Real Sociedad Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Diciembre – 2020

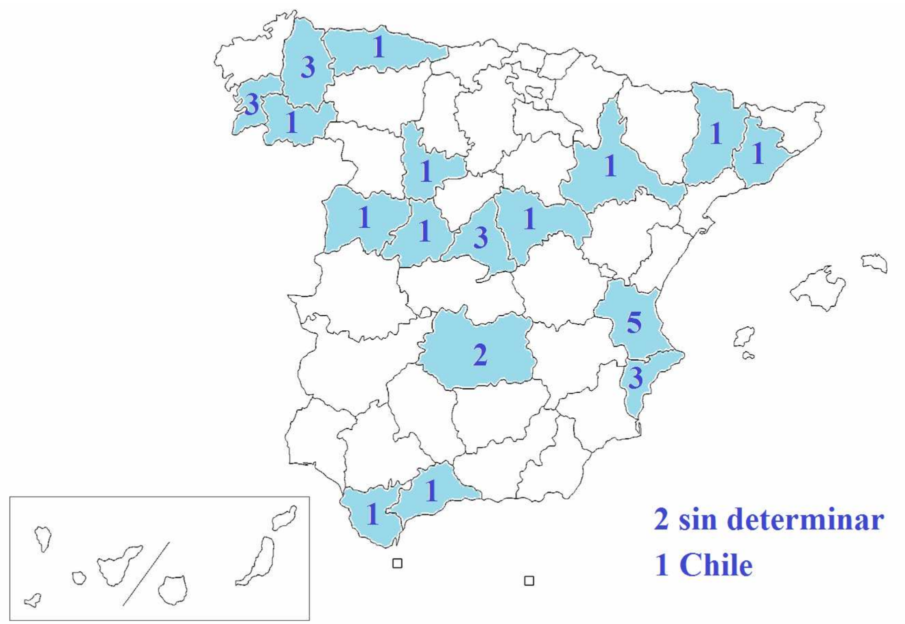
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
004	✓	✓	✓	✓	✓	✓
005	✓	✓	✓	✓	✓	✓
006	✓	✓	✓	✓	✓	✓
007	✓		✓		✓	

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

48 respuestas de 33 participantes (29 chicos /4 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria) / Infantil (1º/2º ESO)

A-007 / I-007. De 20 a 21.

Dado un número natural, en cada movimiento puedes, bien multiplicar por dos, o bien suprimir la cifra de las unidades. ¿Podrás pasar así de 20 a 21? Si es que sí, di cómo y si es que no, indica el porqué.

Solución

Sí, si es posible. Por ejemplo: suprimiendo el 0, multiplicando por dos 30 veces seguidas y, luego, suprimiendo la cifra de las unidades 8 veces seguidas.

$$2\cancel{0} \;\rightarrow\; 2^2=4 \;\rightarrow\; 2^3=8 \;\rightarrow\; \ldots\ldots \;\rightarrow\; 2^{31}=21\cancel{47483648} \;\rightarrow\; 21$$

O, lo que es lo mismo: duplicando 30 veces seguidas y suprimiendo las unidades 9 veces seguidas

$$20=2^2\cdot 5 \;\rightarrow\; 40=2^3\cdot 5 \;\rightarrow\; \ldots\ldots \;\rightarrow\; 2^{32}\cdot 5=21\cancel{474836480} \;\rightarrow\; 21$$

*Bien resuelto por: **Helena Vargas Vicente** (IES Adolfo Suárez. Paracuellos del Jarama), **Isaac Llort Pradas** (IES Adolfo Suárez. Paracuellos del Jarama), **Raúl Orellana Mateo** (IES Almoraima. Castellar de la Frontera), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Samuel Abreu Prado** (Orense), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella), **Iván López Márquez** (C.I. Jesuitas. Alicante), **Jorge Lafuente Gil** (S. Juan Bosco. Valencia), **Ada Magali Goyanes López** (E. Waldorf-Meniñeiros. Friol), **Antonio González Montalbán** (IES Francisco de Quevedo. Villnueva de los Infantes), **Diego González Lozano** (IES Gredos. Piedrahita), **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Javier Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud) y **Arnau Carracedo** (E. Waldorf-Meniñeiros. Friol)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

C-007 / Jv-007. Partidillos de fútbol 7.

En clase de Educación Física la profesora distribuye a los 14 alumnos de 4º C en dos equipos de 7 para jugar partidos rápidos de *fútbol-7*. Gana el partido quien mete el primer gol y en cada partido se cambian los componentes de los dos equipos. Hoy se han podido jugar tres partidos completos y, qué curioso, ningún jugador estuvo tres veces en el equipo perdedor. Demuestra que hubo al menos tres jugadores que siempre estuvieron en el mismo equipo en los tres partidos.

Solución

El resultado de cada alumno se puede codificar con la letra G cuando estuvo en el equipo ganador y con la letra P cuando estuvo en el equipo perdedor. Así su actuación sería una de estas siete secuencias: GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG (no hay PPP porque ninguno estuvo las tres veces en el equipo perdedor).

Si cada una de estas secuencias correspondiera exactamente a dos alumnos, la suma de partidos ganados sería 24 y la de partidos perdidos 18. Lo cuál es absurdo, pues ambos números deben coincidir. Por lo tanto, debe haber al menos tres alumnos con la misma secuencia de resultados. Y de esto se concluye que, al menos, esos tres alumnos estuvieron en el mismo equipo en los tres partidos.

*Bien resuelto por: **Samuel Abreu Prado** (Orense), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Sergio García Canes** (C.I. Jesuitas. Alicante), **Víctor Zapatero** (UVigo), **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella) y **Javier Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud)*

Se recibieron también cuatro soluciones incompletas y dos incorrectas.

Jn-007 / S-007. Cara cara.

Pelayo lanza una moneda hasta que consigue salir cara (la probabilidad de sacar cara es p). A continuación, Quintín lanza otra moneda hasta conseguir sacar también cara (la probabilidad de sacar cara es $q \neq p$). ¿Qué probabilidad hay de que las monedas se hayan tenido que lanzar, entre ambos, un total de n veces? ¿Cuál será la probabilidad si $p = q$?

Solución

Sea X la variable aleatoria que indican el número de lanzamientos que requiere Pelayo hasta conseguir cara e Y la variable aleatoria que indica el número de lanzamientos que requiere Quintín hasta conseguir cara. Tenemos así, claramente, dos variables aleatorias geométricas independientes: $X \sim G(p)$ e $Y \sim G(q)$, con:

$$P(X=j) = (1-p)^{j-1}p, \quad j = 1,2,\ldots \qquad P(Y=k) = (1-q)^{k-1}q, \quad k = 1,2,\ldots$$

Y se nos pide: $P(X+Y=n)$ y, obviamente, $n \geq 2$

$$P(X+Y=n) = \sum_{t=1}^{n-1} P(X=t,\ Y=n-t) = \sum_{t=1}^{n-1} P(X=t)\cdot P(Y=n-t) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n-1}(1-p)^{t-1}p\cdot(1-q)^{n-t-1}q = p\cdot q\cdot\sum_{t=1}^{n-1}(1-p)^{t-1}(1-q)^{n-t-1} =$$

$$= p\cdot q\cdot\sum_{t=1}^{n-1}(1-p)^{t-1}(1-q)^{n-2-(t-1)} = p\cdot q\cdot(1-q)^{n-2}\cdot\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{t-1}$$

Haciendo $t-1=i$ y sumando la progresión geométrica:

$$P(X+Y=n) = p\cdot q\cdot(1-q)^{n-2}\cdot\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{i} = p\cdot q\cdot(1-q)^{n-2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-1}}{1-\frac{1-p}{1-q}} =$$

$$= p\cdot q\cdot(1-q)^{n-2}\cdot\frac{\frac{(1-q)^{n-1}-(1-p)^{n-1}}{(1-q)^{n-1}}}{\frac{p-q}{1-q}} = \frac{p\cdot q}{p-q}\cdot\left[(1-q)^{n-1}-(1-p)^{n-1}\right]$$

Bonita expresión:

$$P(X+Y=n) = \frac{p\cdot q}{p-q}\cdot\left[(1-q)^{n-1}-(1-p)^{n-1}\right]$$

Y de la expresión intermedia: $P(X+Y=n)=p\cdot q\cdot(1-q)^{n-2}\cdot\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{t-1}$ podemos deducir que, en el caso de que $p=q$, la probabilidad será:

$$\underline{P(X+Y=n)=(n-1)\cdot p^2(1-p)^{n-2}}$$

Bien resuelto por: ***Manuel Amorós Juan*** *(IES Navarro Santafé. Villena),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Samuel Abreu Prado*** *(Orense),* ***César Catalán Capaccioni*** *(Valencia),* ***Andrés M. González Gallego*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes) y* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud)*

Plantean bien el sumatorio sin reducirlo: ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Raquel Melgar Fernández*** *(Valladolid),* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de la Palma. Salamanca),* ***Asunción Vázquez Méndez*** *(Data Scientist. Asturias),* ***Víctor Zapatero Castrillo*** *(UVigo),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(E Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Manuel Español Salvador*** *(Barcelona) y* ***Samuel Campos Cid*** *(Santiago de Chile)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.