Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Enero – 2021

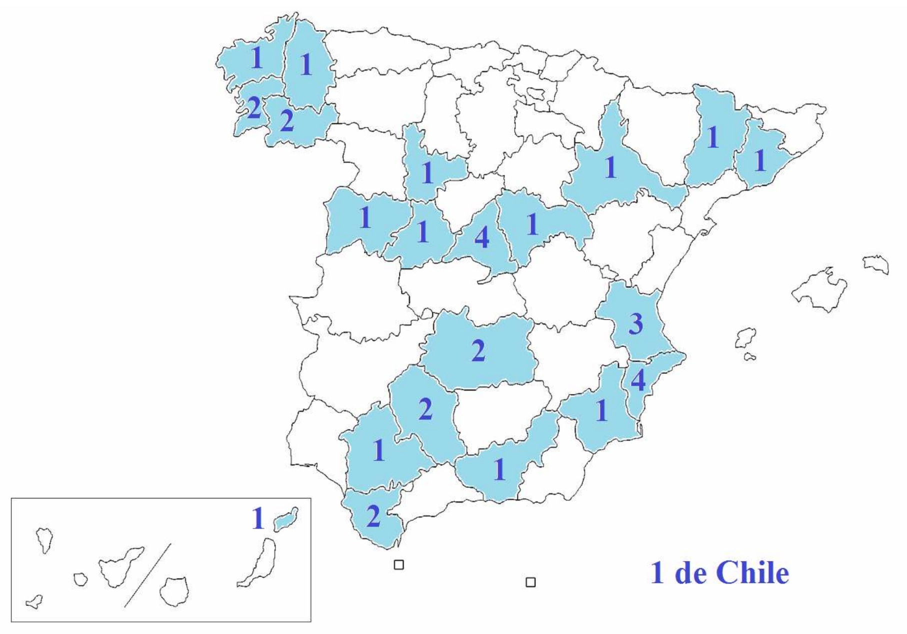
Soluciones oficiales

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
008	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

75 respuestas de 35 participantes (34 chicos / 1 chica)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-008. Veinte veintiuno.

¿Cuántos números menores de 2021 acaban en 21?

¿Cuántos números menores de 2021 llevan 21 en su expresión?

Solución

En el primer caso, se trata de números de la forma __21 donde en el primer lugar podemos colocar sólo el 0 ó el 1, dos posibilidades y, en el segundo lugar cualquier cifra del 0 al 9, diez posibilidades. Por tanto, son $2\times 10=\underline{20}$ los números menores de 2021 que acaban en 21.

En el segundo caso hemos de contar los veinte anteriores de la forma __21 y otros veinte de la forma _21_ (también porque en la primera posición podemos colocar sólo el 0 ó el 1 y, en el segundo lugar cualquier cifra del 0 al 9): total <u>40</u>.

Como ves, no era preciso ponerlos todos para saber cuántos había. No obstante, helos aquí:

0021	1021		0210	1210
0121	1121		0211	1211
0221	1221		0212	1212
0321	1321		0213	1213
0421	1421		0214	1214
0521	1521		0215	1215
0621	1621		0216	1216
0721	1721		0217	1217
0821	1821		0218	1218
0921	1921		0219	1219

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Samuel Abreu Prado** (Orense), **Iván López Márquez** (6º de Primaria. Colegio Inmaculada. Alicante), **Víctor Zapatero Castrillo** (UVigo), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Raúl Orellana Mateo** (IES Almoraima. Castellar de la Frontera), **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena)*

Infantil (1º/2º ESO)

I-008. Fracciones encadenadas.

Si la fracción $\dfrac{7}{18}=\dfrac{1}{a+\dfrac{2}{b+\dfrac{3}{c}}}$, ¿qué fracción irreducible representa $\dfrac{a}{1+\dfrac{b}{2+\dfrac{c}{3}}}$?

Solución

Manipulando la fracción hábilmente:

$$\frac{7}{18}=\frac{1}{2+\frac{4}{7}}=\frac{1}{2+\frac{2}{2+\frac{3}{2}}} \quad \rightarrow \quad a=b=c=2$$

Y, así:

$$\frac{a}{1+\frac{b}{2+\frac{c}{3}}}=\frac{2}{1+\frac{2}{2+\frac{2}{3}}}=\frac{2}{1+\frac{6}{6+2}}=\frac{2}{1+\frac{3}{4}}=\frac{8}{4+3}=\underline{\frac{8}{7}}$$

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Samuel Abreu Prado** (Orense), **Víctor Zapatero Castrillo** (UVigo), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

C-008. Raíz cuadrada de un número enorme

Dado este enorme número $n=1+2+2^2+2^3+...+2^{2020}+2^{2021}$, ¿qué valdrá exactamente $\sqrt{n+2\sqrt{n+1}+2}$?, sin duda, también otro número enorme.

Solución

Ya sabes sumar progresiones geométricas:

$n=1+2+2^2+2^3+...+2^{2020}+2^{2021}$ y $2n=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{2021}+2^{2022}$

Restando: $n=2^{2022}-1 \quad \rightarrow \quad n+1=2^{2022}$

Y ya es fácil calcular que el valor del enorme número: $\underline{\sqrt{n+2\sqrt{n+1}+2}=2^{2011}+1}$

$$\sqrt{n+2\sqrt{n+1}+2}=\sqrt{2^{2022}-1+2\sqrt{2^{2022}}+2}=$$
$$=\sqrt{2^{2022}+2\cdot 2^{2011}+1}=\sqrt{(2^{2011}+1)^2}=2^{2011}+1$$

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Samuel Abreu Prado** (Orense), **Sergio García Canes** (C.I. Jesuitas. Alicante), **Víctor Zapatero Castrillo** (UVigo), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid), **Marcos Monteagudo García** (IES Uno. Requena), **Diego González Lozano** (IES Gredos. Piedrahita), **Mario Balda Agudo** (Colegio Ave Mª de la Quinta. Granada), **Samuel Orellana Mateo** (IES Almoraima. Castellar de la Frontera)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-008. Desayuno en el instituto.

Antes de la crisis, en el bar del instituto, un café y dos magdalenas nos costaban un euro. Después los precios subieron, y con el euro sólo nos alcanzaba para un café y una magdalena. Más tarde, los precios volvieron a subir en el mismo porcentaje que la vez anterior. ¿Será posible ahora por un euro tomarse por lo menos un café?

Solución

Sea c el precio del café, m el de una magdalena y p el porcentaje de subida que sufrieron los precios en las dos ocasiones.

Antes de la crisis: $c+2m=1$

1ª subida de precios: $p\cdot(c+m)\le 1$

2ª subida de precios: $p^2\cdot c :: 1$ comparación que queremos hacer

$$p\cdot(c+m)\le 1 \quad \rightarrow \quad p\cdot\left(c+\frac{1-c}{2}\right)\le 1 \quad \rightarrow \quad p\cdot\frac{c+1}{2}\le 1 \quad \rightarrow \quad p\le\frac{2}{c+1}$$

$p^2\cdot c\le\left(\frac{2}{c+1}\right)^2\cdot c=\frac{4c}{(c+1)^2}\le 1$ desigualdad es cierta, esta última, debido a la reversibilidad de estas certeras expresiones: $4c\le(c+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0\le(c-1)^2$

Luego $\underline{p^2\cdot c\le 1}$, esto es, con un euro nos llega para un café.

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Manuel Vázquez Mourazos** (EWaldorf. Meniñeiros. Friol), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Víctor Zapatero Castrillo** (UVigo), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud)*

Se recibieron también cinco soluciones incompletas y tres incorrectas.

Júnior

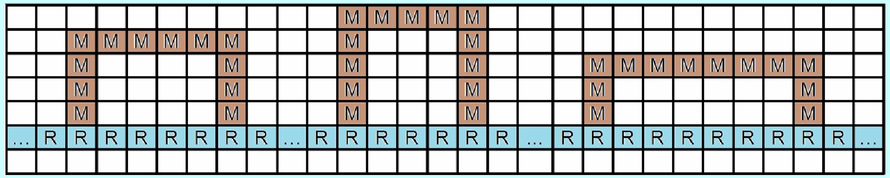
Jn-008. Ciudades amuralladas.

En un juego de construir ciudades tenemos que colocar en un tablero cuadriculado de dimensiones suficientemente grandes una ciudad rectangular y rodearla de murallas en tres de sus cuatro lados, pues el cuarto lado es un río rectilíneo.

Nuestro objetivo es amurallar una ciudad de, al menos, 2021 casillas de área gastando la menor cantidad posible de cuadraditos de muralla. ¿Cuál es la forma óptima que debe tener el rectángulo rodeado de murallas y río para cumplir este objetivo? Justifica debidamente tu respuesta.

Notas aclaratorias:

- *La anchura y altura del rectángulo deben ser dos enteros a, b verificando a·b≥2021 (no tiene por qué ser el área exactamente 2021, nos sirve cualquier rectángulo de dimensiones enteras donde quepan dentro 2021 o más casillas).*
- *Por ejemplo, como se ve en la figura, para amurallar una ciudad de área 12, algunas posibilidades podrían ser las siguientes:*



R = río   M = muralla

- *Si organizamos la ciudad como un rectángulo de 3×4, apoyando un lado de longitud 4 sobre el río, se requieren 12 cuadraditos de muralla.*
- *Si la ciudad es 4×3 con un lado de longitud 3 sobre el río, son precisos 13 cuadraditos de muralla.*
- *Si disponemos la ciudad en la forma 2×6, se necesitan 12 casillas de muralla.*

<u>Soluciones</u>

Si construimos la ciudad como un rectángulo $a\times b$, (el lado de longitud b a lo largo del río), entonces para rodear la muralla son precisos dos flancos de $a+1$ casillas y un trozo de b casillas ocupadas por murallas, en total $2a+b+2$ casillas. Por lo tanto, debemos hacer mínima la cantidad $2a+b+2$, con las restricciones de ser a y b enteros positivos y $a\cdot b\geq 2021$.

Nótese que los números $2a$ y b tienen media geométrica acotada inferiormente, ya que $\sqrt{2a\cdot b}\geq\sqrt{2\cdot 2021}$ y utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica (MA-MG) se tiene que:

$$2a+b+2\geq 2\cdot\sqrt{2a\cdot b}+2\geq 2\cdot\sqrt{4042}+2\approx 129{,}153$$

Al ser a y b enteros positivos, debe cumplirse que $2a+b+2\geq 130$. Y la igualdad se da cuando los números $2a$ y b son iguales, es decir, cuando b es el doble de a.

En nuestro caso la igualdad no será posible, pues $2a^2=2021$ no tiene soluciones enteras (se obtiene $a\approx 31.79$). Sin embargo, hay varias formas de elegir a y b, con a cercano a 32 y b cercano a 64 que proporcionan ciudades óptimas con perímetro amurallado de 130 casillas. Concretamente, si para cada a entre 29 y 35 elegimos el menor b tal que $a\cdot b\geq 2021$, se obtiene una ciudad válida:

a	b	$a\cdot b$	$2a+b+2$
29	70	2030	130
30	68	2040	130
31	66	2046	130
32	64	2048	130
33	62	2046	130
34	60	2040	130
35	58	2030	130

Como hemos visto que la cota 130 no es mejorable, cualquiera de las parejas (a,b) de la tabla anterior vale como ciudad óptima.

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Víctor Zapatero Castrillo** (UVigo), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada)*

Se recibieron también ocho soluciones incompletas y dos incorrectas.

Sénior

S-008. Bajos restos.

Probar que el resto al dividir x^{2^n} entre 2^{n+2} nunca es mayor que 1 para todo x entero, n natural, $n\geq 2$

<u>Solución</u>

Procederemos por inducción sobre n.

Caso base para <u>$n=2$</u>:

Queremos ver que, dado cualquier x entero, se cumple que $x^4\equiv 0 \bmod 16$ ó que $x^4\equiv 1 \bmod 16$

- Si x es par: $x=2k$ con $k\in Z$

  Tenemos: $x^4=2^4x^4=16k^4\equiv 0 \bmod 16$

- Si x es impar: $x = 2k + 1$ con $k \in Z$, tenemos los siguientes casos:

$x \equiv 1 \mod 16 \quad \Rightarrow \quad x^4 \equiv 1 \mod 16$

$x \equiv 3 \mod 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 \equiv 9 \mod 16 \rightarrow x^3 \equiv 27 \equiv 11 \mod 16 \rightarrow$
$x^4 \equiv 33 \equiv 1 \mod 16$

$x \equiv 5 \mod 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 \equiv 25 \equiv 9 \mod 16 \rightarrow x^3 \equiv 45 \equiv 13 \mod 16 \rightarrow$
$x^4 \equiv 65 \equiv 1 \mod 16$

$x \equiv 7 \mod 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 \equiv 49 \equiv 1 \mod 16 \rightarrow x^3 \equiv 7 \mod 16 \rightarrow$
$x^4 \equiv 49 \equiv 1 \mod 16$

Para la segunda mitad de casos que faltan, podemos escribir las congruencias negativas (es decir, si $x \equiv 9 \mod 16$, escribimos $x \equiv -7 \mod 16$, etc.) y como el exponente es par, se van a anular los signos negativos y dar los mismos resultados que en la primera mitad.

Con esto queda probado el caso base para $\underline{n = 2}$

Paso inductivo:

Queremos ver que, dado cualquier $x \in Z$, si $x^{2^n} \equiv 0 \mod 2^{n+2}$ ó $x^{2^n} \equiv 1 \mod 2^{n+2}$, entonces se cumple que $x^{2^{n+1}} \equiv 0 \mod 2^{n+3}$ ó $x^{2^{n+1}} \equiv 1 \mod 2^{n+3}$

Dado que las únicas congruencias posibles son 0 y 1, y que el módulo es siempre par, podemos deducir que será congruente a 0, si x es par, y congruente a 1, si x es impar.

- Si x es par, hemos de probar:

Si $x^{2^n} \equiv 0 \mod 2^{n+2}$, entonces $x^{2^{n+1}} \equiv 0 \mod 2^{n+3}$

Tenemos $x^{2^n} \equiv 0 \mod 2^{n+2} \rightarrow x^{2^{n+1}} = \left(x^{2^n}\right)^2 \equiv 0 \mod 2^{n+3}$

Así, haciendo uso de una conocida propiedad de ampliación de módulos sobre congruencias*, al aplicar módulo 2^{n+3} tenemos dos casos:

a) El caso trivial: $x^{2^n} \equiv 0 \mod 2^{n+3} \rightarrow \left(x^{2^n}\right)^2 \equiv 0 \mod 2^{n+3}$

b) El caso $x^{2^n} \equiv 2^{n+2} \mod 2^{n+3} \rightarrow \left(x^{2^n}\right)^2 \equiv \left(2^{n+2}\right)^2 \equiv 2^{n+3} \equiv 0 \mod 2^{n+3}$

Con esto queda probado que la hipótesis de inducción es cierta si x es par.

- Si x es impar, hemos de probar:

Si $x^{2^n} \equiv 1 \mod 2^{n+2}$, entonces $x^{2^{n+1}} \equiv 1 \mod 2^{n+3}$

a) El caso trivial: $x^{2^n} \equiv 1 \mod 2^{n+3} \rightarrow \left(x^{2^n}\right)^2 \equiv 1 \mod 2^{n+3}$

b) El caso $x^{2^n} \equiv 2^{n+2} + 1 \mod 2^{n+3} \rightarrow$

$$\left(x^{2^n}\right)^2 \equiv \left(2^{n+2} + 1\right)^2 \equiv \left(2^{n+2}\right)^2 + 2 \cdot 2^{n+2} + 1 \equiv 2^{n+3} + 2^{n+3} + 1 \equiv$$
$$\equiv 2 \cdot 2^{n+3} + 1 \equiv 1 \quad \mod 2^{n+3}$$

Con esto queda probado que la hipótesis de inducción es cierta si x es impar.

Así, hemos finalizado el proceso de inducción y probado lo que se nos pedía

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. S. Javier),* ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***Andrés M. González Gallego*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Manuel Amorós Juan*** *(IES Navarro Santafé. Villena),* ***César Catalán Capaccioni*** *(Valencia),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Manuel Español*** *(Barcelona),* ***Pedro Sempere Valdés*** *(IES Mare Nostrum. Alicante),* ***Víctor Zapatero Castrillo*** *(UVigo),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Samuel Campos Cid*** *(Santiago de Chile),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(US)*

Se recibieron también una solucion incompleta y otra incorrecta.

* Si $a \equiv b \mod m$ y $n \in N$, existe $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ / $a \equiv b + k \cdot m \mod (n \cdot m)$