# PROBLEMA DEL MES

*Junio – 2021*

*Soluciones*

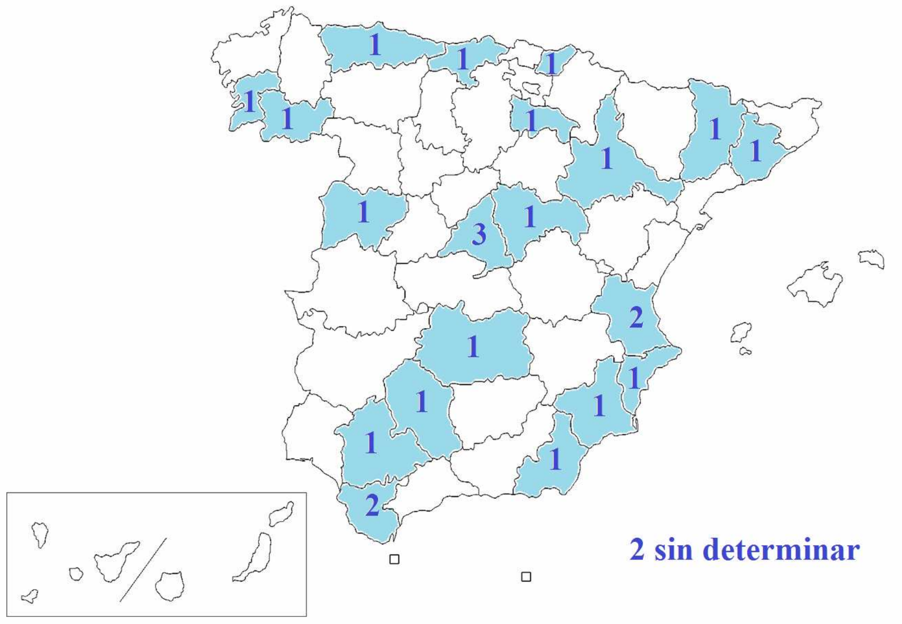
Real Sociedad
Matemática Española

## Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

| | Alevín | Infantil | Cadete | Juvenil | Júnior | Sénior |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 010 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 011 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 012 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 013 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

*Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.*

**53 respuestas de 26 participantes (25 chicos / 1 chica)**




**Alevín (5º/6º Primaria)**

A-013. Cortes rectilíneos.

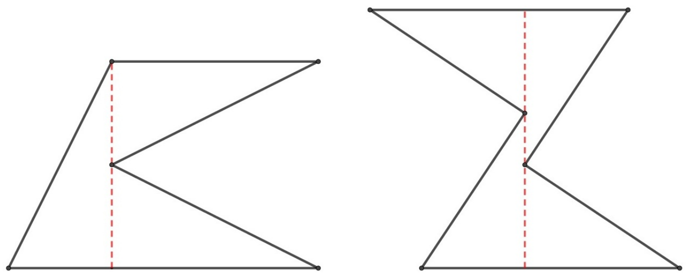
Aquí, como ves en la figura, tienes un cuadrilátero que con un solo corte rectilíneo se puede dividir en dos triángulos iguales.

¿Podrás dibujar un pentágono que con un solo corte rectilíneo se divida en tres triángulos iguales?

¿Y un hexágono que, también con un solo corte rectilíneo, se divida en cuatro triángulos iguales?

*Solución*

Si, en ambos casos, como bien se muestra en estos ejemplos:



*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense)*

*Se recibieron también tres soluciones incompletas y una incorrecta.*

*Además resaltar que **Iván López Márquez** (Colegio Inmaculada. Alicante) y **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud) lo logran con rectángulos no iguales y que, ingeniosamente, **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) dibuja el pentágono, ó el hexágono, y lo pliega antes de hacer el corte recto que produce los triángulos iguales.*

**Infantil (1º/2º ESO)**

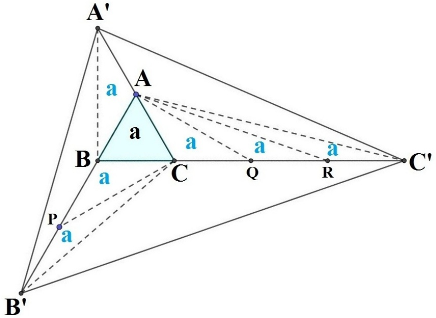
I-013. Prolongaciones.

En las prolongaciones de los tres lados de un triángulo equilátero $ABC$ de lado $\ell$ unidades de longitud, en el mismo sentido, y a partir de los vértices, se toman longitudes iguales a $\ell$, $2\ell$ y $3\ell$. Determina la relación que existe entre el área del triángulo que resulta al unir los extremos de dichas prolongaciones y la del triángulo $ABC$.

*Solución*

Sea el área del triángulo $[ABC] = a$

Haciendo la representación gráfica:

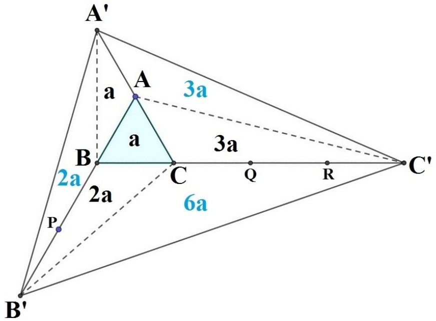



Tomando la primera prolongación como base: $a = [ABC] = [AA'B]$ pues ambos triángulos tienen misma base, $CA = AA'$, y misma altura.

Tomando la segunda prolongación como base: $a = [ABC] = [BPC] = [PB'C]$ pues los tres triángulos tienen misma base, $AB = BP = PB'$, y misma altura.

Y tomando la tercera prolongación como base: $a = [ABC] = [CQA] = [QRA] = [RC'A]$ pues los cuatro triángulos tienen misma base, $BC = CQ = QR = RC'$, y misma altura.

De nuevo, con todo:




Sobre la primera prolongación, con triángulos de bases y alturas idénticas:
$3a = [CAB'] = [AA'B'] \rightarrow [BA'B'] = 2a$

Sobre la segunda prolongación, con triángulos de bases, una doble de la otra, y alturas idénticas: $4a = [ABC']$ y $[BB'C'] = 8a \rightarrow [CB'C'] = 6a$

Finalmente, sobre la tercera prolongación, con triángulos de bases, una triple de la otra, y alturas idénticas: $2a = [BCA']$ y $[CC'A'] = 6a \rightarrow [AC'A'] = 3a$

Así, pues, $\underline{\dfrac{[ABC]}{[A'B'C']} = \dfrac{1}{18}}$

*Bien resuelto, además de por el proponente **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), por: **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Pablo Morales Martín** (2º Primaria. CEIP Agustín Arguelles. Alcorcón), **Javier Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud)*

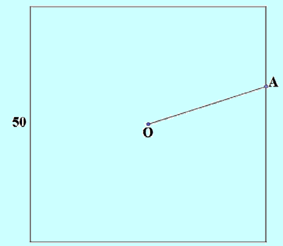
*Se recibieron también dos soluciones incorrectas y una con el archivo adjunto dañado.*



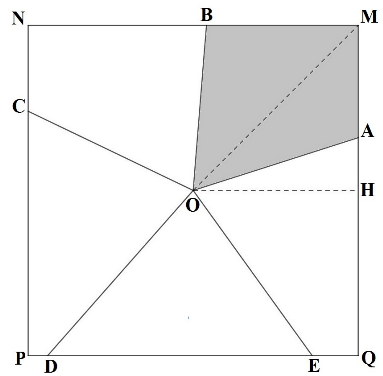
## C-013. Partición equitativa de una tarta.

Queremos repartir una tarta cuadrada de 50 cm de lado en 5 partes de igual área con cortes rectos que pasen por el centro. El primer corte ya está hecho como marca la figura, sabemos que mide $OA = \sqrt{689}$.

Determinar los restantes cortes.




*Solución*




Designamos con **M**, **N**, **P** y **Q** los vértices del cuadrado y, suponiendo el problema resuelto, con **A**, **B**, **C**, **D** y **E** los puntos de intersección de cada corte con el perímetro de la tarta.

Todas las porciones son de dos tipos:

- bien cuadriláteros descomponibles en dos triángulos cuando contienen un vértice como, por ejemplo, **OAMB**.
- o bien un sólo triángulo cuando no contienen vértice como por ejemplo **ODE**.

En todos los casos, los triángulos tienen la misma altura que vale 25 (**OH** la mitad del lado). Luego, la suma de sus bases (o su base única) ha de medir lo mismo y entre todas las bases forman el perímetro del cuadrado dado y, por todo ello, cada porción debe abarcar un trozo del perímetro de la tarta que mida una quinta parte del perímetro total, es decir 40 cm.

Resumiendo: $AM + MB = BN + NC = CP + PD = DE = EQ + QA = 40$

Sólo queda determinar **AM**. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo **OHA**:

$$\underline{AM} = 25 - AH = 25 - \sqrt{689 - 625} = 25 - \sqrt{64} = 25 - 8 = \underline{17}$$

Se obtiene:

| | |
|---|---|
| $\underline{MB} = 40 - 17 = \underline{23}$ | $\underline{BN} = 50 - 23 = \underline{27}$ |
| $\underline{NC} = 40 - 27 = \underline{13}$ | $\underline{CP} = 50 - 13 = \underline{37}$ |
| $\underline{PD} = 40 - 37 = \underline{3}$ | $\underline{DE = 40}$ |
| $\underline{EQ} = 50 - 40 - 3 = \underline{7}$ | $\underline{QA} = 40 - 7 = \underline{33}$ |

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Samuel Orellana Mateo** (IES Almoraima. Castellar de la Frontera), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Javier Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud)*

## Juvenil (1º/2º Bachillerato)

### Jv-013. Triángulo equilátero emergente.

Sea el triángulo $ABC$ con $\angle ACB = 120^\circ$ y $AC = 1$ Determina el valor de $BC$ para que al construir sobre $BC$ el triángulo rectángulo $BCD$, resulte el triángulo equilátero $ABD$. Y calcula el lado de dicho triángulo equilátero.

*Solución*

Denominamos $\ell = AB = BD = DA$, $x = BC$ e $y = DC$

Aplicamos el teorema del coseno en los triángulos:

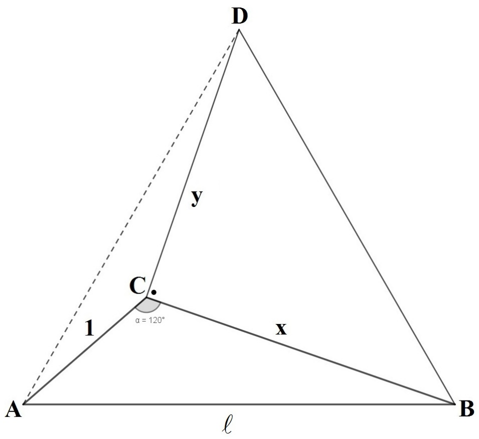
ABC $\quad \ell^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 120^\circ = $

$\quad = x^2 + x + 1$

BCD $\quad \ell^2 = x^2 + y^2$

ACD $\quad \ell^2 = y^2 + 1 - 2y\cos 150^\circ = $

$\quad = y^2 + \sqrt{3}\cdot y + 1$




Sumando la primera y última expresión:

$$2\ell^2 = x^2 + y^2 + x + \sqrt{3}\cdot y + 2 \quad \to \quad \ell^2 = x + \sqrt{3}\cdot y + 2$$

Volviendo a la primera: $\ell^2 = x^2 + x + 1 = x + \sqrt{3}\cdot y + 2 \quad \to \quad y = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{3}}$

E igualando primera y tercera: $\ell^2 = x^2 + x + 1 = \left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3}}\right) + 1$

$$x + 1 = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{3} \quad \to \quad x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Y descomponiendo hábilmente por Rufini: $(x^2 + x + 1)(x - 2)(x + 1) = 0$

Luego $x = BC = 2$, $y = DC = \sqrt{3}$ y $\ell^2 = 2 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + 2 = 7$

En conclusión, el lado del triángulo equilátero mide $\underline{\ell = \sqrt{7}}$

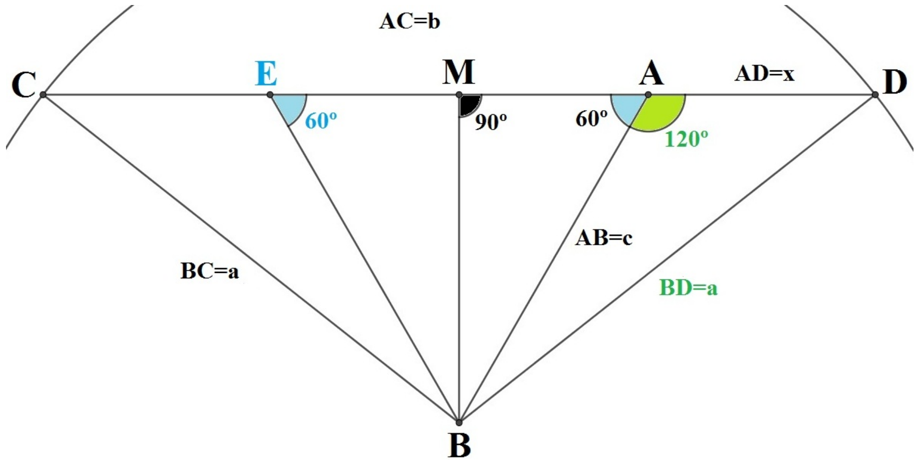
*Bien resuelto, además de por el proponente **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), por: **Samuel Orellana Mateo** (IES Almoraima. Castellar de la Frontera), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Hugo Fernández Becerro** (La Salle. Santander), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Nicolás Díez Andrés** (IES Esteban Manuel de Villegas. Nájera)*

*Se recibieron también tres soluciones incorrectas.*

## Júnior

### Jn-013. Cuestión clásica.

En el triángulo $ABC$ se sabe que $\hat{A} = 60^\circ < \hat{B}$. La circunferencia de centro $B$ y radio $BC$ corta de nuevo a la recta $AC$ en el punto $D \neq C$. Probar que $AB + AD = AC$.




*Solución-1*

Los ángulos del triángulo $ABC$ verifican que $\hat{C} < \hat{A} = 60^\circ < \hat{B}$ y, por tanto, con la notación habitual, $c = AB < AC = b$.

Señalamos un punto $E$ del lado $AC$ tal que $AE = AB$. Y, Así, se forma un triángulo equilátero $ABE$ que evidencia que los triángulos $BAD$ y $BEC$ son semejantes por tener dos ángulos iguales. Además, como $BC = BD$, los triángulos son congruentes y se tiene que $AD = CE$.

Entonces: $AB + AD = AE + CE = AC$

*Solución-2*

Sea $M$ el punto medio de $CD$ y pie de la altura de $B$ en el triángulo isósceles $BCD$.

Por una parte, tenemos que $AM = AB \cdot \cos 60° = AB/2$ y, por otra, como $CD$ es el doble de $CM$, tenemos que $AC + AD = CD = 2 \cdot CM = 2(AC - AM) = 2 \cdot AC - AB$ de donde se obtiene la condición pedida: $AB + AD = AC$

*Solución-3*

*Para los fanáticos del teorema del coseno*

Sean $a$, $b$ y $c$ las longitudes de los tres lados del triángulo $ABC$; y llamamos $x = AD$. El problema quedará resuelto si probamos que $\underline{x = b - c}$

Aplicando el teorema del coseno en los triángulos $ABC$ y $ABD$ tenemos que:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60° \quad \rightarrow \quad a^2 = c^2 + b^2 - bc$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 120° \quad \rightarrow \quad a^2 = c^2 + x^2 + cx$$

Restando y operando:

$$0 = b^2 - x^2 - bc - cx = (b - x)(b + x) - c(b + x) = (b + x)(b - x - c)$$

Puesto que $b + x > 0$, debe cumplirse que $b - x - c = 0$, es decir, $\underline{x = b - c}$ c.q.d.

*Bien resuelto por:* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Alejandro Breen Herrera*** *(The Yago School. Sevilla),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(IES A Carballeira. Ourense),* ***Ángel García Andreu*** *(IES Vicent Andrés Estellés. Burjassot),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de la Palma. Salamanca),*

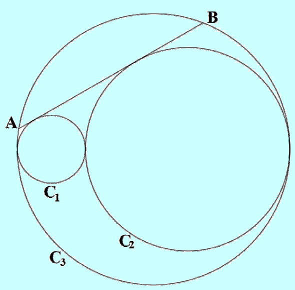
## Sénior

### S-013. Tres circunferencias tangentes.

Dadas dos circunferencias $C_1$ y $C_2$ de radios $a$, $b$ (con $a < b$) tangentes externamente y una tercera $C_3$ de radio $a + b$ tangente a ambas como se indica en la figura, se traza la recta tangente a $C_1$ y $C_2$ que corta a $C_3$ en los puntos $A$ y $B$. Se pide:

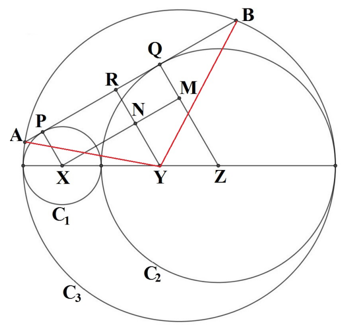
a) Dar la longitud de la cuerda $AB$ en función de $a$ y $b$.

b) Hallar el valor de $\frac{a}{b}$ para el cual $AB = a + b$.




*Solución*

a) Trataremos de hallar la longitud de la apotema correspondiente a la cuerda $AB$. Para ello dibujaremos la construcción clásica de las tres circunferencias tangentes.




Dados los radios de las circunferencias $PX = a$, $QZ = b$ y, por tanto, $AY = BY = a + b$, se tiene: $MZ = b - a$, $XY = b$ y $XZ = b + a$

Por la semejanza de $XNY$ y $XMZ$:

$$\frac{NY}{MZ} = \frac{XY}{XZ} \Leftrightarrow \frac{NY}{b - a} = \frac{b}{b + a}$$

De aquí, $NY = \dfrac{b^2 - ab}{b + a}$ y, así, la apotema: $RY = a + NY = a + \dfrac{b^2 - ab}{b + a} = \dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$

Finalmente, por Pitágoras: $AB = 2 \cdot AR = 2 \cdot \sqrt{AY^2 - RY^2}$

$$\underline{AB} = 2 \cdot \sqrt{(a + b)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right)^2} = \underline{\frac{2}{a + b} \cdot \sqrt{(a + b)^4 - (a^2 + b^2)^2}}$$

O bien: $\underline{AB} = \dfrac{2}{a + b} \cdot \sqrt{4a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3} = \underline{\dfrac{4}{a + b} \cdot \sqrt{ab(a^2 + ab + b^2)}}$

b) La condición del enunciado es $AB = a + b$:

$$\frac{2}{a + b} \cdot \sqrt{(a + b)^4 - (a^2 + b^2)^2} = a + b \Leftrightarrow 4 \cdot (a + b)^4 - 4 \cdot (a^2 + b^2)^2 = (a + b)^4$$

equivalente a: $3 \cdot (a + b)^4 = 4 \cdot (a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot (a + b)^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ y dividiendo por $b^2$: $\sqrt{3} \cdot \left(\dfrac{a}{b} + 1\right)^2 = 2 \cdot \left(\dfrac{a^2}{b^2} + 1\right)$ y haciendo $r = \dfrac{a}{b}$, queda:

$$\sqrt{3} \cdot (r + 1)^2 = 2 \cdot (r^2 + 1) \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3}) \cdot r^2 - 2\sqrt{3} \cdot r + 2 - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$r^2 - (4\sqrt{3} + 6) \cdot r + 1 = 0$ y, como la condición inicial $a < b$ exige que $r < 1$, la única solución válida es: $\underline{r = 2\sqrt{3} + 3 - \sqrt{20 + 12 \cdot \sqrt{3}} \approx 0.078}$

*Bien resuelto por:* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES JS. Arganda del Rey),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***César Catalán Capaccioni*** *(Valencia),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Manuel Español Salvador*** *(Barcelona),* ***Juan Navarro Loidi*** *(San Sebastián)*

*Se recibió también una solución incompleta y un email sin el archivo adjunto que la debía incluir.*