Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Septiembre – 2021

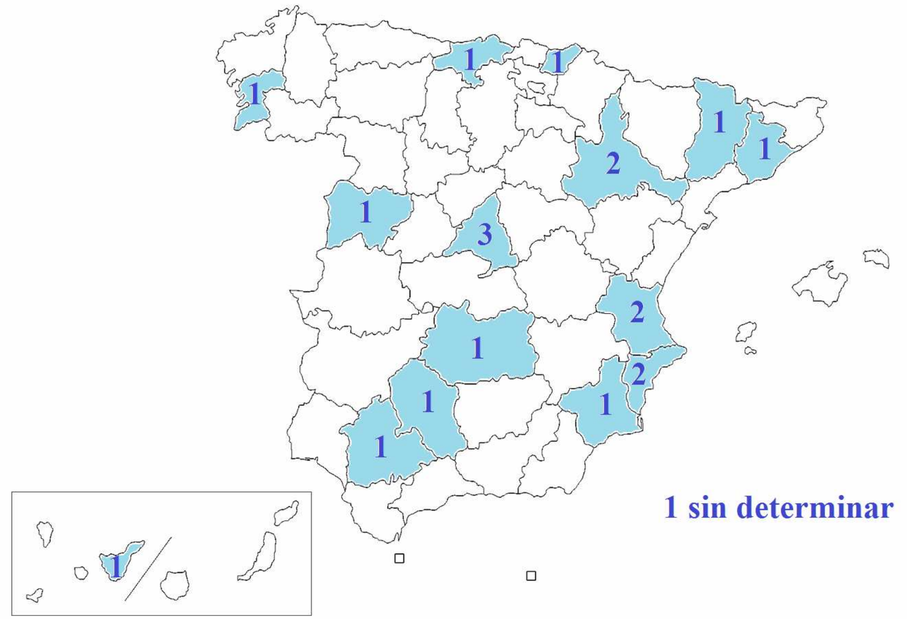
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
012	✓	✓	✓	✓	✓	✓
013	✓	✓	✓	✓	✓	✓
014	✓		✓		✓	
015	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

21 participantes (19 chicos / 2 chicas) 47 respuestas



Alevín (5º/6º Primaria)

A-015. Aún 2021.

¿Cuántos números de dos cifras harían falta como mínimo para que su suma diera exactamente 2021? ¿Y cómo máximo?

Solución

Para el **mínimo** hemos de utilizar números de dos cifras lo más grandes posibles, esto es, veinte 99 y un 41.

Total <u>21</u> números

2021	99
1980	20
0041	

Y para el **máximo** hemos de utilizar números de dos cifras lo más pequeños posibles, esto es, doscientos un 10 y un 11.

2021	10
2010	201
0011	

Total <u>202</u> números

*Bien resuelto por: **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **F. Damián Aranda Ballesteros** (I.P.E.P. Córdoba), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Pau Gregori Bataller** (IES Ausias March, Gandía), **Andrey Rosario Panina** (IES Valle Guerra. Tenerife), **Lorena Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Infantil (1º/2º ESO)

I-015. Números talentosos.

Diremos que un número de cuatro cifras es **talentoso** si lo podemos partir en dos trozos de manera que las sumas de los dígitos de cada trozo sean idénticas. Por ejemplo, el 1230 es talentoso porque 1+2=3+0 y el 2349 también lo es porque 2+3+4=9. ¿Cuál es el número talentoso más pequeño que cumple que el siguiente a ese número también es talentoso?

Solución

Si $\overline{abcd}$ es talentoso, esto es: $a+b+c=d$, $a+b=c+d$ ó $a=b+c+d$ y $d<9$, entonces $e=d+1<10$ y $\overline{abce}$ no puede ser talentoso. Luego $d=9$.

Y como el número ha de tener cuatro cifras y queremos el más pequeño, probamos con $a=1$, es decir, el número será de la forma: $\overline{1bc9}$ y el siguiente: $\overline{1b(c+1)0}$ ó, con menos sentido, $\overline{1(b+1)00}$

Lo que implica $b+c=8$ y $1+b=c+1$, es decir, $b=c$.

Luego $b=c=4$, esto es: $\underline{1449}$ talentoso y, el siguiente, $\underline{1450}$, también talentoso.

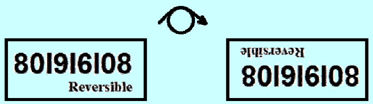
Bien resuelto por: ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Pau Gregori Bataller*** *(IES Ausias March, Gandía),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Andrey Rosario Panina*** *(IES Valle Guerra. Tenerife)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-015. Números reversibles.

Si das media vuelta a un folio donde está escrito un número, como bien puedes comprobar, los dígitos **0**, **I** y **8** no cambian y los dígitos **6** y **9** se intercambian. ¿Cuántos números de nueve cifras, como el de este ejemplo que te mostramos a continuación, son **reversibles,** esto es, se leen igual en un folio en posición normal como al darle media vuelta?



Solución

La reversibilidad exige que:

- los dígitos de las posiciones 1ª-9ª, 2ª-8ª, 3ª-7ª y 4ª-6ª sean los mismos.
- como queremos números de nueve cifras, la 1ª y la 9ª no pueden ser **0**.
- la 5ª no sea ni **6** ni **9**, pues cambiaria su valor al dar la vuelta al folio

Por tanto tenemos estas posibilidades:

Posición:									
Dígitos posibles:	I689	0I689	0I689	0I689	0I8	0I689	0I689	0I689	I689
Cantidad:	4	5	5	5	3	1	1	1	1

Total: $4 \cdot 5^3 \cdot 3 = \underline{1500}$

Bien resuelto por: ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de Palma. Salamanca),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba),* **Antonio González Montalbán** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud)*

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-015. Minimax Positivo Negativo.

Determina el mínimo valor positivo y el máximo valor negativo de la suma $a+b$, siendo a y b valores enteros que verifican la relación: $ab+43a+47b=2020$

Solución

Así: $(a+47)(b+43) = ab+43a+47b+47 \cdot 43 = 2020+2021 = 4041 = 3^2 \cdot 449$

Tabulando los positivos, aunque pensando un poco no se precisen todos:

$a+47$	$b+43$	a	b	$a+b$
1	4041	−46	3998	3952
3	1347	−44	1304	1260
9	449	−38	406	368
449	9	402	−34	368
1347	3	1300	−40	1260
4041	1	3994	−42	3952

Y, análogamente, los negativos:

−1	−4041	−48	−4084	−4132
−3	−1347	−50	−1390	−1440
−9	−449	−56	−492	−548
−449	−9	−496	−52	−548
−1347	−3	−1394	−46	−1440
−4041	−1	−4088	−4131	−4132

Tenemos que el mínimo valor positivo y el máximo valor negativo de $a+b$ son, respectivamente, $\underline{368}$ y $\underline{-548}$ y ambos se consiguen para dos valores de a y b

Bien resuelto por: ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de Palma. Salamanca),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud)*

Se recibió también una solución mal leída, con respuesta maxmini.

Júnior

Jn-015. Quince enteros

Como bien puedes constatar, los inversos de los enteros 6, 3 y 2 respectivamente están en progresión aritmética. Busca quince enteros cuyos inversos estén en progresión aritmética.

Solución

Claramente $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ y $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ están en progresión aritmética de diferencia $\frac{1}{6}$. Y este ejemplo puede sugerirnos alguna idea en la búsqueda de los quince enteros.

Los enteros de la forma $a_n = \frac{15!}{n}$ con $1 \le n \le 15$, que claramente son enteros, nos valen, sus inversos $\frac{1}{a_n}$ están en progresión aritmética pues, como bien podemos ver, su diferencia, $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{n+1}{15!} - \frac{n}{15!} = \frac{1}{15!}$ es constante.

El resultado es generalizable a cualquier otro número k *de enteros:* $a_n = \frac{k!}{n}$ *con* $1 \le n \le k$

Bien resuelto por: ***David Pérez Caballero*** *(IES Muriedas. El Astillero),* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de Palma. Salamanca),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Jordi Agustí Abella*** *(C.F.A. La Seu de Urgell),* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud)*

Sénior

S-015. Sin calculadora.

Prueba, sin hacer uso de cualquier tipo de calculadora en ningún paso intermedio, que:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^\circ} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 40^\circ} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 80^\circ} > 3$$

<u>*Solución*</u>

Los tres sumandos de la parte izquierda de la desigualdad son positivos y sabemos por la desigualdad de las medias aritméticas y geométricas que para $a, b, c > 0$:

$$MA = \frac{a+b+c}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = MH \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$$

dándose la igualdad sólo cuando $a = b = c$

Así pues, en nuestro caso:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^\circ} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 40^\circ} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 80^\circ} > \frac{9}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^\circ + \log_{\frac{1}{2}} \cos 40^\circ + \log_{\frac{1}{2}} \cos 80^\circ} =$$

$$= \frac{9}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}$$

Y conocida la expresión que transforma el producto de cosenos en suma:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2}\left[\cos 60^\circ + \cos 20^\circ\right] \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right] \cdot \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left[\cos 100^\circ + \cos 60^\circ\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos 100^\circ + \frac{1}{4}\cos 60^\circ = \frac{1}{4}\cos 60^\circ = \frac{1}{8}$$

Y, por tanto, $\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

Luego:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^\circ} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 40^\circ} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 80^\circ} > \frac{9}{\log_{\frac{1}{2}} \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ} = \frac{9}{3} = 3 \text{ cqd}$$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***David Pérez Caballero*** *(IES Muriedas. El Astillero),* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de Palma. Salamanca),* ***Pedro Sempere Valdés*** *(IES Antonio José. Cavanilles. Alicante),* ***Jordi Agustí Abella*** *(C.F.A. La Seu de Urgell),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***César Gil*** *(Barcelona),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba),* ***Óscar Fco Valencia Rey*** *(Airbus. Getafe),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(US),* ***Javier Badesa Pérez*** *(C. Santa Ana. Calatayud),* ***Juan Navarro Loidi*** *(San Sebastián)*