Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Febrero – 2022

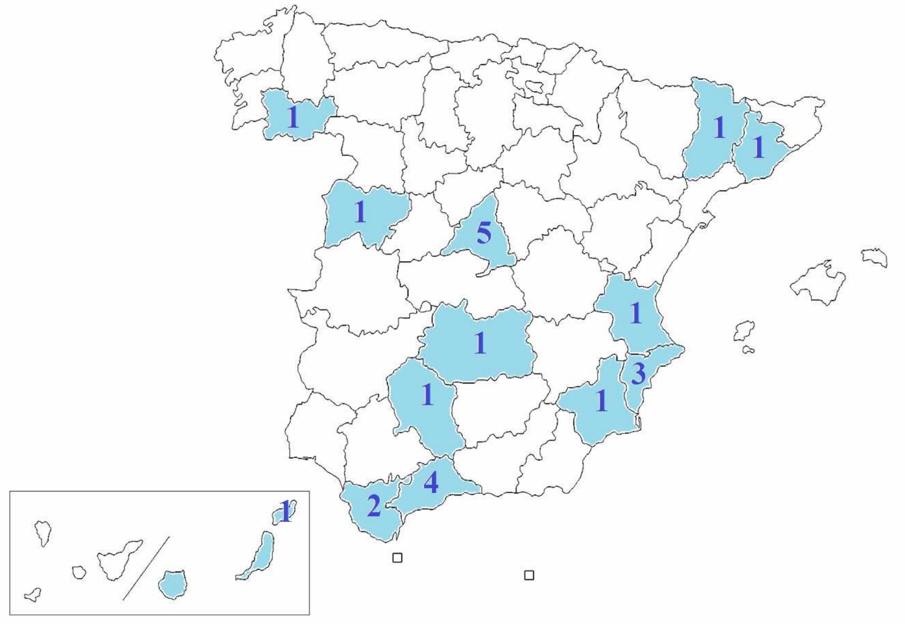
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
019	✓	✓	✓	✓	✓	✓
020	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

43 respuestas de 23 participantes (19 chicos / 4 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-020. Armando armarios.

Un operario se compromete a montar un armario en dos días; un segundo operario en tres días, y un tercero en cinco días. La empresa insta a los tres operarios para que trabajen juntos a la vez. ¿Cuántos armarios montarán si trabajan juntos durante un mes, esto es, en treinta días laborables?

Solución

Si se reúnen todos los días y cada uno trabaja por su cuenta:

En treinta días, el primer operario puede montar 15 armarios;, el segundo, 10, y el tercero, 6. En total, pues, 31 armarios.

Y, lo mismo, si se reúnen y van armando los armarios de uno en uno:

Cada día, el primer operario puede montar $1/2=3/6=15/30$ armario, el segundo $1/3=2/6=10/30$ de armario, y el tercero $1/5=6/30$ de armario ($5/30=1/6$ para completar un armario con lo hecho por sus compañeros, y $1/30$ más de otro armario).

Parece que, así, conviene que entre los tres completen un armario al día y ese otro armario lo vaya haciendo, treintavo en treintavo al día, el tercer operario

En total, $31/30$ de armario por día. Luego, en treinta días, 31 armarios.

*Además de la solución del proponente, el profesor **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), se recibieron soluciones correctas de: **Pau Gregori Bataller** (IES Ausias March, Gandía), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) y **Elisa Estévez Molina** (CI Mª Montesori. Málaga) que tiene tan solo 6 años.*

Infantil (1º/2º ESO)

I-020. Múltiplo de 23.

Determina el único número $n=\overline{xyz}$ múltiplo de 23 cuyas tres cifras verifican la relación $x\cdot y\cdot z+x\cdot y+x=24$. Constata que, efectivamente, es único.

Solución-1

Los múltiplos de 23 con tres cifras son 39, los que van desde el $115=23\cdot 5$ al $989=23\cdot 43$. Basta ponerlos todos y constatar cuál de ellos cumple la condición:

Múltiplo	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322
x·y·z+x·y+z::24	⇩	⇧	⇩	⇧	⇩	⇩	⇧	⇧	⇧	⇩

Múltiplo	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552
x·y·z+x·y+z::24	⇧	⇧	⇧	✓	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧

Múltiplo	575	598	621	644	667	690	713	736	759	782
x·y·z+x·y+z::24	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧

Múltiplo	805	828	851	874	897	920	943	966	989
x·y·z+x·y+z::24	⇩	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧

Efectivamente, es único: <u>414</u>

<u>Solución-2</u>

$x \cdot y \cdot z + x \cdot y + x = 24 \quad \rightarrow \quad x \cdot (y \cdot z + y + 1) = 24 \quad \rightarrow \quad x \cdot (y \cdot (z+1) + 1) = 24$

Tabulando:

$x \cdot (y \cdot z + y + 1) = 24$				¿Múltiplos de 23?
1	24	$\rightarrow$	$y \cdot (z+1) = 23$	Nada
2	12	$\rightarrow$	$y \cdot (z+1) = 11$	Nada
3	8	$\rightarrow$	$y \cdot (z+1) = 7$	~~370~~ no y ~~316~~ no
4	6	$\rightarrow$	$y \cdot (z+1) = 5$	~~450~~ no y <u>414</u> Si
6	4	$\rightarrow$	$y \cdot (z+1) = 3$	~~640~~ no y ~~612~~ no
8	3	$\rightarrow$	$y \cdot (z+1) = 2$	~~820~~ no y ~~811~~ no

El número <u>414</u> es la única solución.

Nota.- *Aquí son pocos casos y la constatación de si un número es, o no, múltiplo de* 23 *es fácil. No obstante, si se quiere podemos deducir algunos métodos para saberlo:*

(I) $n = \overline{xyz} = 100 \cdot x + 10 \cdot y + z = \overset{*}{23}$ *y restando* $92 \cdot x = 23 \cdot 4 \cdot x \quad \rightarrow$

$8 \cdot x + 10 \cdot y + z = \underline{8 \cdot x + \overline{yz} = \overset{*}{23}}$ *que podemos aplicar reiteradamente.*

Un par de ejemplos: $316 \neq \overset{*}{23}$ *pues* $8 \cdot 3 + 16 = 40$ *no es múltiplo de* 23

$414 \equiv \overset{*}{23}$ *pues* $8 \cdot 4 + 14 = 46$ *sí es múltiplo de* 23

(II) *Multiplicando por* 7 *la expresión anterior* $8 \cdot x + 10 \cdot y + z = \overset{*}{23}$, *se tiene:*

$56 \cdot x + 70 \cdot y + 7 \cdot z = \overset{*}{23}$ *y restando* $46 \cdot x + 69 \cdot y = \overset{*}{23}$ *queda este otro criterio:*

$10 \cdot x + y + 7 \cdot z = \underline{\overline{xy} + 7 \cdot z = \overset{*}{23}}$ *que también podemos reiterar hasta saber si el resultado es, o no, múltiplo de* 23.

Un par de ejemplos: $414 \equiv \overset{*}{23}$ *pues* $41 + 7 \cdot 4 = 69$ *sí es múltiplo de* 23

$612 \neq \overset{*}{23}$ *pues* $61 + 7 \cdot 2 = 75$ *no es múltiplo de* 23

Además de la solución del proponente, el profesor ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba), se recibieron soluciones correctas de:* ***Roberto Páez Ríos*** *(IES Dunas de Chapas. Marbella),* ***Pau Gregori Bataller*** *(IES Ausias March, Gandía),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Iván López Márquez*** *(C. Inmaculada. Alicante),* ***Francisco Javier Babarro Rodríguez*** *(Ourense)*

Cadete (3º/4º ESO)

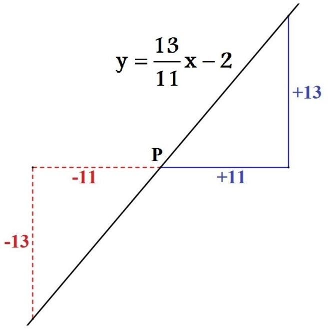
C-020. Muchas parejas.

¿Cuántas parejas hay de números enteros positivos (x, y) que verificando $13x - 11y = 22$ cumplan además que $x, y \leq 2022$?

<u>Solución</u>

La expresión $13x - 11y = 22$ es la ecuación de una recta en forma general. De ella:

- se deduce fácilmente que 13 onces menos 11 onces, son dos onces, esto es 22. O, lo que es lo mismo, el punto $P(11,11)$ pertenece a esa recta.
- y se sabe que $\vec{w} = (13, -11)$ es su vector perpendicular, o bien, que $\vec{v} = (11, 13)$ es su vector director, información que también se obtiene pasándola a forma explícita: basta despejar la variable y para ver que su pendiente es $13/11$



Y como 11 y 13 son primos entre sí, podemos asegurar que, a partir del punto $P(11,\ 11)$, avanzando/retrocediendo un múltiplo de 11 pasos en horizontal y subiendo/bajando un múltiplo de 13 pasos en vertical, es la única manera de obtener otros puntos de la recta con coordenadas enteras.

Y como sólo nos piden coordenadas enteras positivas:

x	11	22	33	44	…	…	$11 \cdot n$
y	11	24	37	50	…	…	$13 \cdot n - 2$

Todos en la recta como podemos comprobar: $13 \cdot (11 \cdot n) - 11 \cdot (13 \cdot n - 2) = 22$

Y se pide que ambas coordenadas enteras positivas sean menores o iguales a 2022:

$11 \cdot n \leq 2022 \quad \rightarrow$ dividiendo por 11: $\underline{n \leq 183}$ y, a la vez,

$13 \cdot n - 2 \leq 2022 \quad \rightarrow$ sumando 2 a cada lado: $13 \cdot n \leq 2024 \quad \rightarrow$ dividiendo por 13: $\underline{n \leq 155}$

Luego, son solución todos los pares de la forma $\underline{(11 \cdot n, 13 \cdot n - 2)}$ con $\underline{n = 1 \text{ a } 155}$

El primero es $P_1(11,11)$ *y el último* $P_{155}(1705, 2013)$

*Además de la solución del proponente, el profesor **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), se recibieron soluciones correctas de: **Rubén Musoles Roca** (Villassar de Mar), **Moisés Bernabeu** (Concentaina), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Yannis Antoni Serra Karydis** (CE Daos. Pto del Carmen), **Cristina Ceaus Carga** (IES Dunas de las Chapas. Marbella) y **Anna di Terlizzi Escalada** que contó uno menos por despiste*

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-020. Igualdad logarítmica.

¿Para qué números naturales se cumple este larguísimo producto de logaritmos:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots\ldots \cdot \log_n (n+1) = 2022\,?$$

Solución

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots\ldots \cdot \log_n (n+1) = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{\log(n+1)}{\log n} =$$

$$= \frac{\log(n+1)}{\log 2} = \log_2 (n+1) = 2022$$

Luego $n+1 = 2^{2022}$ y $\underline{n = 2^{2022} - 1}$ es la única solución

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Adrián Pardo Rodríguez** (IES José Saramago. Arganda del Rey), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Rubén Musoles Roca** (Villassar de Mar), **Sotero Romero Morón** (The English Center. Puerto Sta Mª), **Carlos Ragel Castilla** (The English Center. Puerto Sta Mª), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Hongbo David Zhang** (IES Maestro Matías Bravo. Madrid), **Julián Sáez Ponce** (IES Dámaso Alonso. Puertollano), **Tessy Okevbo** (IES Maestro Matías Bravo. Madrid)*

Júnior

Jn-020. Serpenteo logarítmico.

Para $x \in]0,+\infty[$, ¿en qué rango de valores oscila esta sinuosa expresión logarítmica: $(\log x)^{\log\log\log x} - (\log\log x)^{\log\log x}$?

Solución

Sabemos que el logaritmo y la exponencial son funciones inversas, esto es, que $x = \log 10^x$ y $\underline{x = 10^{\log x}}$.

Aplicando esta última igualdad con $x \equiv \log x$, tenemos que $\log x = 10^{\log\log x}$ y, así, el primer miembro de la expresión resulta:

$$(\log x)^{\log\log\log x} = \left(10^{\log\log x}\right)^{\log\log\log x} = 10^{(\log\log x)(\log\log\log x)}$$

Y aplicándola con $x \equiv \log\log x$, tenemos que $\log\log x = 10^{\log\log\log x}$ y, así, el segundo miembro de la expresión, que es el que nos exige $x > 0$, resulta:

$$(\log\log x)^{\log\log x} = \left(10^{\log\log\log x}\right)^{\log\log x} = 10^{(\log\log\log x)(\log\log x)}$$

En definitiva, ambos miembros son iguales y, por tanto, para $x \in]0,+\infty[$ la <u>expresión siempre es nula</u>.

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Sotero Romero Morón** (The English Center. Puerto de Santa María), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Carlos Ragel Castilla** (B2- The English Center. Puerto Sta Mª), **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca),*

Sénior

S-020. Mínimo logarítmico.

Obtén el mínimo de esta suma de logaritmos:

$$\log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \log_{x_{n-1}}\left(x_n - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$$

sabiendo que $x_k \in \left]\frac{1}{4}, 1\right[$ para $k = 1, 2, \ldots, n$

Solución

Con base $0 < b < 1$, sabemos que $\log_b x$ es una función decreciente.

De la lógica expresión $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, se deduce que $x^2 \geq x - \frac{1}{4}$

Luego, podemos deducir que:

$$\log_{x_k}\left(x_{k+1} - \frac{1}{4}\right) \geq \log_{x_k} x_{k+1}^2 = 2\log_{x_k} x_{k+1} = 2 \cdot \frac{\log x_{k+1}}{\log x_k}$$

Con todo:

$$\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_{n-1}}\left(x_n-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\geq 2\cdot\left(\frac{\log x_2}{\log x_1}+\frac{\log x_3}{\log x_2}+\ldots+\frac{\log x_n}{\log x_{n-1}}+\frac{\log x_1}{\log x_n}\right)\geq 2\cdot n$$

éste último paso por la desigualdad entre la media aritmética y geométrica:

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\log x_2}{\log x_1}+\frac{\log x_3}{\log x_2}+\ldots+\frac{\log x_1}{\log x_n}\right)\geq\sqrt[n]{\frac{\log x_2}{\log x_1}\cdot\frac{\log x_3}{\log x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\log x_1}{\log x_n}}=1 \quad\rightarrow$$

$$\frac{\log x_2}{\log x_1}+\frac{\log x_3}{\log x_2}+\ldots+\frac{\log x_n}{\log x_{n-1}}+\frac{\log x_1}{\log x_n}\geq n$$

Y la igualdad, el mínimo $\underline{2\cdot n}$, se dará con: $\underline{x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{2}}$:

$$n\cdot\log_{x_k}\left(x_k-\frac{1}{4}\right)=2\cdot n \quad\rightarrow\quad \log_{x_k}\left(x_k-\frac{1}{4}\right)=2 \quad\rightarrow\quad x_k^2=x_k-\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow\quad\left(x_k-\frac{1}{2}\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x_k=\frac{1}{2}\ \text{para}\ k=1,2,\ldots,n$$

*Bien resuelto por: **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES José Saramago. Arganda del Rey), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda)*

Se recibió también una solución incorrecta.