Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Abril – 2021

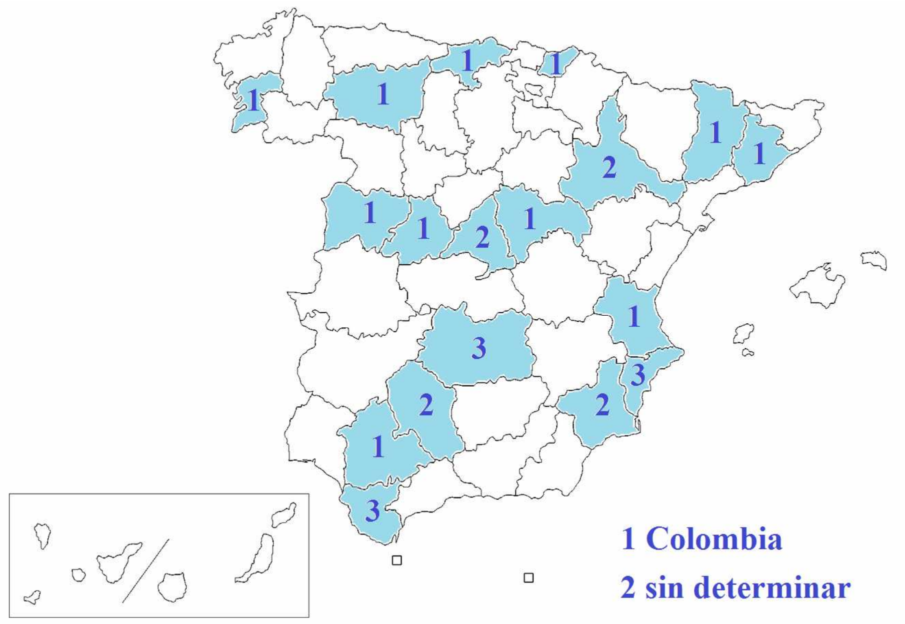
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
008	✓	✓	✓	✓	✓	✓
009	✓	✓	✓	✓	✓	✓
010	✓	✓	✓	✓	✓	✓
011	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

31 participantes (26 chicos / 05 chicas) **55 respuestas**



Alevín (5º/6º Primaria)

A-011. Cuadriseguidos.

Un entero positivo de dos o más cifras se denomina *cuadriseguido* si cada par de dígitos consecutivos que tenga es un cuadrado perfecto. Por ejemplo:

364 es *cuadriseguido*, pues $36 = 6^2$ y $64 = 8^2$

Y 3642 no lo es porque 42 no es un cuadrado perfecto

Obtén todos los números cuadriseguidos posibles.

Solución

En total son estos catorce:

16	25	36	49	64	81
164		364		649	816
1649		3649			8164
					81649

Bien resuelto por: ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Ana Juárez Sáez*** *(IES Jiménez de la Espada Cartagena),* ***Iván López Márquez*** *(C. Inmaculada. Alicante),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Raúl Orellana Mateo*** *(IES Almoraima. Castellar de la Frontera),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba)*

Infantil (1º/2º ESO)

I-011. Números fibonaccianos.

Un número de al menos tres cifras se denomina *fibonacciano* si sus cifras, a partir de la tercera, son iguales a la suma de las dos cifras anteriores.

Por ejemplo: 5279 es un número *fibonacciano*, pues su tercera cifra, 7, es suma de las dos anteriores $(5+2)$ y su cuarta cifra, 9, también $(2+7)$.

Te daremos el problema por válido si respondes bien a estas dos cuestiones:

a) ¿cuántas cifras como máximo puede tener un *número fibonacciano*?

b) ¿cuántos *números fibonaccianos* hay?

Solución-1

Sean las dos primeras cifras $a \neq 0$ y b, y todas menores o iguales que 9. Vamos a hacer un recuento sistemático para saber cuántos hay y, así, veremos también que, como máximo, un número *fibonacciano* puede tener 8 cifras:

- De 8 cifras: a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, $3a+5b$, $5a+8b$, $\underline{8a+13b}$ todas ≤ 9

Esto exige: $a=1$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{10112358}$ que será el mayor y el más largo.

Total uno sólo

- De 7 cifras: a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, $3a+5b$, $\underline{5a+8b}$ todas ≤ 9

Esto exige: $a=1$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{1011235}$ reducciendo el anterior *(r.a.)*

Total uno sólo reduciendo una cifra el anterior.

- De 6 cifras: a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, $\underline{3a+5b}$ todas ≤ 9

Esto exige:
$a=1$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{101123}$ reduciendo uno anterior *(r.a.)*
$a=1$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{112358}$
$a=2$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{202246}$
$a=3$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{303369}$

Total 4: uno reduciendo una cifra el anterior y tres nuevos.

- De 5 cifras: a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$ todas ≤ 9

Esto exige:

$a=1$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{10112}$ *(r.a.)*	$a=2$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{21347}$
$a=1$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{11235}$ *(r.a.)*	$a=3$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{30336}$ *(r.a.)*
$a=1$ y $b=2$ $\rightarrow$ $\underline{12358}$	$a=3$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{31459}$
$a=2$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{20224}$ *(r.a.)*	$a=4$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{40448}$

Total 8: cuatro reduciendo una cifra los anteriores y cuatro nuevos.

- De 4 cifras: a, b, $a+b$, $a+2b$

Esto exige:

$a=1$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{1011}$ *(r.a.)*	$a=4$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{3145}$ *(r.a.)*
$a=1$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{1123}$ *(r.a.)*	$a=4$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{4156}$
$a=1$ y $b=2$ $\rightarrow$ $\underline{1235}$ *(r.a.)*	$a=4$ y $b=2$ $\rightarrow$ $\underline{4268}$
$a=1$ y $b=3$ $\rightarrow$ $\underline{1347}$	$a=5$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{5055}$
$a=1$ y $b=4$ $\rightarrow$ $\underline{1459}$	$a=5$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{5167}$
$a=2$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{2022}$ *(r.a.)*	$a=5$ y $b=2$ $\rightarrow$ $\underline{5279}$
$a=2$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{2134}$ *(r.a.)*	$a=6$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{6066}$
$a=2$ y $b=2$ $\rightarrow$ $\underline{2246}$	$a=6$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{6178}$
$a=2$ y $b=3$ $\rightarrow$ $\underline{2358}$	$a=7$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{7077}$
$a=3$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{3033}$ *(r.a.)*	$a=7$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{7189}$
$a=3$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{3145}$ *(r.a.)*	$a=8$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{8088}$
$a=3$ y $b=2$ $\rightarrow$ $\underline{3257}$	$a=9$ y $b=0$ $\rightarrow$ $\underline{9099}$
$a=3$ y $b=3$ $\rightarrow$ $\underline{3369}$	

Total 25: ocho reduciendo una cifra los anteriores y diecisiete nuevos.

- De 3 cifras: a, b, $a+b$

Esto exige: 25 reduciendo una cifra a los anteriores que no los ponemos *(r.a.)*

$a=1$ y $b=5$ $\rightarrow$ $\underline{156}$	$a=3$ y $b=6$ $\rightarrow$ $\underline{369}$
$a=1$ y $b=6$ $\rightarrow$ $\underline{167}$	$a=4$ y $b=3$ $\rightarrow$ $\underline{437}$
$a=1$ y $b=7$ $\rightarrow$ $\underline{178}$	$a=4$ y $b=4$ $\rightarrow$ $\underline{448}$
$a=1$ y $b=8$ $\rightarrow$ $\underline{189}$	$a=4$ y $b=5$ $\rightarrow$ $\underline{459}$
$a=2$ y $b=4$ $\rightarrow$ $\underline{246}$	$a=5$ y $b=3$ $\rightarrow$ $\underline{538}$
$a=2$ y $b=5$ $\rightarrow$ $\underline{257}$	$a=5$ y $b=4$ $\rightarrow$ $\underline{549}$
$a=2$ y $b=6$ $\rightarrow$ $\underline{268}$	$a=6$ y $b=2$ $\rightarrow$ $\underline{628}$
$a=2$ y $b=7$ $\rightarrow$ $\underline{279}$	$a=6$ y $b=3$ $\rightarrow$ $\underline{639}$
$a=3$ y $b=4$ $\rightarrow$ $\underline{347}$	$a=7$ y $b=2$ $\rightarrow$ $\underline{729}$
$a=3$ y $b=5$ $\rightarrow$ $\underline{358}$	$a=8$ y $b=1$ $\rightarrow$ $\underline{819}$

Total 45: veinticinco reduciendo los anteriores y veinte nuevos

Así, en total son $1+1+4+8+25+45=84$ los números *fibonaccianos* que hay.

Solución-2

Tabulándolos sistemáticamente los conseguimos todos:

a	b	3 cifras	4 cifras	5 cifras	6 cifras	7 cifras	8 cifras
1	0	101	1011	10112	101123	1011235	10112358
1	1	112	1123	11235	112358		
1	2	123	1235	12358			
1	3	134	1347				
1	4	145	1459				
1	5	156					
1	6	167					
1	7	178					
1	8	189					
2	0	202	2022	20224	202246		
2	1	213	2134	21347			
2	2	224	2246				
2	3	235	2358				
2	4	246					
2	5	257					
2	6	268					
2	7	279					
3	0	303	3033	30336	303369		
3	1	314	3145	31459			
3	2	325	3257				
3	3	336	3369				
3	4	347					
3	5	358					
3	6	369					
4	0	404	4044	40448			
4	1	415	4156				
4	2	426	4268				
4	3	437					
4	4	448					
4	5	459					
5	0	505	5055				
5	1	516	5167				
5	2	527	5279				
5	3	538					
5	4	549					
6	0	606	6066				
6	1	616	6167				
6	2	628					
6	3	639					
7	0	707	7077				
7	1	718	7189				
7	2	729					
8	0	808	8088				
8	1	819					
9	0	909	9099				

En total son **84** los números *fibonaccianos* que hay.

a	b	3 cifras	4 cifras	5 cifras	6 cifras	7 cifras	8 cifras
Total:		45	25	8	4	1	1

*Bien resuelto por: **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Ana Juárez Sáez** (IES Jiménez de la Espada Cartagena), **Joaquín Infante Rodríguez** (1º DGME-US),* Lidia Mulet Pedro *(IES Matemátic Viçent Caselles Costa. Gata de Gorgos), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba)*

Se recibieron también cuatro soluciones incompletas y dos incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-011. Secuencias aritméticas con primos.

Construye una progresión aritmética lo más larga posible que empiece por **7** y que todos sus términos sean números primos. Y, además, justifica por qué no puede ser más larga e intenta poner, al menos, un ejemplo con cada una de las longitudes menores a esa longitud máxima.

Solución

En primer lugar, veamos que tal progresión aritmética, con diferencia d, no puede tener más de siete términos:

$a_1 = 7$, $a_2 = 7 + d$, $a_3 = 7 + 2d$, $a_4 = 7 + 3d$, $a_5 = 7 + 4d$, $a_6 = 7 + 5d$, $a_7 = 7 + 6d$, $a_8 = 7 + 7d$ que ya no puede ser primo, es claramente múltiplo de 7

En segundo lugar, que la diferencia d ha de ser par.

Si d fuera impar, $a_2 = 7 + d$ sería par y, por tanto, no primo

Y, finalmente, en función de la cifra en la que acaba d, la de sus unidades y que designaremos como $u(d)$, y de la longitud máxima que alcance la progresión, daremos un ejemplo de cada una de las longitudes menores o iguales a esa máxima:

Si $\underline{u(d) = 8}$, $u(a_2) = u(7 + d) = 5$, que ya no es primo $\rightarrow$ $\underline{L = 1}$

Ejemplo: $d = 8$ $\boxed{7}, \cancel{15}$ con $L = 1$

Si $\underline{u(d) = 6}$, $u(a_4) = u(7 + 3d) = 5$, que ya no es primo $\rightarrow$ $\underline{L \leq 3}$

Ejemplos: $d = 26$ $7, \cancel{33}$ con $L = 1$

$d = 46$ $\boxed{7, 53}, \cancel{99}$ con $L = 2$

$d = 6$ $\boxed{7, 13, 19}, \cancel{25}$ con $L = 3$

Si $\underline{u(d)=4}$, $u(a_3)=u(7+2d)=5$ que ya no es primo $\rightarrow$ $\underline{L\le 2}$

Ejemplos:	$d=14$	$7,\ \cancel{21}$	con $L=1$
	$d=4$	$7,\ 11,\ \cancel{15}$	con $L=2$

Si $\underline{u(d)=2}$, $u(a_5)=u(7+4d)=5$ que ya no es primo $\rightarrow$ $\underline{L\le 4}$

Ejemplos:	$d=2$	$7,\ \cancel{9}$	con $L=1$
	$d=22$	$7,\ 29,\ \cancel{51}$	con $L=2$
	$d=132$	$7,\ 139,\ 271,\ \cancel{403}$	con $L=3$
	$d=12$	$\boxed{7, 19, 31, 43}, \cancel{55}$	con $L=4$

Si $\underline{u(d)=0}$ $u(a_8)=u(7+7d)=\dot{7}$ como ya vimos $\rightarrow$ $\underline{L\le 7}$

Ejemplos:	$d=20$	$7,\ \cancel{27}$	con $L=1$
	$d=10$	$7,\ 17,\ \cancel{27}$	con $L=2$
	$d=60$:	$7,\ 67,\ 127,\ \cancel{187}$	con $L=3$
	$d=480$	$7,\ 487,\ 967,\ 1447,\ \cancel{1927}$	con $L=4$
	$d=360$	$\boxed{7, 367, 727, 1087, 1447}, \cancel{1807}$	con $L=5$
	$d=30$:	$\boxed{7, 37, 67, 97, 127, 157}, \cancel{187}$	con $L=6$
	$\underline{d=150}$	$\boxed{7, 157, 307, 457, 607, 757, 907}, \cancel{1057}$ ya con $\underline{L=7}$, la longitud más larga posible.	

Queda probado que, empezando en 7, una progresión aritmética de números primos nunca podrá tener más de 7 términos y, si tiene los siete términos, su diferencia será algún valor terminado en 0. Y hemos recuadrado un ejemplo de cada una con todas las longitudes posibles menores de siete términos.

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Gemma Sanchís Herrera*** *(La Salle. Paterna),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de la Palma. Salamanca),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba)*

Se recibió también una solución incompleta.

Jv-011. Números combinatorios bestiales.

¿Cuántos números combinatorios son bestiales? O, lo que es lo mismo, ¿para qué enteros positivos m y n se tiene que $\binom{m}{n}=666$

Solución

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}=666=2\cdot 3^2\cdot 37 \quad\rightarrow\quad n!\cdot(m-n)!\cdot 2\cdot 3^2\cdot 37=m!$$

Por tanto, 37 ha de ser un factor de $m!$ y, en consecuencia, $m\ge 37$

Recordando que las filas del **Triángulo de Tartaglia** son simétricas, esto es, que los números combinatorios que contienen van creciendo hasta el centro de la fila…

$$\binom{m}{0}<\binom{m}{1}<\binom{m}{2}<\binom{m}{3}<\dots\dots<\binom{m}{k} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} k=n/2 \text{ si } n \text{ es par ó} \\ k=(n-1)/2 \text{ si } n \text{ es impar}\end{array}$$

… nos basta con estudiar casos con $n\le k$

Para $\underline{n=1}$ es claro que $\underline{\binom{666}{1}}$ y su simétrico $\underline{\binom{666}{665}}$ son bestiales.

Para $\underline{n=2}$ $\binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2}=666 \ \rightarrow\ m(m-1)=1332=37\cdot 36 \ \rightarrow\ m=37$

Luego $\underline{\binom{37}{2}}$ y su simétrico $\underline{\binom{37}{35}}$ son también bestiales.

Para $n>3$ $\binom{m}{3}=\frac{m(m-1)(m-2)}{6}\ge\frac{37\cdot 36\cdot 35}{6}>666$ no es posible

Luego son bestiales, únicamente, esos cuatro números combinatorios subrayados.

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Joaquín Infante Rodríguez*** *(1º DGME-US),* ***Francisco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(C BM. Córdoba)*

Se recibieron también cuatro soluciones incompletas y una incorrecta.

Júnior

Jn-011. Progresiones aritméticas en el triángulo de Tartaglia.

¿En qué filas del triángulo de Tartaglia aparecen tres números combinatorios consecutivos en progresión aritmética?

Solución

Sea m la fila en la que aparecen tres números combinatorios en progresión aritmética con diferencia d

$$a_1 = \binom{m}{n-1} = a_2 - d, \quad a_2 = \binom{m}{n}, \quad a_3 = \binom{m}{n+1} = a_2 + d$$

Y, así: $a_1 + a_3 = 2 \cdot a_2 \quad \rightarrow \quad \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n+1} = 2 \cdot \binom{m}{n}$

Con esta idea feliz, reducimos el primer miembro a un solo número combinatorio y podemos simplificar mucho los cálculos:

$$\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} + \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = 4 \cdot \binom{m}{n}$$

$$\binom{m+1}{n} + \binom{m+1}{n+1} = 4 \cdot \binom{m}{n} \quad \rightarrow \quad \binom{m+2}{n+1} = 4 \cdot \binom{m}{n}$$

$$\frac{(m+2)!}{(n+1)! \cdot (m-n+1)!} = \frac{4 \cdot m!}{n! \cdot (m-n)!} \quad \rightarrow \quad \frac{(m+2)(m+1)}{(n+1) \cdot (m-n+1)} = 4$$

$$m^2 + 3m + 2 = 4(nm - n^2 + m + 1) \quad \rightarrow \quad m^2 - (4n+1)m + 4n^2 - 2 = 0$$

ecuación cuadrática en m que podemos resolver:

$m = \dfrac{4n+1 \pm \sqrt{(4n+1)^2 - 4(4n^2-2)}}{2} = \dfrac{4n+1 \pm \sqrt{8n+9}}{2}$ que exige, como m es entero positivo, que el radicando sea un cuadrado perfecto y, como puede verse, un cuadrado perfecto de un número impar: $8n + 9 = (2k+1)^2$

$$n = \frac{(2k+1)^2 - 9}{8} = \frac{k^2 + k - 2}{2}$$

$$m = \frac{2k^2 + 2k - 3 \pm (2k+1)}{2} = \begin{cases} k^2 + 2k - 1 = (k+1)^2 - 2 \\ k^2 - 2 \end{cases}$$

Y lo podemos constar, por ejemplo, con los primeros valores:

$k=2$	$n=2$	$m=7$	$\rightarrow$	$\binom{7}{1}=7$	$\binom{7}{2}=21$	$\binom{7}{3}=35$
$k=3$	$n=5$	$m_2=7$	$\rightarrow$	$\binom{7}{4}=35$	$\binom{7}{5}=21$	$\binom{7}{6}=7$
		$m_1=14$	$\rightarrow$	$\binom{14}{4}=1001$	$\binom{14}{5}=2002$	$\binom{14}{6}=3003$
$k=4$	$n=9$	$m_2=14$	$\rightarrow$	$\binom{14}{8}=3003$	$\binom{14}{9}=2002$	$\binom{14}{10}=1001$
		$m_1=23$	$\rightarrow$	$\binom{23}{8}=490314$	$\binom{23}{9}=817190$	$\binom{23}{10}=1144066$
…	…	…		… … … … …	… … … … …	… … … … …

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Samuel Orellana Mateo*** *(IES Almoraima. Castellar de la Frontera),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud)*

Se recibieron también dos soluciones más, una incompleta y otra incorrecta.

S-011. Enconada distribución.

Se consideran los números enteros $k \geq 2$ y $n = 5k$. Demuestra que es posible distribuir el conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ en k subconjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ cada uno de cinco elementos, de manera que para cualquiera índices i, j con $i \leq j$ se cumple que la suma de los cuatro elementos menores de A_i es mayor que la suma de los dos elementos mayores de A_j

Solución

Rellénese una tabla $k \times 5$ en zig-zag vertical siguiendo este esquema:

A_1	1	$2k$	$2k+1$	$4k$	$4k+1$
A_2	2	$2k-1$	$2k+2$	$4k-1$	$4k+2$
… … …	… … …	… … …	… … …	… … …	… … …
A_{k-1}	$k-1$	$k+2$	$3k-1$	$3k+2$	$5k-1$
A_k	k	$k+1$	$3k$	$3k+1$	$5k$

Para cada $= 1, 2, \ldots\ldots k$ es claro que la suma de los cuatro elementos menores de A_i es $8k+2$ y la suma de los dos mayores es $8k+1$, lo cual resuelve el problema.

Bien resuelto por: ***Andrés M. González Gallego*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Manuel Español Salvador*** *(Barcelona),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Larry Andrés Matta Plaza*** *(UNAL. Medellín),* ***Juan Navarro Loidi*** *(San Sebastián),* ***José Manuel Benedí Cortés*** *(Zaragoza),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Manuel Amorós Juan*** *(IES Navarro Santafé. Villena),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Luis González de la Fuente*** *(UC),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(US)*