Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Marzo – 2021

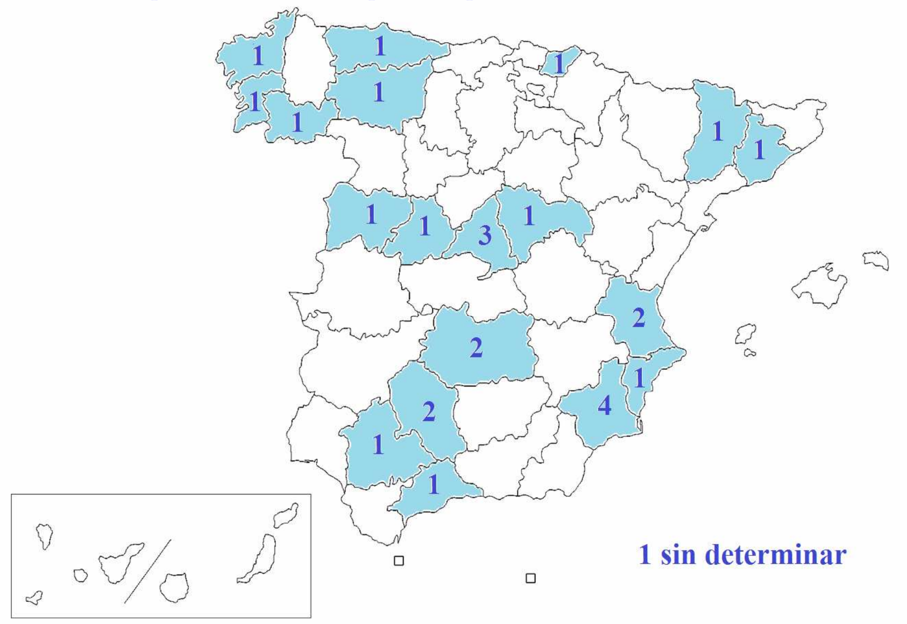
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
008	✓	✓	✓	✓	✓	✓
009	✓	✓	✓	✓	✓	✓
010	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

57 respuestas de 28 participantes (23 chicos / 5 chicas)

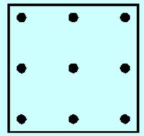


Alevín (5º/6º Primaria)

A-010. Visualizar y Contar.

¿Cuántos triángulos con vértices en los nodos de este clavijero, también conocido como *geoplano*, 3×3 podrías ver?

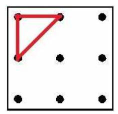
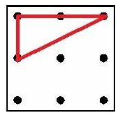
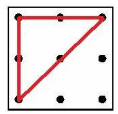
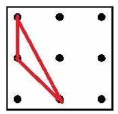
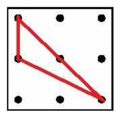
Resume en estas dos tablas cuántos hay de cada tipo.

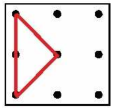
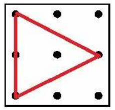
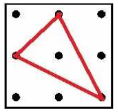


En función de sus ángulos				En función de sus lados		
Acutángulos	Rectángulos	Obtusángulos		Equiláteros	Isósceles	Escalenos

Solución

Aunque los mayores sabrán contar los triángulos sin dibujarlos previamente, aquí se pretende que los visualices e indiques cuántos hay de cada tipo. Estas tablas resumen, sin duda, los resultados de tu investigación en función de los lados que con longitud entera tenga cada uno, vistos tanto de forma horizontal como vertical.

Nº de lados de longitud entera		Ejemplo	Tipo	Cantidad
Dos	1 y 1		Rectángulos e Isósceles	16
	1 y 2		Rectángulos y Escalenos	16
	2 y 2		Rectángulos e Isósceles	4
Uno	1		Obtusángulos y Escalenos	16
			Obtusángulos y Escalenos	8

Uno	2		Rectángulos e Isósceles	8
			Acutángulos e Isósceles	4
Ninguno	-		Acutángulos e Isósceles	4
			TOTAL:	76

En resumen, respondiendo a la cuestión planteada:

En función de sus lados		
Acutángulos	Rectángulos	Obtusángulos
8	44	24

En función de sus ángulos		
Equiláteros	Isósceles	Escalenos
0	36	40

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Ana Juárez Sáez** (IES Jiménez de la Espada Cartagena), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Ignacio Larrosa Cañestro** (IES Rafael Dieste. A Coruña), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada).*

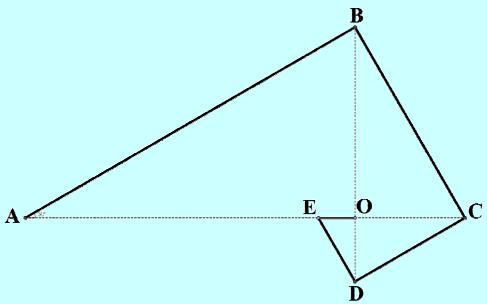
Se recibió también una solución incompleta.

Infantil (1º/2º ESO)

I-010. Poligonal ortogonal.

Calcula la longitud de la poligonal OA si las rectas AB, BC, CD y DE son perpendiculares unas a otras y, además:

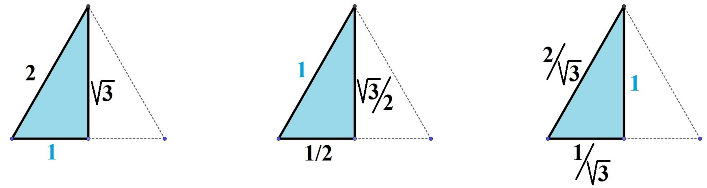
$$OE = 1 \text{ y } \angle OAB = 30^\circ$$



Solución

Todos los triángulos rectángulos que se ven en la figura son cartabones (medios triángulos equiláteros), esto es, triángulos notables con ángulos de $30^\circ : 60^\circ : 90^\circ$ y, como bien debes saber, lados proporcionales, según en el que fijemos la unidad de longitud, a:

Cateto menor Cateto mayor Hipotenusa



Así pues, fijándonos, por ejemplo, siempre en el cateto menor de un determinado cartabón de la poligonal, obtendremos, la hipotenusa, duplicándolo y, el cateto mayor, multiplicándolo por $\sqrt{3}$:

$OE = 1$ cateto menor de $OED \xrightarrow{\times 2}$ su hipotenusa será $ED = 2$

$ED = 2$ cateto menor de $EDC \xrightarrow{\times\sqrt{3}}$ su cateto mayor será $DC = 2\sqrt{3}$

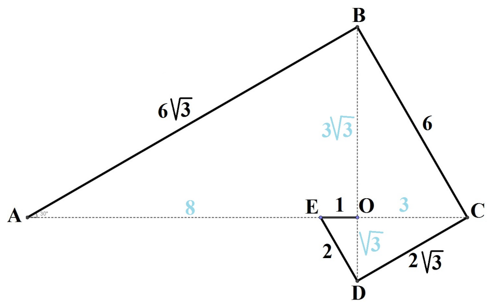
$DC = 2\sqrt{3}$ cateto menor de $DCB \xrightarrow{\times\sqrt{3}}$ su cateto mayor $CB = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$

$CB = 6$ cateto menor de $CBA \xrightarrow{\times\sqrt{3}}$ su cateto mayor será $BA = 6\sqrt{3}$

La longitud total de la poligonal es:

$$\underline{L} = OE + ED + DC + CB + BA = 1 + 2 + 2\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} = \underline{9 + 8\sqrt{3}}$$

Y, si queremos, esta es la medida de los segmentos punteados:



*Además de la del proponente, han llegado soluciones correctas de: **Ana Juárez Sáez** (IES Jiménez de la Espada Cartagena), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

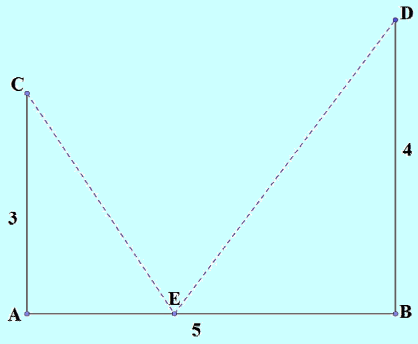
C-010. Puntos Es.

Sea AB un segmento de longitud 5 cm. AC, el segmento perpendicular a AB y de longitud 3 cm. BD el segmento perpendicular a AB y de longitud 4 cm.

Se pide que determines los siguientes puntos sobre el segmento AB:

a) E_1 de forma que $EC = ED$

b) E_2 de forma que los triángulos ACE y BDE tengan la misma área



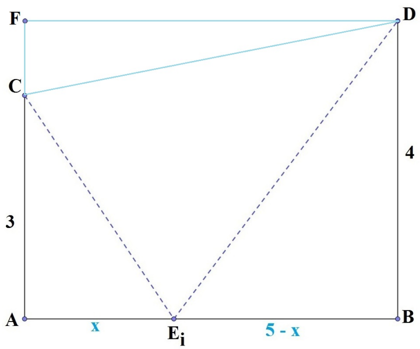
c) E_3 de forma que las áreas de los triángulos ACE y BDE sumen lo mismo que la del triángulo CDE

Solución

El punto E_i divide el segmento AB en dos partes: $AE_i = x$ y $E_iB = 5 - x$

Unimos CD y señalamos el punto F de forma que $ABDF$ sea un rectángulo 5×4

Y estamos listos para abordar los tres apartados aplicando adecuadamente el teorema de Pitágoras.



a) $\underline{E_1C = E_1D} \;\rightarrow\; (E_1C)^2 = (E_1D)^2 \;\rightarrow\; 9 + x^2 = (5-x)^2 + 16 \;\rightarrow$

$x^2 = (25 - 10x + x^2) + 7 \;\rightarrow\; 32 = 10x \;\rightarrow\; x = 3'2$

Así: $\underline{AE_1 = 3'2}$ y $\underline{E_1B = 1'8}$

b) $\underline{S_{ACE_2} = S_{BDE_2}} \;\rightarrow\; 2 \cdot S_{ACE_2} = 2 \cdot S_{BDE_2} \;\rightarrow\; 3x = 4(5-x) \;\rightarrow\; x = \dfrac{20}{7}$

Así: $\underline{AE_2 = \dfrac{20}{7}}$ y $\underline{E_2B = \dfrac{15}{7}}$

c) $\underline{S_{ACE_3} + S_{BDE_3} = S_{CDE_3}} \;\rightarrow\; 2 \cdot S_{ACE_3} + 2 \cdot S_{BDE_3} = 2 \cdot S_{CDE_3}$

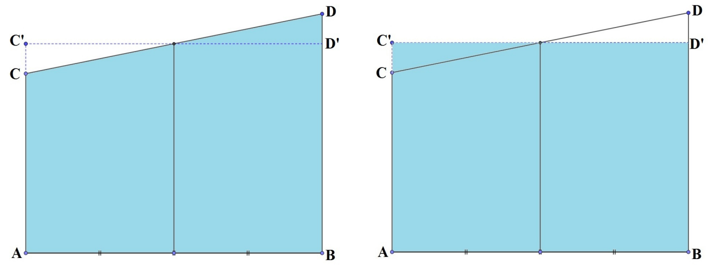
Y, viendo el gráfico, tenemos: $S_{ACE_3} + S_{BDE_3} + S_{CDE_3} + S_{CDF} = S_{ABDF}$.

Así, por un lado: $2 \cdot S_{CDE_3} + \dfrac{5 \cdot 1}{2} = 20 \;\rightarrow\; 2 \cdot S_{CDE_3} = \dfrac{35}{2}$

Y, por otro, $2 \cdot S_{ACE_3} + 2 \cdot S_{BDE_3} = 3x + 4(5-x) = 20 - x = \dfrac{35}{2} = 2 \cdot S_{CDE_3}$

Luego $x = \dfrac{5}{2} = 2'5$, esto es: $\underline{AE_3 = 2'5 = E_3B}$

Valor éste que debías haber intuido. Bastaba recordar que la perpendicular por el punto medio de AB *divide al trapecio* $ABDC$ *en dos partes de igual área, lo que queda patente viendo la igualdad de áreas entre el trapecio y este rectángulo sombreado* $ABD'C'$*:*



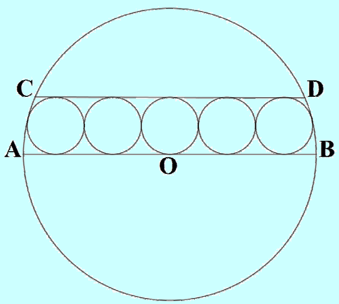
*Además de la del proponente, han llegado soluciones correctas de: **Gema Sanchís Herrera** (La Salle. Paterna), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Alejandro López López** (IES Ramón Areces. Grado), **Lucía Herráiz Cano** (C. Los Sauces. Torrelodones), **Diego González Lozano** (IES Gredos. Piedrahita), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Zhenzhen Pan** (IES Rambla de Nogalte. Puerto Lumbreras).*

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-010. Entre un diámetro y una cuerda.

Dada una circunferencia de centro O y radio 1, se traza un diámetro AB.

Hallar la distancia d a la que hay que trazar una cuerda CD paralela a AB de modo que existan n circunferencias tangentes a ambas rectas, tangentes entre sí y la primera y la última tangentes a la circunferencia dada como se muestra en la figura para $n = 5$.



Solución

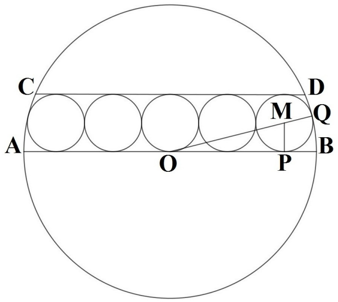
El problema estará resuelto en cuanto consigamos hallar el radio r_n ya que entonces $d = 2 \cdot r_n$. Distinguiremos dos casos, n impar o par

a) $n = 2 \cdot k + 1$.

Supongamos a efectos del dibujo que $n = 5$.

Si llamamos M al centro de la circunferencia de la derecha y P a su punto de tangencia con AB se tiene:

$$OP = 2 \cdot k \cdot r_n = (n-1) \cdot r_n$$

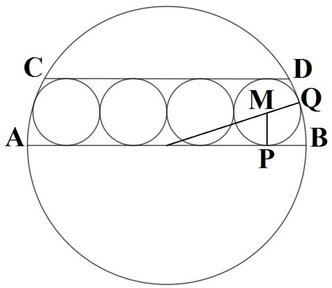


b) $n = 2 \cdot k$

Supongamos a efectos del dibujo que $n = 4$.

Si llamamos M al centro de la circunferencia de la derecha y P a su punto de tangencia con AB se tiene:

$$OP = (2 \cdot k - 1) \cdot r_n = (n-1) \cdot r_n$$



Vemos que en ambos casos vale la misma relación.

Por tanto: $r_n^2 = MP^2 = OM^2 - OP^2 = (1 - r_n)^2 - (n-1)^2 \cdot r_n^2$

operando queda la ecuación de 2º grado: $(n-1)^2 \cdot r_n^2 + 2 \cdot r_n - 1 = 0$

despejando r_n y tomando la raíz positiva, queda finalmente:

$$r_n = \frac{\sqrt{1 + (n-1)^2} - 1}{(n-1)^2} \qquad \text{En definitiva: } \underline{d = 2 \cdot \frac{\sqrt{1 + (n-1)^2} - 1}{(n-1)^2}}$$

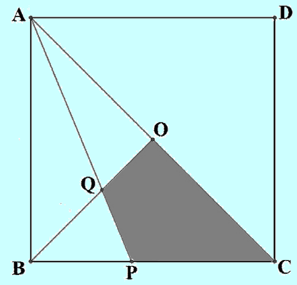
*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* Francisco J. Babarro Rodríguez *(IES A Carballeira. Ourense).*

Se recibieron también tres soluciones incompletas y una incorrecta.

Jn-010. Cuadrilátero sombreado.

Como muestra la figura de la derecha, **ABCD** es un cuadrado y **AP** es la bisectriz de **BAC** que corta en **Q** a la diagonal **BD**.

¿Qué fracción del área del cuadrado representa el área del cuadrilátero sombreado?



Solución

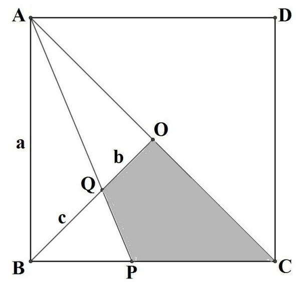
Poniendo $AB = a$, $OQ = b$ y $QB = c$.

Por el teorema de la bisectriz en AOB:

$$\frac{c}{a} = \frac{2 \cdot b}{\sqrt{2} \cdot a} \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{2} \cdot b$$

Como $b + c = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \cdot c = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow$

$$c = \frac{a}{1 + \sqrt{2}}$$



El triángulo BPQ es isósceles, pues:

$$\angle BPQ = \angle BPA = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ \quad \text{y} \quad \angle BQP = \angle AQO = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$$

Y su área valdrá: $[BPQ] = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} c = \frac{\sqrt{2} \cdot c^2}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a^2}{(1 + \sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{4} \cdot a^2$

Así: $[OQPC] = [BOC] - [BPQ] = \frac{a^2}{4} - \frac{3\sqrt{2} - 4}{4} \cdot a^2 = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{4} \cdot a^2$

Y la fracción de área pedida es $\underline{\frac{[OQPC]}{[ABCD[} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{4}}$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (IES Ruiz de Alda. San Javier), **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell), **Francisco Rodríguez-Carretero Roldán** (Colegio Bética-Mudarra. Córdoba), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Ignacio Larrosa Cañestro** (IES Rafael Dieste. A Coruña), **Diego González Lozano** (IES Gredos. Piedrahita)*

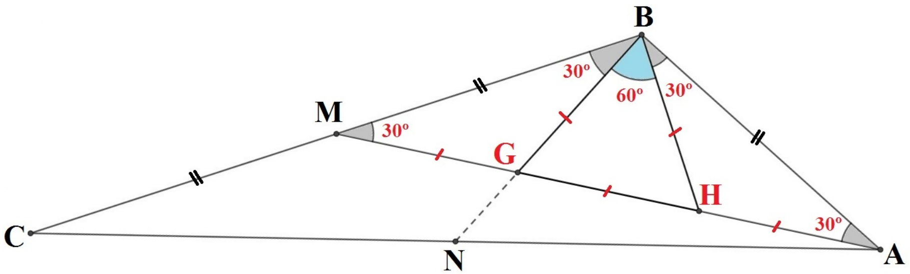
Se recibió también una solución incorrecta.

S-010. Aeme Beene.

Sea ABC un triángulo con $\angle ABC = 120°$ y $BC = 2 \cdot AB$. Denotamos por M al punto medio de BC y N al punto medio de AC. Calcular el ángulo entre AM y BN.

Dado que $BM = BA$ y $\angle ABC = 120°$, el triángulo ABM resulta ser isósceles y los restantes ángulos son ambos de $30°$.

Una figura a escala sugiere que BN es perpendicular a AB, y si probamos esto quedará demostrado que AM y BN se cortan formando ángulos de $60°$ y $120°$.



Solución-1

Sacándonos algunos puntos de la manga: Sean G y H los puntos del segmento AM que verifican $\angle MBG = 30°$, $\angle GBH = 60°$ y $\angle HBA = 30°$. Se forman, así, dos triángulos isósceles, BMG y BHA, y un triángulo equilátero BGH, de lo que se deduce que: $GM = GB = GH = HB = HA$.

En particular, la mediana AM ha quedado dividida en tres partes iguales y como $AG = 2 \cdot GM$, el punto G resulta ser el baricentro del triángulo ABC y, por ello, pertenece también a la mediana BN.

Efectivamente, pues, AM y BN se cortan formando ángulos de $60°$ y $120°$.

Solución-2

Por el teorema del coseno en el triángulo ABC:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos 120° =$$

$$= 4 \cdot AB^2 + AB^2 + 2 \cdot AB^2 = 7 \cdot AB^2$$

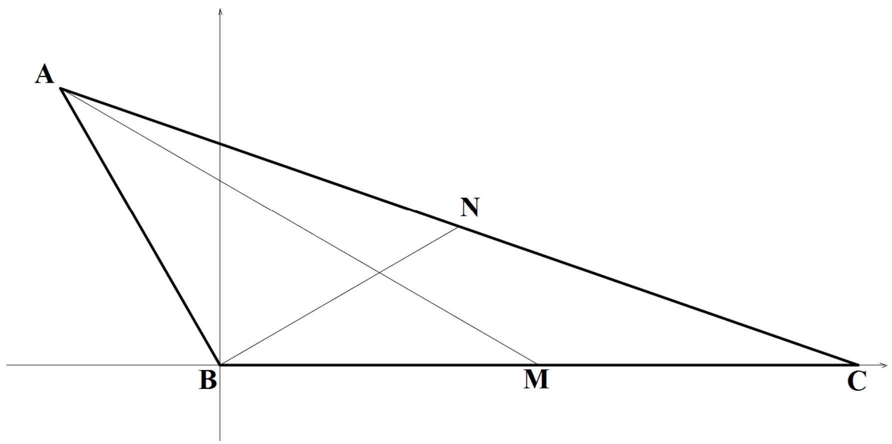
Y, así, $AN^2 = \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 = \dfrac{7 \cdot AB^2}{4}$

Y, ahora, por el teorema de la mediana:

$$BN^2 = \frac{2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 - AC^2}{4} = \frac{2 \cdot AB^2 + 8 \cdot AB^2 - 7 \cdot AB^2}{4} = \frac{3 \cdot AB^2}{4}$$

Con todo esto se verifica que: $AN^2 = BN^2 + AB^2$ confirmando que $\angle NBA = 90°$ y, lo ya dicho, que AM y BN se cortan formando ángulos de $60°$ y $120°$.

*Solución-3 de **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell).*



Sin pérdida de generalidad, asignando a AB la longitud 1, disponiendo el punto B en el origen de coordenadas $(0,0)$ y el punto C en $(2,0)$, las coordenadas de los puntos M y A serán $(1,0)$ y $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ respectivamente.

Por otra parte, dado que N es el punto medio del segmento AC, le corresponderán las coordenadas $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Por consiguiente los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{BN}$ serán:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \left(\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \quad \to \quad \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

$$\overrightarrow{BN} = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \to \quad \left|\overrightarrow{BN}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

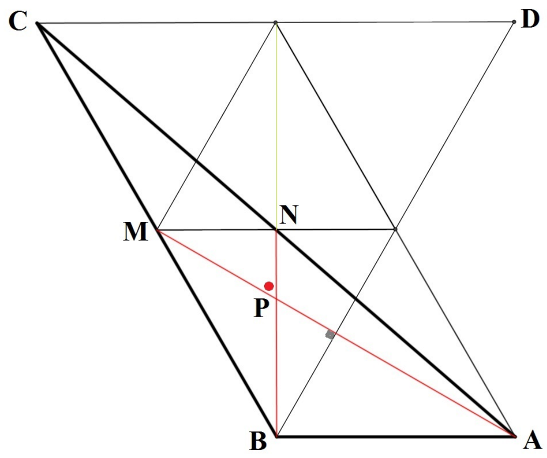
El ángulo α entre estos dos vectores vendrá dado por la expresión:

$$\alpha = \operatorname{ar\,cos}\left(\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}}{\left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BN}\right|}\right) = \operatorname{ar\,cos}\left(\frac{\frac{9}{8} - \frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{12}}{2} \cdot \frac{\sqrt{12}}{4}}\right) = \operatorname{ar\,cos}\left(\frac{\frac{6}{8}}{\frac{12}{8}}\right) = \operatorname{ar\,cos}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

Solución-4 de ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier)*

Sea $\{P\} = AM \cap BN$.

Como $MB = BA$, el triángulo MBA es isósceles con $\angle MBA = 120°$ por lo que $\angle BMA = \angle BAM = 30°$



Por otro lado, como M y N son los puntos medios de BC y AC respectivamente, tenemos que $MN // BA$. Construyendo los cinco triángulos equiláteros adyacentes de la figura, vemos que BN es perpendicular a BA, ya que la prolongación de BN por N da la altura del triángulo isósceles BCD.

Por consiguiente, $\angle MBP = \angle MBA - \angle PBA = 120° - 90° = 30°$.

De aquí y de $\angle BMA = 30°$, deducimos que $\angle MPB = 120°$, por lo que el ángulo pedio es su suplementario: $\underline{\angle MPN = 60°}$

Bien resuelto por: ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Manuel Español Salvador*** *(IE. Barcelona),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(IES A Carballeira. Ourense),* ***César Catalán Capaccioni*** *(Valencia),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* ***Andrés M. González Gallego*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Juan Navarro Loidi*** *(San Sebastián),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(US),* ***Víctor Miguel Gallardo Fuentes*** *(UMA),* ***José Ginés Espín Buendía*** *(IES El Bohío. Cartagena),* ***Diego González Lozano*** *(IES Gredos. Piedrahita).*

Se recibió también una solución incorrecta.