



Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Julio-Agosto – 2021

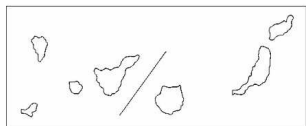
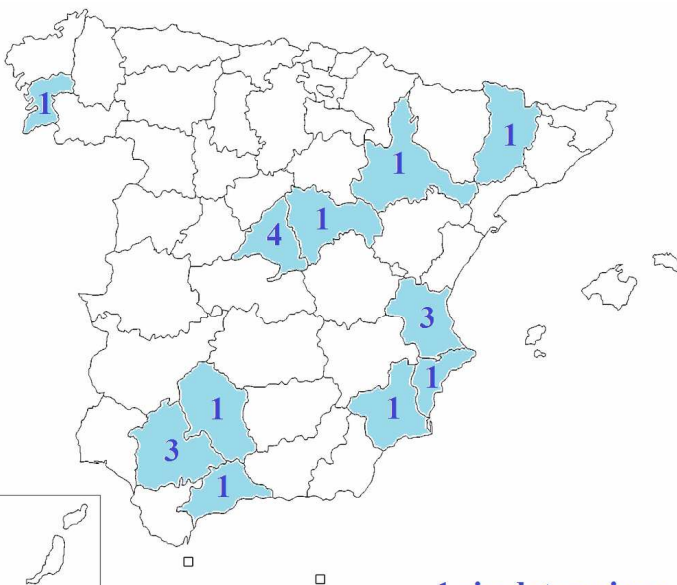
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
011	✓	✓	✓	✓	✓	✓
012	✓	✓	✓	✓	✓	✓
013	✓	✓	✓	✓	✓	✓
014	✓		✓		✓	

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

19 participantes (16 chicos / 3 chicas) 26 respuestas



1 sin determinar

Alevín (5º/6º Primaria) / Infantil (1º/2º ESO)

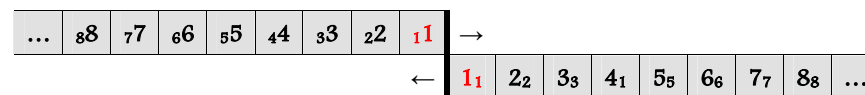
A-014 / I-014. Cruce de trenes.

Dos largos trenes con veinte vagones cada uno, –incluida la locomotora en el cómputo entre ellos–, todos de igual longitud, circulan por vías paralelas y en sentido contrario. Pasados exactamente **36** segundos desde que sus cabeceras iniciaran el cruce, Lucía, que viaja en el cuarto vagón, se encuentra a la misma altura con el vagón del otro tren en el que viaja JuanMi. Y, después, **44** segundos más tarde, los últimos vagones se separan por completo. ¿En qué vagón viajaba JuanMi?

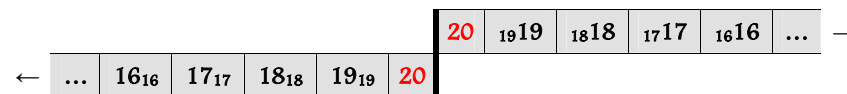
Solución

Numeramos, desde la cabecera, los **20** vagones del tren y, con subíndice, los **19** empalmes o enganches entre ellos.

• Situación inicial:



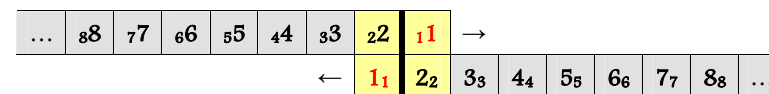
• Situación final: $36 + 44 = 80$ segundos después.



El cruce entre vagones se produce cada $20/80 = 0.25$ segundos.

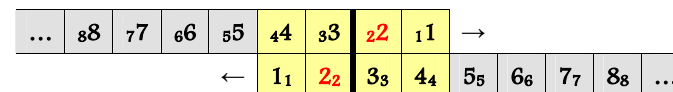
Yendo, paso a paso, en periodos de **0.25** segundos vemos qué situaciones se dan:

• Situación al primer cruce: **0.25** segundos.



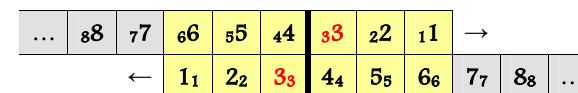
Solapados dos vagones de cada tren.

• Situación al segundo cruce: **0.50** segundos.



Solapados cuatro vagones de cada tren.

• Situación al tercer cruce: **0.75** segundos.



Solapados seis vagones de cada tren.

- Situación al cuarto cruce: **1.00** segundo.

...	8 ₈	7 ₇	6 ₆	5 ₅	4 ₄	3 ₃	2 ₂	1 ₁	→
←	1 ₁	2 ₂	3 ₃	4 ₄	5 ₅	6 ₆	7 ₇	8 ₈	...

Solapados ocho vagones de cada tren.

- Prosiguiendo así, $36 \times 0.25 = 9$ cruces. Y, habiendo visto qué vagones eran extremos de cada solapamiento, podemos concluir que la situación será:

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9 ₉	8 ₈	7 ₇	6 ₆	5 ₅	4 ₄	3 ₃	2 ₂	1 ₁
1 ₁	2 ₂	3 ₃	4 ₄	5 ₅	6 ₆	7 ₇	8 ₈	9 ₉	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Solapados dieciocho vagones de cada tren.

Y vemos que, en ese momento, el cuarto vagón del primer tren donde viaja Lucía coincide con el decimoquinto vagón del segundo tren. Por tanto, JuanMi viaja en ese vagón, en el decimoquinto del segundo tren.

Bien resuelto por: **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **F. Damián Aranda Ballesteros** (I.P.E.P. Córdoba), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **Pablo Alanís Curiacedo** (IES Carmen Laffon. Sevilla), **Rodrigo Cía Vieco** (Domus. Godella), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Javier Delgado Tabernero** (Novaschool Añoreta. Rincón de la Victoria), **Javier Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud)

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO) / Juvenil (1º/2º Bachillerato)

C-014 / Jv-014. Cuestión pesada.

¿Cuál es el menor número de pesas con el que has de contar para poder distribuir las en **3**, **4** y **5** pilas de igual peso? Pon un ejemplo con cierto gramaje que lo ilustre debidamente

Solución.

Demostraremos que con menos de nueve pesas no es posible.

Supongamos lo contrario, esto es, que lo podemos lograr con no más de ocho pesas.

Sea **60m** la masa total de todas las pesas. Como tendrás que distribuir las en **5** pilas de igual peso, es claro que no podrás tener pesas que pesen más de **12m**. En consecuencia, distribuir las en **4** pilas de igual peso, esto es de **15m**, exige que en cada pila haya al menos dos pesas. Por tanto se precisarán al menos ocho pesas en total. Así, si disponemos de ocho pesas, al distribuir las en **4** pilas de igual peso tendremos exactamente dos pesas en cada una de ellas. Y cuando distribuyamos estos ocho pesos en **5** pilas de igual peso, habrá al menos dos de ellas con una sola pesa, esto es, tendrá que haber, al menos, dos pesas con una masa de **12m**.

Demostremos que el conjunto ha de contener al menos seis pesas con una masa múltiplo de **3m**, esto es, de la forma **3km**, donde **k** es un número natural.

- Supongamos primero que el conjunto contiene al menos tres pesas con una masa de **12m**. Luego para montar las **4** pilas de igual peso se precisarán, al menos, tres pesos con una masa de **3m**, lo que significa ya al menos seis pesos con una masa de la forma **3km**.
- Ahora consideremos el caso en el que el conjunto contiene exactamente dos pesos de masa de **12m**. Entonces este conjunto contiene dos pesas con una masa de **3m**. Esto significa que, cuando se dividan en **5** pilas de igual peso, las masas de pesas que se encuentran en las mismas pilas con una masa de **3m** son iguales a **9m**. En consecuencia, el conjunto contiene al menos seis pesos con una masa de la forma **3km**.
- Por tanto, en cualquier caso, el conjunto contiene al menos seis pesos con una masa de la forma **3km**, donde el número **k** es un número natural. Entonces, al dividir en tres pilas, una de ellas debe estar formada únicamente por pesos de este tipo, lo que significa que su masa no puede ser igual a **20m**.

Queda por ver que es posible con nueve pesas.

Lo es, por ejemplo con un juego de pesas de: **3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 12** gramos.

- Al distribuir las de **3** pilas los montones serían: **3-5-6-6 / 4-7-9 / 8-12**
- Al distribuir las de **4** pilas los montones serían: **3-12 / 4-5-6 / 6-9 / 7-8**
- Al distribuir las de **5** pilas los montones serían: **3-9 / 4-8 / 5-7 / 6-6 / 12**

Solución de Malena del Olmo

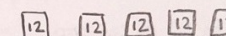
Para hacer la resolución del problema más fácil, utilizaremos solamente pesas con valores positivos y enteros (nos valdrán las pesas de 1g, de 2g, de 3g...).

Si esas pesas se pueden distribuir en 3, 4 y 5 pilas de igual peso, entonces tendremos que tener un número divisible entre 3, 4 y 5 como suma total del peso. Hallamos el mínimo común múltiplo de 3, 4 y 5:

$$\text{m.c.m.}(3, 4, 5) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

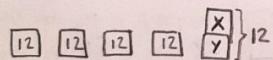
Imaginemos que el peso total de las pesas es 60g. ¿Cuál es el mínimo número de pesas necesarias para apilarlas en 3, 4 y 5 columnas?

- Lógicamente, necesitaremos al menos 5 pesas para formar 5 pilas, pero esta no es la solución porque serían 5 pesas de 12g,
- y no podemos formar 4 columnas de igual peso con ellas, ni tampoco 3 columnas de igual peso.



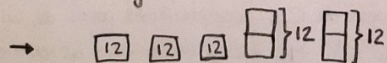
[Recordemos que las 4 pilas serían de 15g cada una, y las 3, de 20g.]

- Proboemos ahora con 6 pesas. Para formar 5 pilas, 4 serían de 12g y las otras 2 sumarían 12g, de esta manera:

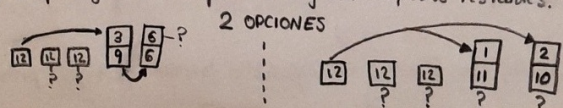


Independientemente de cuánto pesaran las pesas X e Y, sería imposible formar las 4 o las 3 pilas de igual peso porque no hay ni 4 pesas de 3g para añadir a las pilas de 12g, ni suficientes pesas que sumen 8g para 3 de 12g.

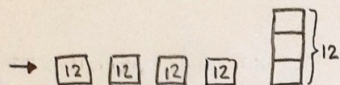
- Algo muy similar ocurre con 7 pesas, de las cuales al menos 3 tendrían que ser de 12g.



Para formar las 4 pilas necesitamos añadir pesas que sumen 3 a las de 12g, y después formar otra pila de 15g con las pesas restantes.

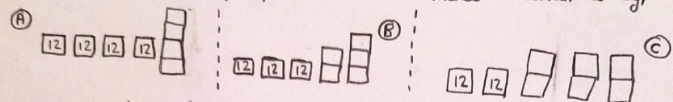


Con ninguna de las dos opciones podemos acabar de formar las 4 pilas.



Si colocamos las pesas de esta manera, tampoco es posible formar las 4 pilas de 15g, ya que las pesas de 12g no se pueden juntar entre ellas y no tenemos 4 pesas de 3g.

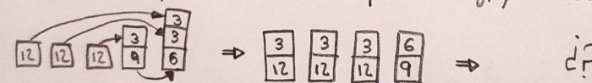
- Descartadas las 7 pesas, vayamos con 8. Al menos 2 serían de 12g, así:



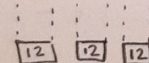
+Para que se pudieran formar las 4 pilas de 15g con las pesas de (A), las 4 de la quinta columna tendrían que pesar 8g cada una. Sin embargo, esta no es la opción correcta porque no se podrían formar las 3 pilas de 20g después.

+En (B) el problema estaría en encontrar la combinación adecuada para las dos últimas pilas de manera que hubiese pesas (o sumas de pesas) que valieran 3g, para sumarlos a las pesas de 12g y obtener 3 pilas de las 4 de 15g. No podemos permitirnos tener pesas de 1g y de 2g porque no tenemos pesas suficientes (ni siquiera para tener una de 1g, una de 2g y dos de 3g) si queremos que las pilas valgan 12g.

Por lo tanto, sería imprescindible tener 3 pesas de 3g y el resto se completaría así:



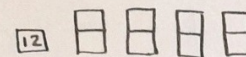
Para 3 pilas de 20g, las pesas de 12g irían separadas. ¡La pesa de 9g no se puede colocar! Descartamos esta opción.



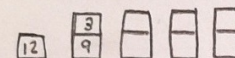
+Por último, probemos el diseño (C). Como nos harían falta pesas de 1g, 2g o 3g para las pilas de 15g que llevaran una pesa de 12g, necesitaríamos pesas de un mínimo de 9g para completar las pilas de 12g. Más tarde, llegaríamos al mismo problema que en el apartado anterior: $12 + 9 > 20$. No podríamos formar las 3 pilas de 20g.

En conclusión, con 8 pesas es imposible formar 3, 4 y 5 pilas de igual peso. ¿Se podrá con 9?

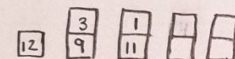
- La manera de colocar 9 pesas en 5 columnas que contenga el mínimo número de pesas de 12g es la siguiente:



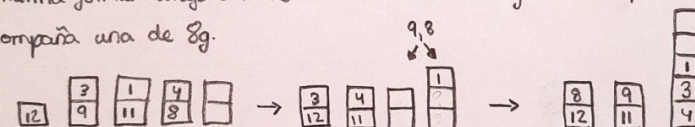
Sería provechoso tener una pesa de 3g para formar más tarde una de las 4 pilas de 15g. Si introducimos una pesa de 3g también debemos incluir una de 9g.



Ahora, como tenemos una pesa de 9g, podríamos colocar una de 11g para después formar una de las 3 columnas de 20g. Esto implica poner una pesa de 1g.



A continuación, lo mejor es añadir una pesa de 4g, porque $11 + 4 = 15$, y eso nos permitiría formar luego otra de las columnas de 15g. A esta pesa de 4g la acompaña una de 8g.



Jn-014 / S-014. En busca del punto perdido.

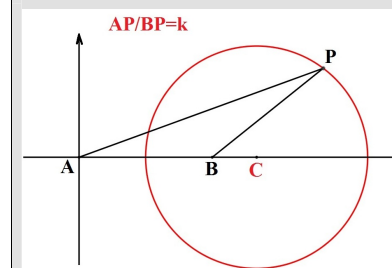
Encontrar, mediante algún procedimiento geométrico, un punto del plano que esté a distancias 3, 4 y 5 de cierta unidad de longitud de tres vértices de un cuadrado dado.

Solución

Hagamos previamente la siguiente observación:

El lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos $A(0,0)$ y $B(1,0)$ están en una proporción fija k es una circunferencia. Concretamente, si $PA/PB=k$ ($k>0$ y $k\neq 1$) entonces el centro está en $C\left(\frac{k^2}{k^2-1}, 0\right)$ y el radio es: $r = \frac{k}{k^2-1}$

Demostración:



$$\begin{aligned} \text{Con } P(x,y), \text{ si } \frac{PA}{PB} = k &\rightarrow \left(\frac{PA}{PB}\right)^2 = k^2 \rightarrow \\ \frac{x^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} &= k^2 \rightarrow \\ x^2 + y^2 &= k^2(x^2 - 2x + 1) + k^2y^2 \rightarrow \end{aligned}$$

Cuadrando:

$$\begin{aligned} (k^2-1)x^2 + (k^2-1)y^2 - 2k^2x + k^2 &= 0 \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2k^2}{k^2-1}x = -\frac{k^2}{k^2-1} \rightarrow \\ \left(x - \frac{k^2}{k^2-1}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)^2 - \frac{k^2}{k^2-1} = \left(\frac{k}{k^2-1}\right)^2 \end{aligned}$$

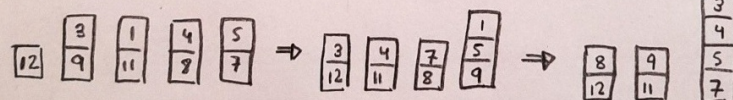
que, efectivamente, es la circunferencia de centro $C\left(\frac{k^2}{k^2-1}, 0\right)$ y radio $r = \frac{k}{k^2-1}$

Haciendo uso de esta observación podemos encontrar el punto pedido del cuadrado:

- Dibujamos un cuadrado cualquiera y sobre el lado donde confluyan las aristas de de 3 y 4 u.d.l. trazamos la circunferencia correspondiente a los puntos del plano cuyas distancias a los vértices de dicho lado estén en proporción 3/4
- Hacemos lo mismo, con el otro lado partiendo ahora de la proporción 4/5

Obtenemos así dos circunferencias. La intersección de las mismas nos dará el punto buscado.

Las dos pesas que nos faltan han de sumar 12g. Pueden ser dos de 6g o una de 5g y otra de 7g. Lo último quedaría así:



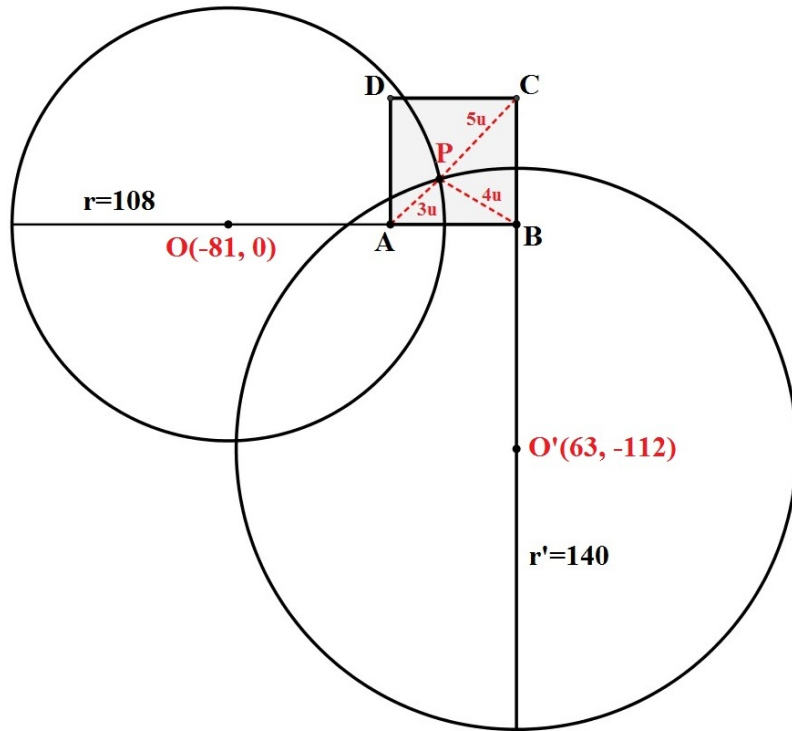
¿Es posible distribuir 9 pesas en 3, 4 y 5 columnas de igual peso!

Como hemos demostrado que no se puede hacer con menos pesas, podemos afirmar que 9 es la cantidad mínima de pesas necesarias y, por tanto, la solución del problema.

Bien resuelto por: **Malena del Olmo Barbero** (IES Blas de Otero. Madrid), **Javier Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud)

Se recibieron también cinco soluciones incorrectas.

Nota.- Este dibujo muestra la solución utilizando un cuadrado de lado 63



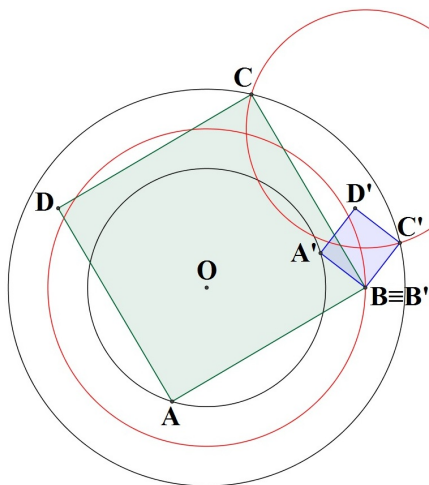
Así quedan contruidos dos cuadrados: **ABCD** y **A'B'C'D'** que satisfacen la condición exigida. En efecto, se verifica:

$$\begin{array}{llll} OA = 3 & OB = 4 & OC = 5 & \text{y} \\ OA' = 3 & OB' = 4 & OC' = 5 \end{array}$$

Bien resuelto por: **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES José Saramago, Arganda del Rey), **F. Damián Aranda Ballesteros** (I.P.E.P. Córdoba), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor, Torre Pacheco)

Se recibieron también cinco soluciones incompletas o no geométricas y una incorrecta.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros (IPEP, Córdoba)



Con centro en un punto **O** trazamos tres circunferencias concéntricas de radios **3**, **4** y **5**.

Elegimos un punto **B ≡ B'** cualquiera de la circunferencia intermedia, la de radio **4**, y con centro en dicho punto efectuamos un giro de **90°** de la pequeña, la de radio **3**.

Dicho movimiento la transforma en otra, también de radio **3**, que corta a la mayor, la de radio **5**, en los puntos **C** y **C'**.

Como se ve en la figura, el punto **C** es el transformado del punto **A** y el punto **C'** del **A'**