Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Octubre – 2021

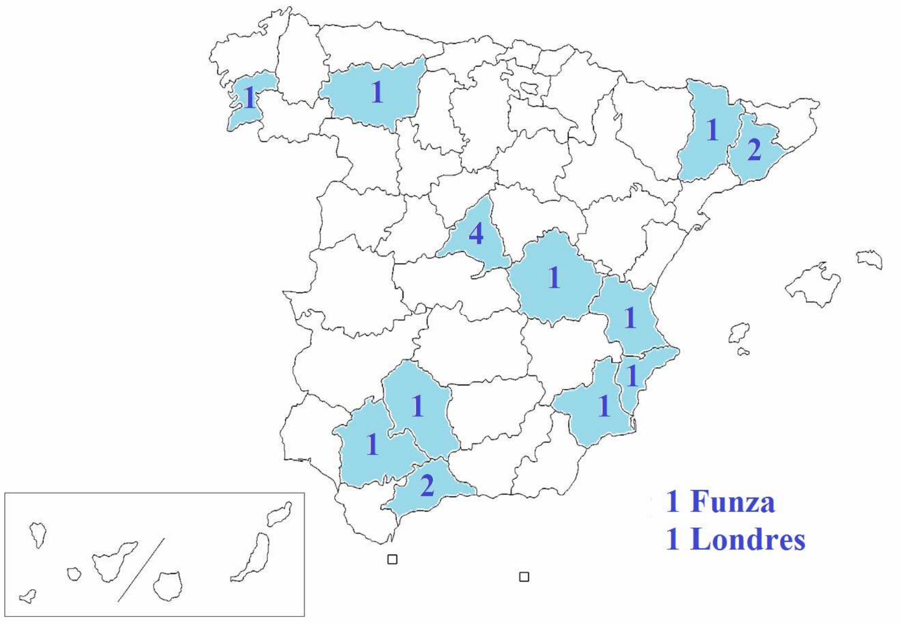
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Junior	Senior
015	✓	✓	✓	✓	✓	✓
016	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

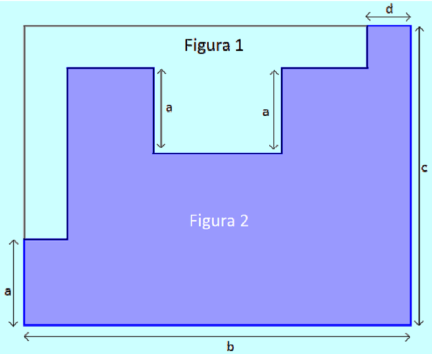
37 respuestas de 19 participantes (18 chicos / 01 chica)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-016. Figuras enmarcadas.

Como bien puedes ver en este gráfico de la derecha, las Figuras 1 y 2 están enmarcadas en un rectángulo.



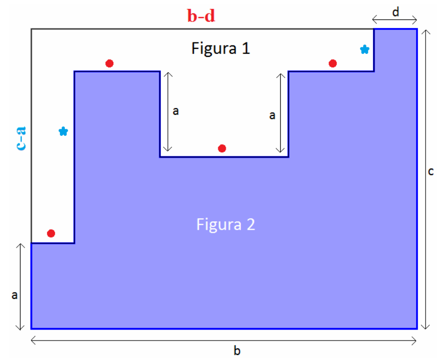
Se te piden dos cosas:

a) Expresa los perímetro P_1 y P_2 de las Figuras 1 y 2 respectivamente, en función de a, b, c y d

b) Si se conocen los dos perímetros, $P_1 = 60$ cm y $P_2 = 72$ cm, determina el valor de la suma $a + d$

__Solución__

Observamos que en el rectángulo que envuelve las dos figuras:



- El lado superior queda dividido en dos segmentos de longitudes $b - d$ y d
- El lado izquierdo queda dividido en dos segmentos de longitudes a y $c - a$

Y que las longitudes de los segmentitos marcados con:

- un punto rojo suman $b - d$
- una estrella azul suman $c - a$

a) Por tanto: $\underline{P_1} = 2(b-d) + 2(c-a) + 2a = \underline{2(b+c-d)}$

$\underline{P_2} = 2b + 2c + 2a = \underline{2(a+b+c)}$

b) Ahora, si: $P_1 = 60 = 2(b+c-d)$ y $P_2 = 72 = 2(a+b+c)$, restando:

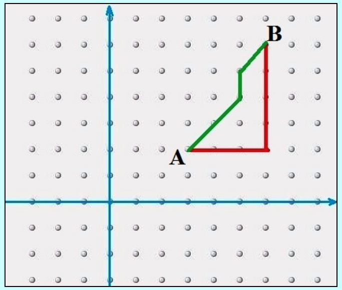
$$P_2 - P_1 = 72 - 60 = 12 = 2a + 2d \quad \rightarrow \quad \underline{a + d = 6}$$

Bien resuelto, además de por el proponente ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba), por:* ***Iván López Márquez*** *(C. Inmaculada. Alicante),* ***Edward Camilo Rodríguez*** *(Colegio Nuestra Señora del Rosario. Funza),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra) y* ***Pablo Morales Martín*** *(CEIP Agustín de Arguelles. Alcorcón)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y una incorrecta.

I-016. Distancias cortas.

En este plano con puntos de coordenadas enteras, para ir de un punto a otro, podemos movernos en horizontal, vertical o diagonal (únicamente la de 45°). La distancia entre dos puntos es el camino entre ellos de menor longitud. Así por ejemplo, como vemos en el dibujo, la distancia entre los puntos $A(3,2)$ y $B(6,6)$ es la que indica el camino verde: $1+3\sqrt{2}\cong 5'24$, menor que la que indica el camino rojo que es de 7 u.d.l.

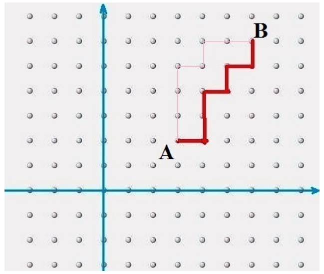


Prueba tú también con cuantos otros pares de puntos desees con el fin de obtener la fórmula general que se ha de aplicar para determinar la distancia entre dos puntos $P(a,b)$ y $Q(c,d)$ cualesquiera.

Solución

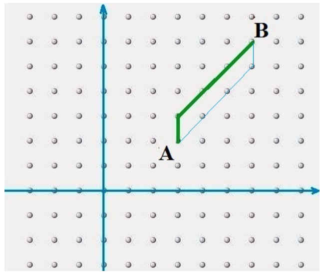
Dos consideraciones a tener en cuenta:

- La longitud del camino no cambia si hacemos todos los tramos horizontales, verticales o diagonales seguidos, de una vez. Se puede constatar comparando con la de los dos dados en el enunciado:



$d(A,B)=7$

3 horizontales y 4 verticales



$d(A,B)=1+3\sqrt{2}\cong 5'24$

1 vertical y 3 diagonales

Sin pérdida de generalidad, abordaremos el problema así, recorriendo todos los tramos de un mismo sentido dado seguidos, de una vez.

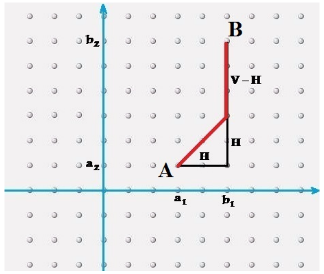
- Llamemos A, punto de inicio del camino, siempre al extremo más a la izquierda.

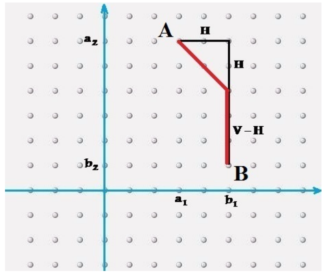
  Y vemos que al recorrerlo paso a paso, con 1 u.d.l. horizontal avanzamos una columna; con 1 u.d.l. vertical, una fila; y con $\sqrt{2}$ u.d.l. en diagonal, una columna y una fila a la vez: es claro que este paso en diagonal, de $\sqrt{2}$ u.d.l., resulta más corto que un paso a la derecha y otro arriba/abajo, de $1+1$ u.d.l.

  Por tanto, el camino más corto entre A y B debe tener el mayor número posible de tramos de longitud $\sqrt{2}$

Como para pasar de $A(a_1,a_2)$ a $B(b_1,b_2)$ hay que desplazarse $\underline{H=|b_1-a_1|}$ u.d.l. horizontales *(el valor absoluto no sería preciso al considerar el punto de inicio A el más a la izquierda)* y subir ó bajar, $\underline{V=|b_2-a_2|}$ u.d.l. verticales *(aquí si es obligado indicarlo con el valor absoluto para evitar que dependa del signo, de si el punto B está por encima, al mismo nivel o debajo del punto A)*, distinguimos tres casos:

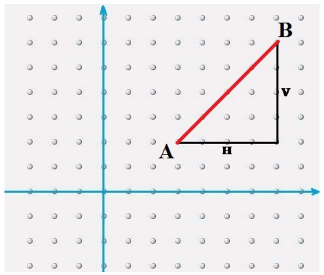
Caso 1º: $\underline{H<V}$

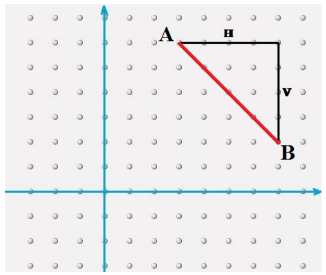




$$d(A,B)=H\cdot\sqrt{2}+V-H=H\cdot(\sqrt{2}-1)+V$$

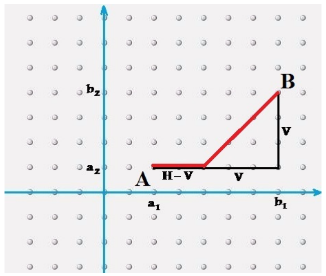
Caso 2º: $\underline{H=V}$

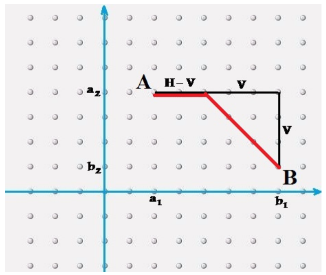




$$d(A,B)=H\cdot\sqrt{2}=V\cdot\sqrt{2}$$

Caso 3º: $\underline{H>V}$





$$d(A,B)=H-V+V\cdot\sqrt{2}=H+V\cdot(\sqrt{2}-1)$$

Que, llamando $\underline{M = \text{Máx}(H,V)}$ y $\underline{m = \text{mín}(H,V)}$, podemos unificar en una sola expresión:

$$\underline{d(A,B) = M - m + m \cdot \sqrt{2} = M + m \cdot (\sqrt{2} - 1)}$$

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (I.P.E.P. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Óscar Fco Valencia Rey** (Airbus. Getafe), **Rubén Musoles Roca** (Villassar de Mar), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) y **Javier Delgado Tabernero** (Novaschool Añoreta Rincón de la Victoria)*

Cadete (3º/4º ESO)

C-016. Enteros anuales.

Busca todos los enteros positivos a, b y c tales que $a^2 + b^2 = \sqrt{c^2 + 2021}$

Solución

El segundo sumando ha de ser entero positivo, pues el primero es suma de dos enteros elevados al cuadrado. Y, por tanto, el radicando ha de ser un cuadrado perfecto, esto es: $c^2 + 2021 = k^2$

Luego: $2021 = k^2 - c^2 = (k-c)(k+c) = 43 \cdot 47$ y las únicas dos posibilidades para obtener c positivo serán:

(I) $\left.\begin{array}{l} k - c = 1 \\ k + c = 2021 \end{array}\right\} \rightarrow k = 1011 \text{ y } c = 1010$

$a^2 + b^2 = 1011$ y sabiendo que los cuadrados terminan en $0, 1, 4, 5, 6$ y 9, la suma de dos cuadrados exige que uno de ellos acabe en 0 y el otro en 1, o bien, uno en 5 y otro en 6. Así pues, conocidos los primeros cuadrados $(n \leq 31)$ nos basta restar uno de esos cuadrados terminados en 0, 1, 5 ó 6 al número 1011 y ver si nos da, o no, otro cuadrado.

Lista de los primeros cuadrados

$d(n) \backslash u(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961								

Comparativa:

$u(a^2)$	Valores de a^2				$1011 - a^2 :: b^2$			
0	10^2	20^2	30^2		~~911~~	~~611~~	~~111~~	
1	1^2	11^2	21^2	31^2	~~1010~~	~~890~~	~~570~~	~~50~~
	9^2	19^2	29^2		~~930~~	~~650~~	~~170~~	
5	5^2	15^2	25^2		~~986~~	~~786~~	~~386~~	
6	4^2	14^2	24^2		~~995~~	~~815~~	~~435~~	
	6^2	16^2	26^2		~~975~~	~~755~~	~~335~~	

Luego, en este caso no hay ninguna solución

(II) $\left.\begin{array}{l} k - c = 43 \\ k + c = 47 \end{array}\right\} \rightarrow k = 45 \text{ y } c = 2$

$a^2 + b^2 = 45 \rightarrow a = 3$ y $b = 6$ ó al revés $a = 6$ y $b = 3$

En conclusión las únicas ternas (a,b,c) solución son: $\underline{(3,6,2)}$, $\underline{(6,3,2)}$

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (I.P.E.P. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Óscar Fco Valencia Rey** (Airbus. Getafe) y **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-016. Sistema en erredós.

Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2) \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \end{array}\right.$ con en $(x,y) \in \Re^2$

Solución

La propuesta es simplemente técnica. Operando: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = 3x^4 + 10x^2y^2 + 3y^4 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2y^4 - 2x^4 \end{array}\right.$

Sumando las ecuaciones: $\dfrac{2}{x} = x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4 \quad \rightarrow \quad 2 = x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4$

Y restándolas: $\dfrac{1}{y} = 5x^4 + 10x^2y^2 + y^4 \quad \rightarrow \quad 1 = 5x^4y + 10x^2y^3 + y^5$

De nuevo, sumando y restando estas dos expresiones, sorprendentemente se tiene:

$$3 = (x+y)^5 \quad \text{y} \quad 1 = (x-y)^5$$

Y trabajamos análogamente en el nuevo sistema: $\begin{cases} \sqrt[5]{3} = x + y \\ 1 = x - y \end{cases}$

Sumando: $\sqrt[5]{3} + 1 = 2x$ y restando: $\sqrt[5]{3} - 1 = 2y$

Luego la única solución en $\Re^2$ es: $\underline{x = \dfrac{\sqrt[5]{3}+1}{2}}$ e $\underline{y = \dfrac{\sqrt[5]{3}-1}{2}}$

*Bien resuelto por: **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Óscar Francisco Valencia Rey** (Airbus. Getafe) e **Íker Ibáñez de Celis***

Se recibieron también una solución incompleta y dos incorrectas.

Júnior

Jn-016. De 15 a 16 sin derivar.

Halla el valor máximo de esta expresión $\sqrt{x-15} + 2\sqrt{16-x}$ e indica para qué valor se alcanza sin hacer uso, en ningún momento, del cálculo diferencial.

Solución

Hemos de encontrar el máximo de la función $f(x) = \sqrt{x-15} + 2\sqrt{16-x}$, función cuyo dominio es, analizando los radicandos, $15 \le x \le 16$

La función, muy sútilmente, la podemos transformar así:

$$f(x) = \sqrt{x-15} + 2\sqrt{16-x} = \sqrt{x-15} + \frac{\sqrt{16-x}}{2} + \frac{\sqrt{16-x}}{2} + \frac{\sqrt{16-x}}{2} + \frac{\sqrt{16-x}}{2}$$

Y, ahora haciendo uso de la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática:

$$MA = \frac{a+b+c+d+e}{5} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}} = MC \quad \text{con } a,b,c,d,e \in \Re^+$$

y la igualdad se da cuando $a = b = c = d = e$

$$\frac{f(x)}{5} = \frac{\sqrt{x-15} + 4\cdot\frac{\sqrt{16-x}}{2}}{5} \le \sqrt{\frac{x-15+4\cdot\frac{16-x}{4}}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \rightarrow \quad f(x) \le \sqrt{5}$$

Así pues, el $\underline{\text{máx } f(x) = \sqrt{5}}$ y se alcanza cuando $\sqrt{x-15} = \dfrac{\sqrt{16-x}}{2} \rightarrow \underline{x = 15'2}$

Ahora ya, si quieres, constátalo con el cálculo diferencial estudiado en el Instituto.

Solución-2 de F. Damián Aranda Ballesteros y Antonio Roberto Martínez Fernández.

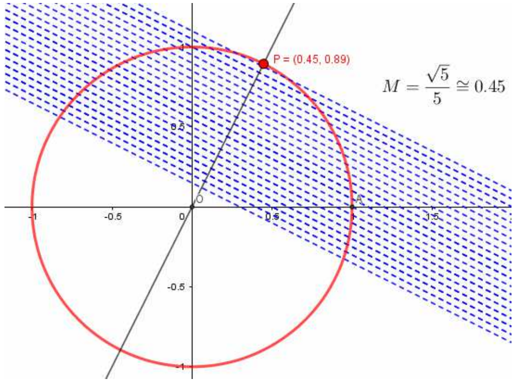
La expresión $\sqrt{x-15} + 2\sqrt{16-x}$ es equivalente a esta otra, $M + 2\cdot N$ siendo: $M = \sqrt{x-15}$ y $N = \sqrt{16-x}$.

Como $M^2 + N^2 = 1$, el problema se reduce a encontrar el Máximo valor de la expresión $M + 2\cdot N$, sujeta a la restricción $M^2 + N^2 = 1$.

Y que un punto $P(M,N)$ del plano cartesiano cumpla $M^2 + N^2 = 1$ significa que se encuentra en una circunferencia centrada en el origen y de radio unidad.

Para los valores $k = M + 2\cdot N$, con $k \in \Re^+$ encontramos un haz de rectas paralelas que contactan con los puntos de la circunferencia anterior. Por tanto, el mayor valor de k se obtendrá cuando esta recta sea tangente a la misma.

Para que eso ocurra, debe suceder que el discriminante de la ecuación de segundo grado sea nulo.



Veámoslo con mayor detalle:

$$\left.\begin{matrix} M^2 + N^2 = 1 \\ k = M + 2\cdot N \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} (k - 2\cdot N)^2 + N^2 = 1 \\ M = k - 2\cdot N \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 5N^2 - 4k\cdot N + k^2 - 1 = 0 \\ M = k - 2\cdot N \end{matrix}\right\}$$

$$N = \frac{4k \pm \sqrt{16k^2 - 20k^2 + 20}}{10} = \frac{4k \pm \sqrt{-4k^2 + 20}}{10} \rightarrow$$

$$-4k^2 + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad k = \sqrt{5}$$

Para dicho valor $k = \sqrt{5}$ obtenemos: $N = \dfrac{4\sqrt{5}}{10} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ y $M = \sqrt{5} - \dfrac{4\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

En definitiva, el máximo de la expresión $\sqrt{x-15}+2\sqrt{16-x}$ es $\underline{\sqrt{5}}$ y se alcanza para el valor de $\underline{x=76/5}$.

En efecto: $$M=\frac{\sqrt{5}}{5}=\sqrt{x-15} \rightarrow \frac{1}{5}=x-15 \rightarrow x=15+\frac{1}{5}=\frac{76}{5}$$

$$N=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\sqrt{16-x} \rightarrow \frac{4}{5}=16-x \rightarrow x=16-\frac{4}{5}=\frac{76}{5}$$

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (I.P.E.P. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Óscar Francisco Valencia Rey** (Airbus. Getafe) y **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco),*

Se recibió también una solución incorrecta.

Sénior

S-016. Un clásico con tres reales positivos.

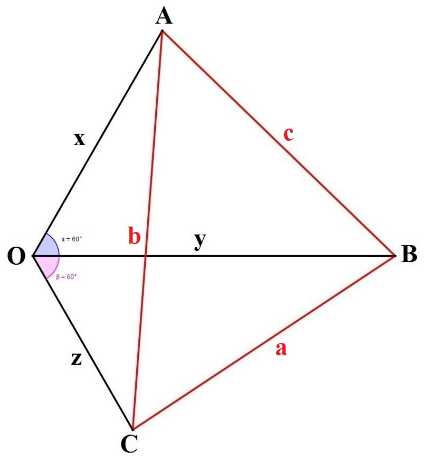
Si $x, y, z \in \Re^+$, prueba que: $\sqrt{x^2-x\cdot y+y^2}+\sqrt{y^2-y\cdot z+z^2} \geq \sqrt{x^2+x\cdot z+z^2}$ e indica en qué casos se cumple la igualdad

Solución

Solución

No, no hay un error de signo en el segundo miembro de esta desigualdad.

Este problema es todo un clásico en la preparación olímpica y, sin duda, esta ingeniosa solución hará las delicias de los aficionados a resolver problemas.



El primer sumando del primer miembro de la desigualdad lo podemos considerar como la longitud c del lado AB de un triángulo OAB en el que se conocen las longitudes x e y de los otros dos lados, OA y OB respectivamente que forman un ángulo de 60°. Así lo corrobora el teorema del coseno:

$$c^2=x^2+y^2-2\cdot x\cdot y\cdot \cos 60^\circ=$$
$$=x^2-x\cdot y+y^2$$

Análogamente, con la misma idea, el segundo sumando sería la longitud a del lado BC de un triángulo OBC en el que se conocen las longitudes y y z de los otros dos lados, OB y OC respectivamente, que forman un ángulo de 60°, pues:

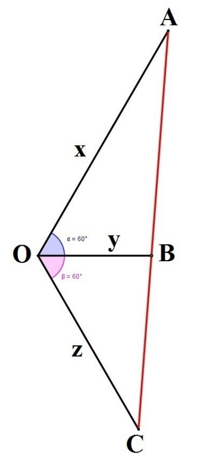
$$a^2=y^2+z^2-2\cdot y\cdot z\cdot \cos 60^\circ=y^2-y\cdot z+z^2$$

Y, lo mismo, el segundo miembro de la desigualdad sería la longitud b del lado AC de un triángulo OAC en el que se conocen las longitudes x y z de los otros dos lados, OA y OC respectivamente, que forman un ángulo de 120°, pues:

$$b^2=x^2+z^2-2\cdot x\cdot z\cdot \cos 120^\circ=x^2+x\cdot z+z^2$$

Así, la desigualdad triangular en ABC deja probada la desigualdad pedida:

$$AB+BC\geq AC \rightarrow c+a\geq b \rightarrow$$
$$\underline{\sqrt{x^2-x\cdot y+y^2}+\sqrt{y^2-y\cdot z+z^2}\geq\sqrt{x^2+x\cdot z+z^2}}$$



La igualdad se cumplirá cuando los puntos A, B y C se presenten alineados, esto es, cuando los triángulos OAB y OBC queden superpuestos al triángulo OAC como muestra el gráfico. Así, sus áreas:

$$[OAB]+[OBC]=[OAC]$$

$$\frac{x\cdot y\cdot \sin 60^\circ}{2}+\frac{y\cdot z\cdot \sin 60^\circ}{2}=\frac{x\cdot z\cdot \sin 120^\circ}{2}$$

$$\underline{x\cdot y+y\cdot z=x\cdot z}$$

O bien, dividiendo por $x\cdot y\cdot z$

$$\underline{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{y}}$$

*Bien resuelto por: **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES José Saramago Arganda del Rey), **Antonio Ruiz Lozano** (Colegio Claret. Sevilla), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell) y **César Gil** (Barcelona)*

Se recibieron también una solución incompleta y una incorrecta.