Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Mayo – 2021

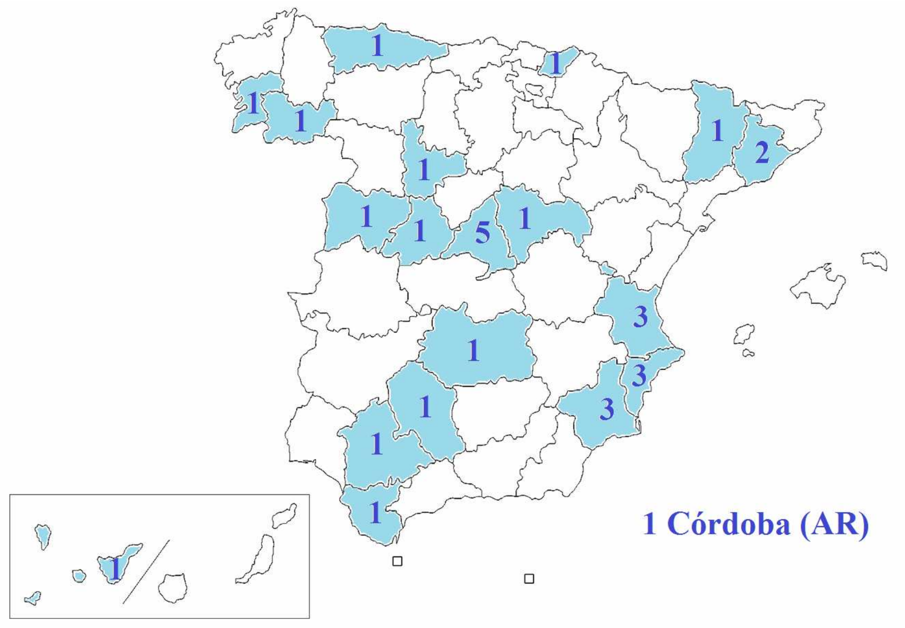
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
009	✓	✓	✓	✓	✓	✓
010	✓	✓	✓	✓	✓	✓
011	✓	✓	✓	✓	✓	✓
012	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

31 participantes (26 chicos / 05 chicas) 55 respuestas



Alevín (5º/6º Primaria)

A-012. Mal uso de la calculadora.

Dori quiere verificar con su calculadora científica el resultado de la operación: $(a+b)/c$. Sabe que es 15, pero olvida teclear los paréntesis y obtiene 21 en la pantalla. Viendo que se ha equivocado, decide invertir a y b y calcula: $(b+a)/c$ pero, de nuevo, olvida los dichosos paréntesis y obtiene 24. ¿Cuáles eran los números a, b y c?

Solución

Sabemos que: $\dfrac{a+b}{c}=15$, $a+\dfrac{b}{c}=21$ y $b+\dfrac{a}{c}=24$ con $c\neq 0$

Que equivale a: $a+b=15c$, $ac+b=21c$ y $bc+a=24c$

Y, obviamente, también $c\neq 1$.

Restando la primera expresión a las otras dos y despejando: $a=\dfrac{6c}{c-1}$ y $b=\dfrac{9c}{c-1}$

Así: $15c=a+b=\dfrac{6c}{c-1}+\dfrac{9c}{c-1}=\dfrac{15c}{c-1} \quad\rightarrow\quad c=2$

Luego los números en cuestión son: $\underline{a=12}$, $\underline{b=18}$ y $\underline{c=2}$

*Bien resuelto por: **Joaquín Infante Rodríguez** (1º DGME-US), **Francisco Rodríguez-Carretero Roldán** (C BM. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Amparo Sáez Abarca** (IES Jiménez de la Espada. Cartagena), **Pablo Morales Martín** (2º Primaria. CEIP Agustín Arguelles. Alcorcón), **Iván López Márquez** (6º Primaria. C. Inmaculada. Alicante), **Ana Lozano Miguel** (IES Oleana. Requena), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) y **Andrey Rosario Panina** (IES Valle Guerra. Tenerife)*

Infantil (1º/2º ESO)

I-012. Otro juego del 21.

¿Cuáles son las dos últimas cifras de este enorme número: 2021^{2021}?

Solución

Con una simple calculadora te resultará fácil de constatar que las dos últimas cifras de las potencias sucesivas de 2021 forman un ciclo de longitud cinco:

$$21 \rightarrow 41 \rightarrow 61 \rightarrow 81 \rightarrow 01$$

Por tanto, el enorme número 2021^{2021} terminará también en 21.

Bien resuelto por: ***Joaquín Infante Rodríguez*** *(1º DGME-US),* ***Francisco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(C BM. Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Alejandro Allepuz Pedreño*** *(IES Jiménez de la Espada. Cartagena),* ***Amparo Sáez Abarca*** *(IES Jiménez de la Espada. Cartagena),* ***Ana Lozano Miguel*** *(IES Oleana. Requena),* ***Aimara López López*** *(IES Ramón Areces. Grado),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Andrey Rosario Panina*** *(IES Valle Guerra. Tenerife) y* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de la Palma. Salamanca)*

Cadete (3º/4º ESO)

C-012. Sorprendente identidad.

Demuestra que, sorprendentemente, estos dos números reales son idénticos:

$$a=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} \quad \text{y} \quad b=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Solución

$$a=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}=\sqrt{1+a} \quad \rightarrow \quad a^2=1+a$$

$$b=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}=1+\frac{1}{b} \quad \rightarrow \quad b^2=1+b$$

Ambos números son solución de la misma ecuación: $x^2=x+1 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

En nuestro caso, sólo: $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\phi$, el número de oro.

Luego, sí, ambos números son iguales: $\underline{a=b=\phi}$

Bien resuelto por: ***Joaquín Infante Rodríguez*** *(1º DGME-US),* ***Francisco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(C BM. Córdoba)),* ***Lucía Herráiz Cano*** *(C. Los Sauces. Torrelodones),* ***Alex Pérez*** *(IES Verdaguer. Barcelona),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Gemma Sanchís Herrera*** *(La Salle. Paterna),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Ourense),* ***Diego González Lozano*** *(IES Gredos. Piedrahita) y* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de la Palma. Salamanca)*

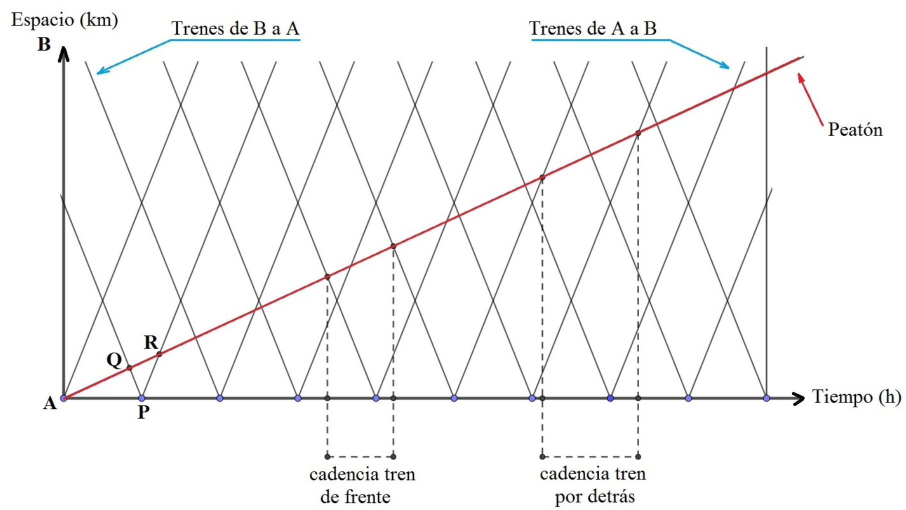
Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-012. Cuestión de trenes.

Desde dos ciudades **A** y **B** salen trenes simultáneamente con la misma velocidad y cadencia, los que salen de **A** se dirigen a **B** y los que salen de **B** van hacia **A**. Un peatón camina por la vía a **5 Km/h** desde **A** hacia **B**. Cada **20** minutos le rebasa un tren por la espalda y cada **15** minutos se cruza con un tren de cara. ¿Cuál es la frecuencia de los trenes?

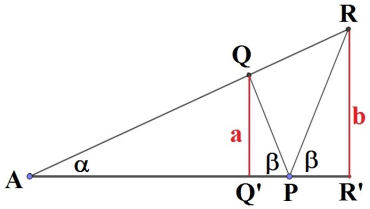
Solución:

Hagamos un diagrama espacio-tiempo con el tiempo en el eje **X** y el espacio en **Y**.



La incógnita del problema es **AP** y conocemos las proyecciones de **AQ** y **AR** sobre el eje **OX**. Además sabemos que las pendientes de ambos trenes son opuestas.

Dibujando el triángulo **APR** más grande y poniendo: $\alpha = \angle QAP$, $\beta = \angle RPR' = \angle QPQ'$



$$AQ' = \frac{1}{4},\ AR' = \frac{1}{3},\ AP = x,$$

$$QQ' = a \ \text{ y } \ RR' = b$$

Sabemos que $\tan\alpha = 5$, luego $a = \frac{5}{4}$ y $b = \frac{5}{3}$.

Además $Q'P = AP - AQ' = x - \frac{1}{4}$ y $PR' = AR' - AP = \frac{1}{3} - x$.

Finalmente por semejanza de los triángulos **QQ'P** y **RR'P** se tiene:

$$\frac{a}{Q'P} = \frac{b}{PR'} \ \rightarrow \ \frac{5/4}{x - 1/4} = \frac{5/3}{1/3 - x} \ \rightarrow \ \underline{x} = \frac{2}{7}\,h \cong \underline{17m\ 8.6s}$$

Bien resuelto por: ***Francisco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(C BM. Córdoba)),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Hugo Lladró Prats*** *(IES Francisco Figueras Pacheco. Alicante),* ***Diego González Lozano*** *(IES Gredos. Piedrahita) y* ***Juan Pablo González García*** *(Madrid)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Jn-012. Tercer grado.

Si $p(x)$ es un polinomio de tercer grado y a, b, c, d son números reales con $d > a$ cumpliendo que $p(a) = p(b) = p(c) = p'(b) = p''(c) = 0$ y $p(d) > 0$, ¿existirá algún número real x tal que $(x-a)\cdot p(x) + 1 = 0$?

Solución:

La respuesta es negativa.

· En primer lugar veremos que $a = b = c$

Es obvio que los tres no pueden ser distintos ya que el Teorema de Rolle aseguraría dos raíces intermedias para $p'(x)$ distintas de b, lo que es imposible porque $p'(x)$ tiene grado 2.

- Si $b = c$, obtenemos $p(b) = p'(b) = p''(b) = 0 \ \rightarrow$ la raíz b es triple para $p(x)$
- Si $b \neq c$, entonces las raíces de $p(x)$ son b, b, c ó b, c, c. Supongamos, sin perdida de generalidad que $b < c$. Entonces, por el Teorema de Rolle:

		Raíces
$p(x)$	b doble $\ < c$	b y c
$p'(x)$	b simple $\ < \xi$	b y ξ
$p''(x)$	μ	μ

ξ entre b y c y, también, μ entre b y $\xi \ \rightarrow \ \mu < c$

· Ahora veremos que es imposible encontrar $x \in \Re$ tal que $(x-a)\cdot P(x) + 1 = 0$

Como $a = b = c \ \rightarrow \ p(x) = \alpha(x-a)^3$

Y $p(d) = \alpha(d-a)^3 > 0 \ \rightarrow \ \alpha > 0$ pues $d > a$

Luego $(x-a)\cdot p(x) + 1 = \alpha(x-a)^4 + 1$ con $\alpha > 0$

Así que $(x-a)\cdot p(x) + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \Re$

Además de la del proponente, se recibieron soluciones correctas de: ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Alejandro Allepuz Pedreño*** *(IES Jiménez de la Espada. Cartagena),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. S. Javier),* ***Mario González Sánchez*** *(UVA),* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena) y* ***Diego González Lozano*** *(IES Gredos. Piedrahita)*

S-012. Cuestión de raíces.

Siendo $a,b,c\in\Re$ las raíces de $x^3+kx+k=0$, halla en función del coeficiente k la ecuación que tiene por raíces $a+bc$, $b+ac$ y $c+ab$

Si $a+bc=\frac{21}{4}$ determina las raíces de la ecuación $x^3+kx+k=0$

Solución

Recordemos las relaciones de Cardano-Vieta de una ecuación cúbica con raíces $a,b,c\in\Re$ y algunas relaciones entre sus coeficientes:

$$x^3-Sx+Dx-P=0 \text{ con } \underline{S=a+b+c},\ \underline{D=ab+bc+ca} \text{ y } \underline{P=abc}$$

Y, también, llamando, $S_1=S=a+b+c$, $\underline{S_2=a^2+b^2+c^2}$, $\underline{S_3=a^3+b^3+c^3}$ y $\underline{T=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ tenemos:

- elevando la suma al cuadrado:

  $(a+b+c)^2=a^2+b+c^2+2(ab+bc+ca)$, esto es: $\underline{S^2=S_2+2D}$

- elevando la suma al cubo:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

  esto es: $\underline{S^3=S_3+3SD-3P}$

  O bien:

$$S\cdot S_2=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=$$
$$=a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b=$$
$$=S_3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=$$
$$=S_3+ab(S-c)+bc(S-a)+ca(S-b)=$$
$$=S_3+SD-3P$$

  esto es: $\underline{S_3=S(S_2-D)+3P}$

- elevando la suma de dobles productos al cuadrado:

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\ \rightarrow\ \underline{D^2=T+2PS}$$

En nuestro caso, en la ecuación del enunciado $x^3+kx+k=0$, tenemos, en primer lugar, $\underline{S=0}$, $\underline{D=k}$, $\underline{P=-k}$ y, en segundo, $\underline{S_2=-2k}$, $\underline{S_3=-3k}$ y $\underline{T=k^2}$

Y se nos pide la ecuación cúbica con raíces $r_1=a+bc$, $r_2=b+ac$ y $r_3=c+ab$ que tendrá la forma $x^3-S'x^2+D'x-P'=0$ con:

$$S'=r_1+r_2+r_3=(a+bc)+(b+ca)+(c+ab)=S+D=0+k=k\ \Rightarrow\ \underline{S'=k}$$

$$D'=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=(a+bc)(b+ca)+(b+ca)(c+ab)+(c+ab)(a+bc)=$$
$$=(ab+a^2c+b^2c+bc^2a)+(bc+ab^2+ac^2+a^2bc)+(ac+abc^2+a^2b+ab^2c)=$$
$$=(ab+bc+ca)+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc(a+b+c)=$$
$$=(ab+bc+ca)-a^3-b^3-c^3+abc(a+b+c)=$$
$$=D-S_3+PS=k+3k+0=4k\ \Rightarrow\ \underline{D'=4k}$$

$$P'=r_1r_2r_3=(a+bc)(b+ca)(c+ab)=$$
$$=abc+a^2b^2+a^2c^2+a^3bc+b^2c^2+ab^3c+abc^3+a^2b^2c^2=$$
$$=abc+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a^2+b^2+c^2)+a^2b^2c^2=$$
$$=P+T+PS_2+P^2=-k+k^2+2k^2+k^2=4k^2-k$$

Luego: $x^3-S'x^2+D'x-P'=0$ $\qquad \underline{x^3-kx^2+4kx-(4k^2-k)=0}$

Segunda parte:

$a,b,c\in\Re$ son raíces a determinar de $x^3+kx+k=0$ y, además, $a+bc=\frac{21}{4}$

Recordemos que $\underline{S=a+b+c=0}$, $\underline{D=ab+bc+ca=k}$ y $\underline{P=abc=-k}$

Multiplicando por a tenemos: $a^2+abc=\frac{21}{4}a\ \rightarrow\ a^2-\frac{21}{4}a=k$

Por otro lado: $k=ab+bc+ca=a(b+c)+\frac{21}{4}-a=-a^2-a+\frac{21}{4}$

Igualando: $a^2-\frac{21}{4}a=k=-a^2-a+\frac{21}{4}\ \rightarrow\ 2a^2-\frac{17}{4}a=\frac{21}{4}\ \rightarrow$

$$a^2-\frac{17}{8}a=\frac{21}{8}\ \rightarrow\ \left(a-\frac{17}{16}\right)^2=\frac{21}{8}+\left(\frac{17}{16}\right)^2=\left(\frac{31}{16}\right)^2\ \rightarrow$$

$$a=\frac{17\pm31}{16}=\begin{cases}3\\-7/8\end{cases}$$

Caso $\underline{a=3}$ $\rightarrow$ $bc=\frac{9}{4}$ y $k=-abc=\frac{-27}{4}$

$$x^3+kx+k=0\ \rightarrow\ x^3-\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}=0\ \rightarrow\ 4x^3-27x-27=0$$

$$(x-3)(2x+3)^2=0\ \rightarrow\ \underline{a=3},\ \underline{b=c=-3/2}$$

Caso $\underline{a=-7/8}$ $\rightarrow$ $bc=\dfrac{49}{8}$ y $k=-abc=\dfrac{343}{64}$

$$x^3+kx+k=0 \quad\rightarrow\quad x^3+\frac{343}{64}x+\frac{343}{64}=0 \quad\rightarrow\quad 64x^3+343x+343=0$$

$(8x+7)(8x^2-7x+49)=0 \quad\rightarrow\quad \underline{a=-7/8}$, pero $\underline{b=c=\dfrac{7}{16}\pm\dfrac{7\sqrt{31}}{16}\cdot i}$ no serían reales.

Verifiquemos en este caso, el resultado de la primera parte:

$r_1=a+bc=\dfrac{21}{4}$, $r_2=b+ac=-6$ y $r_3=c+ab=-6$

$$S'=r_1+r_2+r_3=\frac{21}{4}-6-6=\frac{-27}{4}=k \qquad \checkmark$$

$$D'=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=\frac{-126}{4}+36-\frac{126}{4}=-27=4k \qquad \checkmark$$

$$P'=r_1r_2r_3=\frac{21}{4}\cdot(-6)\cdot(-6)=189=4k^2-k=4\left(\frac{-27}{4}\right)^2-\left(\frac{-27}{4}\right) \qquad \checkmark$$

Que son soluciones de la ecuación: $x^3-kx^2+4kx-(4k^2-k)=0$

$$x^3+\frac{27}{4}x^2-27x-189=0 \quad\rightarrow\quad 4x^3+27x^2-108x-756=0$$

$$(4x-21)(x+6)^2=0$$

*Además de la del proponente, se recibieron soluciones correctas de: **Andrés M. González Gallego** (IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes), **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell), **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES José Saramago. Arganda del Rey), **Nacho Bono** (FaMAF-UNC. Córdoba-Argentina), **Manuel Amorós Juan** (IES Navarro Santafé. Villena), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Alejandro Allepuz Pedreño** (IES Jiménez de la Espada. Cartagena), **Juan Navarro Loidi** (San Sebastián), **Manuel Español Salvador** (Barcelona), **Clemente Sacristán Moreno** (Guadalajara), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (IES Ruiz de Alda. S. Javier) y **Alberto Castaño Domínguez** (US)*

Se recibió también una solución incompleta.

■