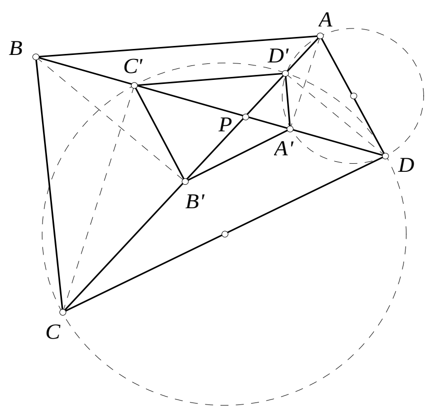
FASE LOCAL DE LA XLIV OME
SESIONES PRIMERA Y SEGUNDA
18 DE ENERO DE 2008 (MAÑANA Y TARDE)

1. Sea P una familia de puntos en el plano tales que por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN:
Sea $T = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un subconjunto de P con cuatro elementos. Por hipótesis existe una circunferencia α que pasa por estos cuatro puntos. Supongamos que exista un punto $x \in P,$ tal que $x \notin \alpha.$ Por la condición del enunciado existe una circunferencia β que pasa por los puntos x, x_2, x_3 y x_4. Entonces las circunferencias α y β tienen tres puntos comunes, lo que implica que deben coincidir.
Por la condición del enunciado existe una circunferencia β que pasa por los puntos x, x_2, x_3 y x_4. Entonces las circunferencias α y β tienen tres puntos comunes, lo que implica que deben coincidir.

2. En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

SOLUCIÓN:



Vamos a probar que ambos cuadriláteros tienen todos sus ángulos iguales.
Por construcción $ADA'D'$ es circunscriptible y de ahí que $\angle CD'A' = \angle ADA'$ por ser ambos suplementarios del mismo ángulo $\angle AD'A'$.
También el cuadrilátero $DCC'D'$ es circunscriptible y $\angle C'D'C = \angle C'DC$ por estar inscritos en el mismo arco. Sumando resulta $\angle ADC = \angle CD'A'$.
Análogamente se prueba para los restantes vértices.

3. Halla las soluciones reales de la ecuación: $x\left(\dfrac{6-x}{x+1}\right)\left(\dfrac{6-x}{x+1}+x\right)=8.$

SOLUCIÓN:
Sea $t=x+1.$ Entonces sustituyendo en la ecuación dada, se tiene $(t-1)\left(\dfrac{7}{t}-1\right)\left(\dfrac{7}{t}+t-2\right)=8,$ que equivale a $\left(7-t-\dfrac{7}{t}+1\right)\left(\dfrac{7}{t}+t-2\right)=8.$ Haciendo el cambio $u=\dfrac{7}{t}+t,$ se obtiene la ecuación $(8-u)(u-2)=8$ equivalente a $u^2-10u+24=0,$ cuyas soluciones son $u=4$ y $u=6.$
De $u=\dfrac{7}{t}+t=4,$ se obtiene $t^2-4t+7=0$ que no tiene soluciones reales y si $u=\dfrac{7}{t}+t=6,$ se llega a la ecuación $t^2-6t+7=0,$ cuyas dos soluciones son reales: $t_1=3+\sqrt{2}$ y $t_2=3-\sqrt{2}.$ Como $x=t-1,$ la ecuación inicial tiene las soluciones reales $x_1=2-\sqrt{2}$ y $x_2=2+\sqrt{2}.$

4. Demuestra que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

SOLUCIÓN:
Tenemos las siguientes congruencias módulo 7
$2222^0\equiv 1, 2222^1\equiv 3, 2222^2\equiv 2, 2222^3\equiv 6, 2222^4\equiv 4, 2222^5\equiv 5, 2222^6\equiv 1\ldots$
$5555^0\equiv 1, 5555^1\equiv 4, 5555^2\equiv 2, 5555^3\equiv 1,\ldots$
Los restos potenciales de 2222 forman un ciclo de longitud 6, los de 5555 otro ciclo de longitud 3; entonces

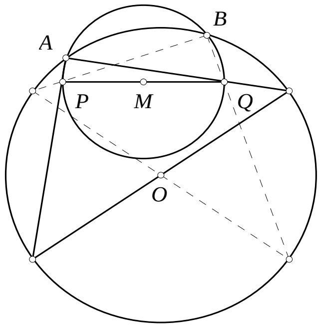
$$5555=925\times 6+5\Rightarrow 2222^{5555}\equiv 2222^5\equiv 5$$

$$2222=740\times 3+2\Rightarrow 5555^{2222}\equiv 5555^2\equiv 2$$

La demostración concluye sumando las dos últimas congruencias.

5. Dada una circunferencia y dos puntos *P* y *Q* en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por *P* y *Q*. ¿Para qué posiciones de *P* y *Q* el problema no tiene solución?

SOLUCIÓN:



Basta trazar la circunferencia de diámetro PQ, las eventuales intersecciones con la circunferencia inicial de centro O nos proporcionan dos puntos A y B que unidos con P y Q definen las soluciones.
No existe solución cuando ambas circunferencias no se cortan es decir cuando

$$OM + \frac{PQ}{2} < r$$

siendo r el radio de la circunferencia dada.

6. Sean a, b, c tres números positivos de suma uno. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca}\, b^{b^2+2ab}\, c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

SOLUCIÓN:
Dado que $a+b+c=1$, entonces $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 1$.
Además, $\ln\left(a^2\frac{1}{a} + b^2\frac{1}{b} + c^2\frac{1}{c} + 2ab\frac{1}{b} + 2bc\frac{1}{c} + 2ca\frac{1}{a}\right) = \ln 3$. Aplicando la desigualdad de Jensen a la función $f(x) = \ln x$ que es cóncava en su dominio $(x > 0)$, se tiene, $\ln 3 = \ln\left(a^2\frac{1}{a} + b^2\frac{1}{b} + c^2\frac{1}{c} + 2ab\frac{1}{b} + 2bc\frac{1}{c} + 2ca\frac{1}{a}\right) \geq$

$$a^2\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b^2\ln\left(\frac{1}{b}\right) + c^2\ln\left(\frac{1}{c}\right) + 2ca\ln\left(\frac{1}{a}\right) + 2ab\ln\left(\frac{1}{b}\right) + 2bc\ln\left(\frac{1}{c}\right) =$$

$$\ln\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ca}\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab}\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc}\right].$$

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = \ln x$ es inyectiva resulta que
$\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ca}\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab}\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc} \leq 3$, o equivalentemente, $a^{a^2+2ca}\, b^{b^2+2ab}\, c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}$.

La igualdad se alcanza cuando $a = b = c = \frac{1}{3}$.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME
SESIONES PRIMERA Y SEGUNDA
18 y 19 DE ENERO DE 2008 (TARDE Y MAÑANA)

1. Demuestra que no existen enteros *a, b, c, d* tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ cumpla que $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.

SOLUCIÓN:
Supongamos que tal polinomio existe.
Por el teorema del resto $P(x) = (x-4)Q(x) + 1,$, siendo $Q(x)$ un polinomio de grado dos con coeficientes enteros.
Entonces $P(7) = 2 = (7-4)Q(7) + 1 \ \Rightarrow \ Q(7) = \frac{1}{3}$ que no es entero, en contra de la hipótesis.

2. En el triángulo *ABC*, el área *S* y el ángulo *C* son conocidos. Hallar el valor de los lados *a* y *b* para que el lado *c* sea lo más corto posible.

SOLUCIÓN:
Por una parte

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = \left(a-b\right)^2 + 2ab\left(1-\cos C\right)$ y por otra

$S = \frac{1}{2} absenC \Rightarrow ab = \frac{2S}{senC}$. Entonces,

$c^2 = \left(a-b\right)^2 + \frac{4S\left(1-\cos C\right)}{senC}$ será mínimo cuando $a = b = \sqrt{\frac{2S}{senC}}$.

3. Determina todas las ternas de números reales (a,b,c), que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} a^5 = 5b^3 - 4c \\ b^5 = 5c^3 - 4a. \\ c^5 = 5a^3 - 4b \end{cases}$

SOLUCIÓN:
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = \text{máximo}\left\{a,b,c\right\}$.
Primer caso: $c \geq b$. Entonces $a^5 + 4c \geq c^5 + 4b$ y $b \geq a$. De este modo $a = b = c$.
Segundo caso: $b \geq c$. Entonces $b^5 + 4a \geq c^5 + 4b$ y $c \geq a$. Por tanto $a = b = c$.
Así todo se reduce a resolver la ecuación $t^5 - 5t^3 + 4t = 0$, donde $t = a = b = c$.
Claramente $t \in \left\{0, 1, -1, 2, -2\right\}$ y hay cinco posibles ternas que cumplen el sistema dado.

4. ¿Qué número es mayor 999! ó 500^{999}? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN:

Pongamos $A = 999!$, $B = 500^{999}$, tenemos

$$\frac{A}{B} = \frac{500-499}{500} \cdot \frac{500-498}{500} \dots \frac{500-1}{500} \cdot \frac{500}{500} \cdot \frac{500+1}{500} \dots \frac{500+498}{500} \cdot \frac{500+499}{500} =$$

$$\left(1-\frac{499}{500}\right)\left(1-\frac{498}{500}\right)\dots\left(1-\frac{1}{500}\right)1\left(1+\frac{1}{500}\right)\dots\left(1+\frac{498}{500}\right)\left(1+\frac{499}{500}\right) =$$

$$\left[1-\left(\frac{499}{500}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{498}{500}\right)^2\right]\dots\left[1-\left(\frac{2}{500}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{1}{500}\right)^2\right] < 1.$$

Por tanto $A < B$.

5. Sean D, E, F los puntos de tangencia del círculo inscrito al triángulo ABC con los lados BC, AC y AB respectivamente. Demuestra que

$$4S_{DEF} \leq S_{ABC}$$

donde S_{XYZ} denota el área del triángulo XYZ.

SOLUCIÓN:

Sea I el incentro del triángulo ABC. Tenemos que $ID \perp BC, IE \perp AC$ e $IF \perp AB$.
Por otro lado, utilizando las notaciones usuales,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A \quad \text{y} \quad S_{EFI} = \frac{1}{2} EI \cdot FI \operatorname{sen} EIF = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} EIF.$$

Como los ángulos A y EIF son suplementarios, entonces $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} EIF$ y $\frac{S_{EIF}}{S_{ABC}} = \frac{r^2}{bc}$. Análogamente $\frac{S_{EID}}{S_{ABC}} = \frac{r^2}{ab}$ y $\frac{S_{FID}}{S_{ABC}} = \frac{r^2}{ca}$.

Sumando estas tres fracciones resulta:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{EIF} + S_{EID} + S_{FID}}{S_{ABC}} = \frac{r^2(a+b+c)}{abc}.$$

Como $S_{ABC} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$ y $4R\,S_{ABC} = abc$, se obtiene $\frac{r^2(a+b+c)}{abc} = \frac{r}{2R}$.

Aplicando ahora la desigualdad de Euler $R \geq 2r$, se obtiene $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{2R} \leq \frac{1}{4}$ y la igualdad se cumple cuando el triángulo ABC es equilátero.

6. Las longitudes de los lados y de las diagonales de un cuadrilátero convexo plano $ABCD$ son racionales. Si las diagonales AC y BD se cortan en el punto O, demuestra que la longitud OA es también racional.

SOLUCIÓN:
Sean $\angle ABD = \alpha$, $\angle CBD = \gamma$ y $\angle CBA = \beta$.

Por el teorema del coseno en el triángulo ΔABC, $\cos\beta = \dfrac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC}$ es un número racional. Análogamente $\cos\alpha$ y $\cos\gamma$ son números racionales.
Por otra parte, $\cos\beta = \cos(\alpha+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - sen\alpha\, sen\gamma$. Y así $sen\,\alpha\, sen\,\gamma$ es un número racional. También es racional $sen^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$. Por tanto $\dfrac{sen\,\alpha}{sen\,\gamma} = \dfrac{sen\,\alpha\, sen\,\gamma}{sen^2\gamma}$ es racional.
Aplicando el teorema de los senos a los triángulos ΔOAB y ΔOCB respectivamente se tiene que $\dfrac{AB}{sen\angle BOA} = \dfrac{AO}{sen\,\alpha}$ y $\dfrac{BC}{sen\angle BOC} = \dfrac{OC}{sen\,\gamma}$. Se deduce que $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{BC} \cdot \dfrac{sen\,\alpha}{sen\,\gamma} = r$, es un número racional. Entonces $AC = OA + OC = (1+r)OA$.
Por tanto $OA = \dfrac{AC}{1+r}$ es racional.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME

SESIONES PRIMERA Y SEGUNDA

19 DE ENERO DE 2008 (MAÑANA Y TARDE)

1. Sea m un entero positivo. Demuestra que no existen números primos de la forma $2^{5m}+2^m+1$.

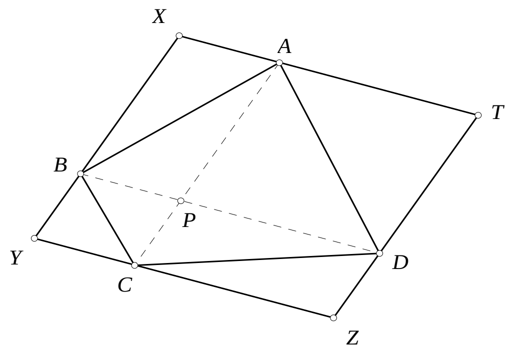
SOLUCIÓN:

Sumando y restando 2^{2m} resulta,
$2^{5m}+2^m+1=2^{5m}+2^m+1-2^{2m}+2^{2m}=2^{2m}(2^{3m}-1)+2^{2m}+2^m+1.$
Teniendo en cuenta que $2^{3m}-1=(2^m-1)(2^{2m}+2^m+1),$ resulta que,

$2^{5m}+2^m+1=(2^{3m}-2^{2m}+1)(2^{2m}+2^m+1),$ que es compuesto porque cada uno de los dos factores es un entero positivo mayor que 1

2. Un cuadrilátero convexo tiene la propiedad que cada una de sus dos diagonales biseca su área. Demuestra que este cuadrilátero es un paralelogramo.

SOLUCIÓN:



Sea *ABCD* el cuadrilátero dado. Es sabido que al trazar paralelas a cada diagonal por los extremos de la otra se forma un paralelogramo (*XYZT* en la figura) de área doble de la del cuadrilátero de partida.
Si *AC* biseca a *ABCD* también biseca a *XYZT*, pero siendo *XYZT* un paralelogramo y *AC* paralela a los lados *XY* y *TZ* ; *P* es medio de *BD*.
De modo análogo se prueba que *P* es punto medio de *AC* y entonces los triángulos *APD* y *BPC* son iguales (dos lados iguales y el ángulo comprendido) y también *APB* y *CPD*.
En consecuencia el cuadrilátero inicial tiene iguales los lados opuestos y es un paralelogramo.

3. Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que, al menos, el producto de dos de estos números es un cuadrado perfecto.

SOLUCIÓN:
Todos estos 17 números se pueden descomponer en factores primos de la forma $2^a3^b5^c7^d$, donde sus exponentes a,b,c,d son enteros no negativos.

Si dos números de este tipo, es decir $2^a3^b5^c7^d$ y $2^{\acute{a}'}3^{b'}5^{c'}7^{d'}$ se multiplican, su producto es $2^{a+a'}3^{b+b}5^{c'+c'}7^{d+d'}$ y si los cuatro exponentes $a+a', b+b', c+c'$ y $d+d'$ son pares este producto es un cuadrado perfecto.
Para que esto ocurra las dos cuaternas (a,b,c,d) y (a',b',c',d') deben tener igual paridad, es decir a y a', b y b', c y c', d y d' deben tener respectivamente la misma paridad. Como cada uno de los cuatro números a,b,c,d puede ser par o impar hay un total de 16 cuaternas con distinta paridad entre sí. Al tener 17 números y, por tanto, 17 cuaternas, por el principio del palomar, dos deben tener igual paridad y entonces su producto es un cuadrado perfecto.

4. Determina el triángulo de menor perímetro entre todos los que tienen la circunferencia inscrita con el mismo radio y el mismo valor de un ángulo.

SOLUCIÓN:
Sean ABC todos los triángulos con esta propiedad; es decir que el ángulo común con el mismo valor es A y el radio inscrito también común es r.
Entonces el perímetro
$2p = a+b+c =$

$$r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)+r\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)+r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)=2r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right).$$

Como A y r son fijos el perímetro será mínimo cuando sea mínima la expresión siguiente:

$$cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2} = \frac{sen((B+C)/2)}{sen B/2\ sen C/2}=\frac{\cos A/2}{sen B/2\ sen C/2},\ \text{pues } A+B+C=180^{\text{o}}.$$

Y entonces $sen B/2\ sen C/2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)$

debe ser máximo, lo que conduce a que $\cos\frac{B-C}{2}$ sea 1 y entonces $B=C$.
Así los triángulos de perímetro mínimo con el ángulo A fijo y el radio inscrito fijo son los triángulos isósceles con $B=C=\frac{180^{\text{o}}-A}{2}$.

5. Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30.

SOLUCIÓN:
Supongamos que haya 31 comités. Entonces hay, al menos, $31\times 5=155$ asientos en estos 31 comités. Como sólo hay 25 miembros, al menos, uno de ellos tendrá que

ocupar, al menos, 7 de los 155 asientos. Consideremos este miembro A y 7 de los comités donde se sienta. Hay, al menos, otros 28 asientos en estos 7 comités. Pero como sólo hay 24 miembros más, al menos, uno de ellos tendrá que ocupar, al menos, 2 de esos asientos. Sin embargo, este miembro y A deberán estar juntos en, al menos, 2 comités, lo que contradice las condiciones del enunciado.

6. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son solución de la ecuación

$$\sqrt{3^x(5^y+7^z)}+\sqrt{5^y(7^z+3^x)}+\sqrt{7^z(3^x+5^y)}=\sqrt{2}\left(3^x+5^y+7^z\right).$$

SOLUCIÓN:

Poniendo $a=3^x, b=5^y$ y $c=7^z$ la ecuación anterior se convierte en:

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}=\sqrt{2}\,(a+b+c).$$

Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta:

$$\sqrt{a(b+c)} \le \sqrt{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{b+c}{4}\right)$$

$$\sqrt{b(c+a)} \le \sqrt{2}\left(\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\right)$$

$$\sqrt{c(a+b)} \le \sqrt{2}\left(\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\right)$$

Sumando las desigualdades anteriores se obtiene

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)} \le \sqrt{2}\,(a+b+c).$$

La igualdad tiene lugar cuando $a=b=c.$ Por tanto, las soluciones buscadas son aquellas para las que $3^x=5^y=7^z$, lo que equivale a que $x\ln 3=y\ln 5=z\ln 7.$

Es decir las soluciones de la ecuación dada son:

$$x=\frac{1}{\ln 3}t,\; y=\frac{1}{\ln 5}t,\; z=\frac{1}{\ln 7}t, \quad t\in R.$$

(Se observa que en general $p^{\frac{1}{\ln p}}=e^{\left(\frac{1}{\ln p}\right)\ln p}=e,$ con $p>0$ y $p\neq 1$ y $a=b=c=e^t$).