro soluciones incompletas.

Jn-006. Circunferencia inscrita a un triángulo pitagórico.

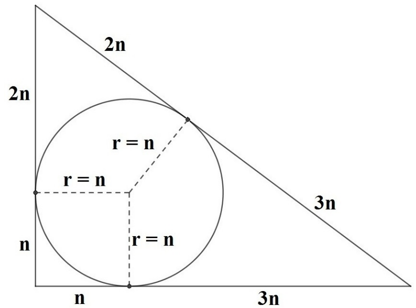
Demostrar que cualquier número natural puede ser el radio de la circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo pitagórico, esto es, de lados enteros.

Solución

El gráfico inferior muestra claramente que el radio de la circunferencia inscrita al conocido triángulo pitagórico de lados 3, 4 y 5 mide 1 u.d.l.



Por semejanza, los triángulos pitagóricos de lados $3n$, $4n$ y $5n$ tendrán de radio de su circunferencia inscrita el valor n natural (ó no) que se desee.



*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (IES Ruiz de Alda. San Javier), **Ignacio Larrosa Cañestro** (IES Rafael Dieste. A Coruña), **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES Carballeira. Ourense), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Raúl Agulló Pardo** (IES La Melva. Elda), **Manuel Vázquez Mourazos** (Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol), **Javier Eduardo Gallardo Ghisoli** (Madrid) **Rubén Andreu Bon** (Madrid), **Javier Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud)*

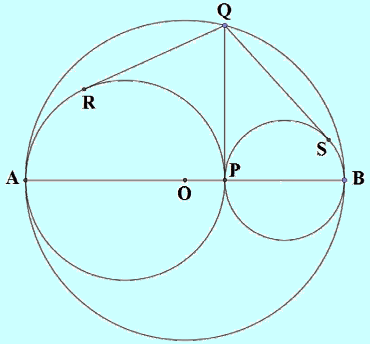
Se recibieron también tres soluciones incompletas.

Sénior

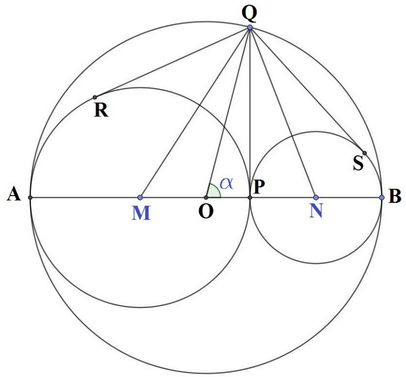
S-006. Minimizando el ángulo de tangencia.

Sea **P** un punto variable en el diámetro **AB** de una circunferencia dada. Se trazan dos circunferencias de diámetros **AP** y **PB**. **PQ** es la tangente común y, **QR** y **QS**, las otras tangentes desde **Q**.

Hallar el valor mínimo del ángulo $\angle RQS$.



Solución



O es el punto medio de **AB**, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el radio **OB** vale **1** u.d.l.

Si **M**, **N** son los centros de las circunferencias de diámetros **AP** y **PB** $\angle RQS = 2 \cdot \angle MQN$, entonces buscaremos el mínimo de $\angle MQN$.

Si $\alpha = \angle QOB$, claramente

$$OP = \cos\alpha \quad \text{y} \quad PQ = \sin\alpha$$

$$2 \cdot MP = AP = AO + OP = 1 + \cos\alpha$$

$$2 \cdot NP = PB = OB - OP = 1 - \cos\alpha$$

En el triángulo **QMN**:

$$Q = 180° - (M + N) \quad \rightarrow \quad \tan Q = -\tan(M+N) = \frac{\tan M + \tan N}{\tan M \cdot \tan N - 1}$$

Tenemos: $\tan M = \dfrac{PQ}{MP} = \dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ y $\tan N = \dfrac{PQ}{NP} = \dfrac{2\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

Luego: $\tan M \cdot \tan N = 4$

$$\tan M + \tan N = 2\sin\alpha\left(\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}\right) = \frac{4\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha}$$

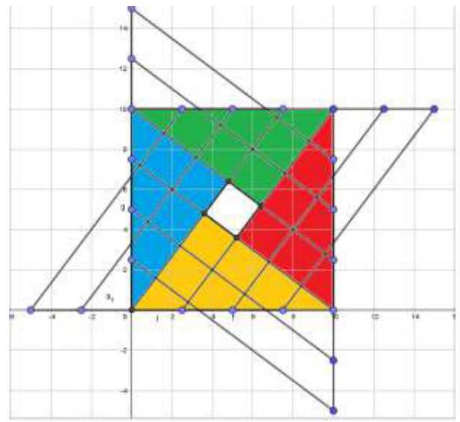
Sustituyendo queda: $\tan Q = \dfrac{4/\sin\alpha}{4-1} = \dfrac{4}{3\sin\alpha}$ que será mínimo cuando $\sin\alpha = 1$, esto es, cuando el triángulo **MQN** es isósceles

La tangente del ángulo **Q** mínimo pedido es $4/3$, el ángulo es $\operatorname{ar\,tan}(4/3) \cong 53{,}13°$ y el ángulo buscado mínimo será $\underline{\angle RQS \cong 106{,}26° \cong 106°\,15'\,36{,}7''}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Manuel Amorós Juan*** *(IES Navarro Santafé. Villena),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Raúl Agulló Pardo*** *(IES La Melva. Elda),* ***José Manuel Benedí Cortés*** *(Zaragoza),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Javier Eduardo Gallardo Ghisoli*** *(Madrid)* ***Rubén Andreu Bon*** *(Madrid),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

A punto de cerrar nos llegó esta bonita solución al problema C-006 de **Hada Galán** y **Arnau Carracedo**, dos alumnos de 3º de ESO de la Escuela Waldorf Meniñeiros.



$$10^2 = 4 \cdot \frac{3\ell \cdot 4\ell}{2} + \ell^2 = 25\ell^2 \quad \rightarrow \quad \ell^2 = 4$$

¡Guau!

Y si te das cuenta, para hallar el área de cada triángulo coloreado basta ver que lo forman tres cuadrados completos y tres partidos que se pueden completar con los tres trocitos en forma de triángulo rectángulo del mismo color