Real Sociedad
Matemática Española

# PROBLEMA DEL MES

*Enero – 2022*

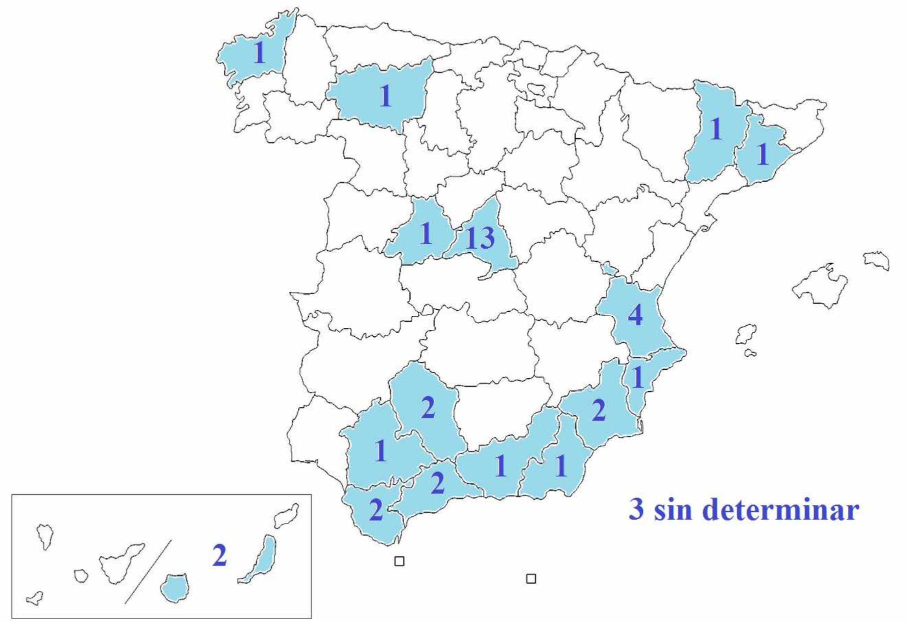
*Soluciones*

### Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

| | Alevín | Infantil | Cadete | Juvenil | Junior | Senior |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 017 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 018 | ✓ | | ✓ | | ✓ | |
| 019 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

*Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.*

**89 respuestas de 39 participantes (31 chicos / 8 chicas)**




**Alevín (5º/6º Primaria)**

**A-019. Cuatro, tres dos, ¿seguro que sabes sumar?**

Ya viste que 2022 es un número de cuatro cifras que se escribe con tres doses. ¿Sabrás sumar todos los números de cuatro cifras que se escriben con tres doses?

*Solución*

En un número de cuatro cifras que se escribe con tres doses, la cifra que no es un dos sólo puede estar en las unidades, en las decenas o en las centenas y puede tomar nueve valores: 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, todos menos el 2.

Vamos a hacer el cálculo agrupando los números en función del lugar que ocupe la cifra que no es un dos.

Y en cada caso, tanto si es en las unidades, en las decenas o en las centenas, habrá que sumar tres columnas con doses y una sin doses, y la clave está en pasarlo finalmente todo a unidades.

A la derecha vemos el caso cuando son las centenas las que no llevan doses:

$$S_c = 9 \cdot (2000 + 20 + 2) + 43 \cdot 100 =$$
$$= 9 \cdot 2022 + 4300 = 22498$$

| M | C | D | U | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 2 | 2 | |
| 2 | 1 | 2 | 2 | |
| 2 | 3 | 2 | 2 | + |
| … | … | … | … | = |
| 2 | 9 | 2 | 2 | |
| $18_m$ | $43_c$ | $18_d$ | $18_u$ | |

Análogamente sería en los demás casos:

Si son las decenas las que no llevan doses:

$$S_d = 9 \cdot (2000 + 200 + 2) + 43 \cdot 10 = 9 \cdot 2202 + 430 = 20248$$

Si son las unidades las que no llevan doses:

$$S_u = 9 \cdot (2000 + 200 + 20) + 43 = 9 \cdot 2220 + 43 = 20023$$

Y, finalmente, si son las unidades de millar las que no llevan doses:

$$S_m = 43 \cdot 1000 + 8 \cdot (200 + 20 + 2) = 43000 + 8 \cdot 222 = 44776$$

En total: $\underline{T} = 43 \cdot 1111 + 9 \cdot 6444 + 8 \cdot 222 = \underline{107545}$

*Bien resuelto por:* ***Ángel Guardiola Gómez*** *(5ºP. CEIP D. José Marín. Cieza),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* ***José Luis López Palao*** *(Madrid),* ***Óscar Fco Valencia Rey*** *(Airbus. Getafe),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Fco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(C Bética Mudarra. Córdoba),* ***Pau Gregori Bataller*** *(IES Ausias March, Gandía)*

*Se recibieron también dos soluciones incorrectas.*

## Infantil (1º/2º ESO)

### I-019. ¿Primo o compuesto?

Justifica de alguna manera si este enorme número: $9^{2022}-7^{2020}$ es, o no, primo.

*Solución-1*

Obsérvese:

$$9^1=9 \qquad 9^2=81 \qquad 9^3=729 \qquad 9^4=6561 \qquad \cdots\cdots\cdots$$

esto es, que la última cifra, la de las unidades, de las potencias pares de $9$ es $1$:

$$u(9^2)=1 \qquad u(9^4)=1 \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad u(9^{2022})=1 \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Y, obsérvese también:

$$7^1=7 \qquad 7^2=49 \qquad 4^3=343 \qquad 7^4=2401 \qquad \cdots\cdots\cdots$$

esto es, que la última cifra de las potencias múltiplo de cuatro de $7$ siempre es $1$:

$$u(7^4)=1 \qquad u(7^8)=1 \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad u(7^{2020})=1 \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Así el enorme número $\underline{9^{2022}-7^{2020}}$ resulta ser diferencia de dos números terminados en $1$, por tanto, acabará en $0$. Y, claro, si acaba en $0$ es que es múltiplo de $10$. Y si es múltiplo de $10$, podemos afirmar con rotundidad que <u>es compuesto</u>.

*Solución-2*

Las potencias (con exponente natural se entiende) de un número impar son impares, tal es el caso de $9^{2022}$ y $7^{2020}$. Y la diferencia de dos números impares es un número par. En este caso, claramente mayor que dos. Por tanto, podemos confirmar que <u>no es primo</u>, es compuesto.

*Solución-3*

Debes saber ya que *suma por diferencia es diferencia de cuadrados:*

$$\underline{(a+b)\cdot(a-b)}=a^2-a\cdot b+b\cdot a-b^2=\underline{a^2-b^2}$$

Operando: $9^{2022}-7^{2020}=\left(9^{1011}\right)^2-\left(7^{1010}\right)^2=\left(9^{1011}+7^{1010}\right)\cdot\left(9^{1011}-7^{1010}\right)$.

Así, el enorme número $\underline{9^{2022}-7^{2020}}$ queda descompuesto en un producto de dos factores. Por tanto, podemos asegurar que <u>es compuesto</u>.

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Ignacio Larrosa Cañestro** (IES Rafael Dieste. A Coruña), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **Isaac Dawson Marco** (Benifaio), **Graciela Ribero Herrera** (ULL. La Atalaya de Sta Brigida), **Clara Salas**, **Rubén Musoles Roca** (Villassar de Mar), **Iván Ingelmo Zárate** (IES JS. Arganda del Rey), **Ioana Coman** (IES JS. Arganda del Rey), **José Luis López Palao** (Madrid), **Óscar Fco Valencia Rey** (Airbus. Getafe), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Miguel Rubio Sánchez** (IES JS. Arganda del Rey), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Stefan Moise** (IES JS. Arganda del Rey), **Fco Rodríguez-Carretero Roldán** (C Bética Mudarra. Córdoba), **Diego González Lozano** (IES Jorge Santayana. Ávila), **Pau Gregori Bataller** (IES Ausias March, Gandía), **Pablo Morales Martín** (CEIP Agustín de Argüelles. Alcorcón)*

## Cadete (3º/4º ESO)

### C-019. Cinco enteros.

Determinan si existen, o no, cinco enteros que hagan cierta esta igualdad:

$$\sqrt{7+\sqrt{40}}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{7}+e\sqrt{10}$$

*Solución*

Basta darse cuenta de que $\sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Por tanto si que existen cinco enteros que hacen cierta esa igualdad: $\underline{a=d=e=0}$ y $\underline{b=c=1}$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Ignacio Larrosa Cañestro** (IES Rafael Dieste. A Coruña), **Rubén Musoles Roca** (Villassar de Mar), **José Luis López Palao** (Madrid), **Iker Ingelmo Zárate** (IES JS. Arganda del Rey), **Óscar Fco Valencia Rey** (Airbus. Getafe), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Cristina Ceaus Carga** (IES Dunas de las Chapas. Marbella), **Diego González Lozano** (IES Jorge Santayana. Ávila)*

*Se recibieron también dos soluciones incorrectas.*

## Juvenil (1º/2º Bachillerato)

### Jv-019. Número combinatorio.

Busca un número combinatorio $\binom{m}{n}$ que haga cierta esta igualdad:

$$\binom{43}{43}\cdot\binom{86}{43}\cdot\binom{129}{43}\cdot\ldots\cdot\binom{2021}{43}\cdot\binom{m}{n}=\binom{44}{43}\cdot\binom{87}{43}\cdot\binom{130}{43}\cdot\ldots\cdot\binom{2022}{43}$$

*Solución*

El coeficiente del número combinatorio vale:

$$\binom{43}{43}\cdot\binom{86}{43}\cdot\binom{129}{43}\cdot\ldots\cdot\binom{2021}{43}=\frac{43!}{43!\cdot 0!}\cdot\frac{86!}{43!\cdot 43!}\cdot\frac{129!}{43!\cdot 86!}\cdot\ldots\cdot\frac{2021!}{43!\cdot 1978!}=$$

$$=\frac{2021!}{43!\cdot 43!\cdot\ldots\cdot 43!}=\frac{2021!}{43!^{47}}$$

Y el segundo miembro de la igualdad:

$$\binom{44}{43}\cdot\binom{87}{43}\cdot\binom{130}{43}\cdot\ldots\cdot\binom{2022}{43}=\frac{44!}{43!\cdot 1!}\cdot\frac{87!}{43!\cdot 44!}\cdot\frac{130!}{43!\cdot 87!}\cdot\ldots\cdot\frac{2022!}{43!\cdot 1979!}=$$

$$=\frac{2022!}{43!\cdot 43!\cdot\ldots\cdot 43!}=\frac{2022!}{43!^{47}}$$

Luego $\binom{m}{n}=\frac{2022!}{43!^{47}}:\frac{2021!}{43!^{47}}=2022!:2021!=2022$.

Vale, pues, $\underline{\binom{m}{n}=\binom{2022}{1}}$ ó bien $\underline{\binom{m}{n}=\binom{2022}{2021}}$

*Bien resuelto por:* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* ***Graciela Ribero Herrera*** *(ULL. La Atalaya de Sta Brigida),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Vanesa Yordanova Mondrova*** *(IES Vigán Fuerteventura),* ***Diego González Lozano*** *(IES Jorge Santayana. Ávila),* ***Mario Balda Agudo*** *(Colegio Ave María Casa Madre. Granada)*

*Se recibieron también once trabajos con una sola de las dos soluciones y uno más con resultado incorrecto.*

**Júnior**

## Jn-019. Sucesión veinte veintidós.

Dada la sucesión $a_{n+2}=\frac{20\cdot a_{n+1}}{22\cdot a_n}$ con $a_0=20$ y $a_1=22$, determina qué vale esta suma infinita: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{6n}}{2^n}=\frac{a_0}{2^0}+\frac{a_6}{2^1}+\frac{a_{12}}{2^2}+\frac{a_{18}}{2^3}+\ldots\ldots$

*Solución*

Veamos que la sucesión es periódica:

$a_0=20$ $\qquad a_1=22$

$$a_2=\frac{20\cdot a_1}{22\cdot a_0}=\frac{20\cdot 22}{22\cdot 20}=1 \qquad a_3=\frac{20\cdot a_2}{22\cdot a_1}=\frac{20\cdot 1}{22\cdot 22}=\frac{20}{22^2}$$

$$a_4=\frac{20\cdot a_3}{22\cdot a_2}=\frac{20\cdot\frac{20}{22^2}}{22\cdot 1}=\frac{20^2}{22^3} \qquad a_5=\frac{20\cdot a_4}{22\cdot a_3}=\frac{20\cdot\frac{20^2}{22^3}}{22\cdot\frac{20}{22^2}}=\frac{20^2}{22^2}$$

$$a_6=\frac{20\cdot a_5}{22\cdot a_4}=\frac{20\cdot\frac{20^2}{22^2}}{22\cdot\frac{20^2}{22^3}}=20$$ y se reinicia el periodo

También se podía haber visto en general:

$$a_{n+3}=\frac{20\cdot a_{n+2}}{22\cdot a_{n+1}}=\frac{20\cdot\frac{20\cdot a_{n+1}}{22\cdot a_n}}{22\cdot a_{n+1}}=\frac{20^2}{22^2\cdot a_n}$$ y, de aquí,

$$a_{n+6}=\frac{20^2}{22^2\cdot a_{n+3}}=\frac{20^2}{22^2\cdot\frac{20^2}{22^2\cdot a_n}}=a_n$$

Luego: $a_0=a_6=a_{12}=a_{18}=\ldots=a_{6n}=20$. Por tanto:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{6n}}{2^n}=\frac{a_0}{2^0}+\frac{a_6}{2^1}+\frac{a_{12}}{2^2}+\frac{a_{18}}{2^3}+\ldots\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{20}{2^n}=20\cdot\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots\right)=20\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad \underline{S=40}$$

*Bien resuelto por:* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* ***Graciela Ribero Herrera*** *(ULL. La Atalaya de Sta Brigida),* ***Clara Salas, Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Sotero Romero Morón*** *(The English Center. Puerto de Santa María),* ***Carlos Ragel Castilla*** *(The English Center. Puerto de Santa María),* ***José Luis López Palao*** *(Madrid),* ***Óscar Fco Valencia Rey*** *(Airbus. Getafe),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Andrey Parrilla Prokopyev*** *(SEK Alborán). Almería*
***Fco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(C Bética Mudarra. Córdoba),* ***Diego González Lozano*** *(IES Jorge Santayana. Ávila)*

## S-019. Larga operación.

Obtén debidamente el número entero resultado de esta larga operación:

$$\left|\lfloor 2022\cdot\sin 1^\circ\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin 2^\circ\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin 3^\circ\rfloor+\ldots\ldots+\lfloor 2022\cdot\sin 360^\circ\rfloor\right|$$

*Recuerda que las expresiones* $|x|$ *y* $\lfloor x\rfloor$ *representan, respectivamente, el valor absoluto y la parte entera del número* $x$

*Solución*

Sea $n=\lfloor 2022\cdot\sin 1^\circ\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin 2^\circ\rfloor+\ldots\ldots+\lfloor 2022\cdot\sin 360^\circ\rfloor$ el argumento del largo valor absoluto del enunciado.

Claramente, dos de los 360 sumandos de $n$, $\lfloor 2022\cdot\sin 180^\circ\rfloor$ y $\lfloor 2022\cdot\sin 360^\circ\rfloor$, son nulos. Los demás, los agruparemos en dos bloques:

$$\begin{aligned} n=&\lfloor 2022\cdot\sin 1^\circ\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin 2^\circ\rfloor+\ldots\ldots\ldots+\lfloor 2022\cdot\sin 179^\circ\rfloor+\\ &+\lfloor 2022\cdot\sin 181^\circ\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin 182^\circ\rfloor+\ldots\ldots+\lfloor 2022\cdot\sin 359^\circ\rfloor\end{aligned}$$

Y, de nuevo, agrupando por pares en vertical, la larga operación se torna más fácil:

En cada uno de estos 179 pares, los ángulos involucrados se diferencian en $180^\circ$ y ya sabes que $\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha \rightarrow 2022\cdot\sin(180^\circ+\alpha)=-2022\cdot\sin\alpha$.

Y hemos sumar sus partes enteras: $\lfloor 2022\cdot\sin\alpha\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin(180^\circ+\alpha)\rfloor$

· Si $x\in Z \rightarrow \underline{\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor}=x+(-x)=\underline{0}$

· Si $x\notin Z \rightarrow \lfloor x\rfloor<x<\lfloor x\rfloor+1 \rightarrow -\lfloor x\rfloor-1<-x<-\lfloor x\rfloor$

y así: $\lfloor -x\rfloor=-\lfloor x\rfloor-1$.

Luego: $\underline{\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor}=\lfloor x\rfloor+(-\lfloor x\rfloor-1)=\underline{-1}$

En nuestro caso:

$\lfloor 2022\cdot\sin\alpha\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin(180^\circ+\alpha)\rfloor=0$ sólo cuando $\alpha=30^\circ$, $90^\circ$, $150^\circ$ y

$\lfloor 2022\cdot\sin\alpha\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin(180^\circ+\alpha)\rfloor=-1$ en los demás casos.

Es decir, de los 179 pares de partes enteras que hemos sumado, hay tres nulos

Así, $n=-1+(-1)+(-1)+\ldots\ldots+(-1)=-176$

$$\underline{|n|=\left|\lfloor 2022\cdot\sin 1^\circ\rfloor+\lfloor 2022\cdot\sin 2^\circ\rfloor+\ldots\ldots+\lfloor 2022\cdot\sin 360^\circ\rfloor\right|=176}$$

*Bien resuelto por:* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* ***Óscar Mascarell i Claver*** *(IES Turis),* ***Óscar Fco Valencia Rey*** *(Airbus. Getafe),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(US)*

*Se recibieron también once soluciones incorrectas.*