OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Viernes

1 *Hallar todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación*

$$y^k = x^2 + x$$

donde k es un número entero dado mayor que 1.

Solución. Puesto que $y^k = x^2 + x = x(x+1)$ y $mcd(x, x+1) = 1$ resulta que tanto $x+1$ como x deben ser potencias k-ésimas de un entero. Pero los dos únicos números enteros consecutivos que son potencias k-ésimas, con $k > 1$ son 0 y 1 o bien -1 y 0 . Las dos únicas soluciones son, pues, $x = 0, y = 0$ y $x = -1, y = 0$.

2 *Busca un polinomio de grado tres cuyas raíces sean, precisamente, el cuadrado de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.*

Solución. Sean r, s y t las raíces, reales o complejas, del polinomio $p(x)$. Por tanto, $p(x) = (x-r)(x-s)(x-t)$. El polinomio que buscamos, salvo que multipliquemos por una constante, será de la forma $q(x) = (x-r^2)(x-s^2)(x-t^2)$. De aquí resulta

$$q(x^2) = (x^2-r^2)(x^2-s^2)(x^2-t^2) = (x-r)(x+r)(x-s)(x+s)(x-t)(x+t)$$

Y notando que

$$p(-x) = (-x-r)(-x-s)(-x-t) = -(x+r)(x+s)(x+t),$$

entonces

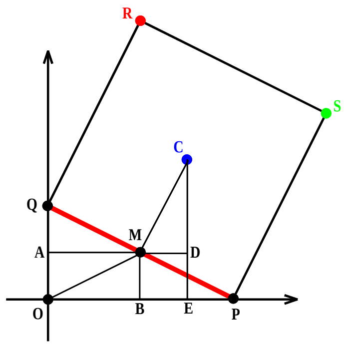
$$\begin{aligned} q(x^2) &= (x-r)(x+r)(x-s)(x+s)(x-t)(x+t) = p(x)[-p(-x)] \\ &= (x^3+2x^2+3x+4)(x^3-2x^2+3x-4) = x^6+2x^4-7x^2-16 \end{aligned}$$

Luego, $q(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 16$ es solución (y, también, este mismo polinomio multiplicado por una constante cualquiera).

3 *Deslizamos un cuadrado de 10 cm de lado por el plano OXY de forma que los vértices de uno de sus lados estén siempre en contacto con los ejes de coordenadas, uno con el eje OX y otro con el eje OY. Determina el lugar geométrico que en ese movimiento describen:*

1. *El punto medio del lado de contacto con los ejes.*
2. *El centro del cuadrado.*
3. *Los vértices del lado de contacto y del opuesto en el primer cuadrante.*

Solución. Sean $PQRS$ el cuadrado de lado 10 cm, PQ el lado de apoyo, $M(m_1, m_2)$ el punto medio de dicho lado y $C(c_1, c_2)$ el centro del cuadrado tal y como muestra la figura donde, además, señalamos los puntos A, B, D y E.



a) *Caso del punto medio M.*

$$OM = PM = \frac{1}{2}PQ = 5,$$

luego $m_1^2 + m_2^2 = 25$.

b) *Caso del centro del cuadrado C.*

Los triángulos AQM, AOM, BMO y DMC son claramente congruentes

$$AM = OB = DC, AQ = OA = MD = BM, \text{ y } OM = MQ = MC = 5.$$

Así, resulta que las coordenadas del centro del cuadrado, en su deslizamiento, son iguales

$$c_1 = OE = OB + BE = m_1 + MD = m_1 + m_2,$$

$$c_2 = EC = ED + DC = OA + AM = m_2 + m_1$$

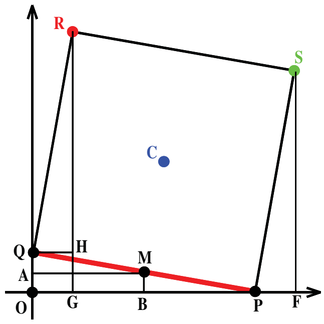
Luego, el centro del cuadrado se mueve, en este primer cuadrante, sobre un segmento de la línea. Las posiciones extremas se dan cuando el lado PQ se apoya sobre alguno de los ejes, $C(5, 5)$, y cuando forma una escuadra, esto es, un triángulo rectángulo isósceles, con ellos,

$C(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$. Trabajando análogamente en los demás cuadrantes podemos afirmar que el centro del cuadrado recorre el segmento de sus bisectrices que viene dado por la expresión

$$C(c_1, c_2) = (\pm 5\lambda, \pm 5\lambda) \ \text{ con } \ \lambda \in [1, \sqrt{2}].$$

c) *Caso de los vértices del cuadrado en el lado de contacto: P y Q.*

Los vértices P y Q se mueven sobre segmentos de los ejes coordenados, esto es, de las líneas $x = 0$ y $y = 0$.



Los casos extremos se dan cuando el lado de contacto descansa sobre los ejes. Así: si las coordenadas de uno son $(0, \lambda)$, las del otro $(\pm\sqrt{100 - \lambda^2}, 0)$ y si las coordenadas de uno son $(\lambda, 0)$, las del otro son $(0, \pm\sqrt{100 - \lambda^2})$, con $\lambda \in [-10, 10]$.

d) *Caso de los vértices del cuadrado en el lado opuesto al de contacto: R y S.*

De nuevo, apoyándonos en la figura, por ser congruentes los triángulos OQP, QHR y PFS y, a la vez, semejantes a AQM:

$$R(r_1, r_2) r_1 = 2m_2 r_2 = 2m_1 + m_2$$

de donde $m_1 = \frac{r_2 - r_1}{2}$, $m_2 = r_1/2$. Como sabemos que $m_1^2 + m_2^2 = 25$, tenemos para R

$$(\frac{r_2 - r_1}{2})^2 + (\frac{r_1}{2})^2 = 25$$

o bien $(r_2 - r_1)^2 + r_1^2 = 100$. El lugar geométrico está, pues, en la elipse de ecuación $(y - x)^2 + x^2 = 100$ y es un arco de elipse que se puede parametrizar como

$$y = x + \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [0, 10]$ e $y \in [10, 10\sqrt{2}]$. Análogamente, para S sale el arco de elipse $y^2 + (x - y)^2 = 100$ con

$$x = y + \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [0, 10]$ y $x \in [10, 10\sqrt{2}]$.

En los demás cuadrantes sale de forma parecida:

Segundo cuadrante:

$$y = -x + \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [10, 10\sqrt{2}]$.

$$x = -y - \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [0, 10]$ y $x \in [-10\sqrt{2}, -10]$.

Tercer cuadrante:

$$y = x - \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [-10, -10\sqrt{2}]$.

$$x = y - \sqrt{100 - y^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [-10\sqrt{2}, -10]$.

Cuarto cuadrante:

$$y = -x - \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [0, 10]$ e $y \in [-10, -10\sqrt{2}]$.

$$x = -y + \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [-10, 0]$ y $x \in [10, 10\sqrt{2}]$.

4 *Calcula la suma de los inversos de los dos mil trece primeros términos de la sucesión de término general*

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$$

Solución. El término general se puede escribir como

$$a_n = \frac{4n^2 - 1}{4n^2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2}$$

y su inverso es

$$\frac{1}{a_n} = \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n-1} + \frac{n}{2n+1}$$

Hemos de calcular

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2012}} + \frac{1}{a_{2013}}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2012}{4023} + \frac{2012}{4025}\right) + \left(\frac{2013}{4025} + \frac{2013}{4027}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2012}{4025} + \frac{2013}{4025}\right) + \frac{2013}{4027}$$

$$= 2013 + \frac{2013}{4027} = 2013\left(1 + \frac{1}{4027}\right) = \frac{8108364}{4027} \simeq 2013.5$$

5 *Obtén los dos valores enteros de x más próximos a 2013°, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica*

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$$

Solución. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = 2\sqrt{2}$$

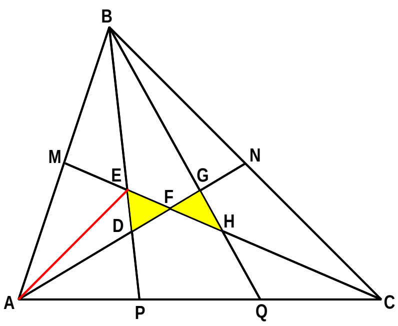
La igualdad se alcanza cuando $2^{\sin^2 x} = 2^{\cos^2 x}$. Es decir, cuando $\sin^2 x = \cos^2 x$ o $\sin x = \pm \cos x$. Los valores de x que satisfacen la igualdad anterior son $x = 45° + 90° k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Los valores pedidos se obtienen para

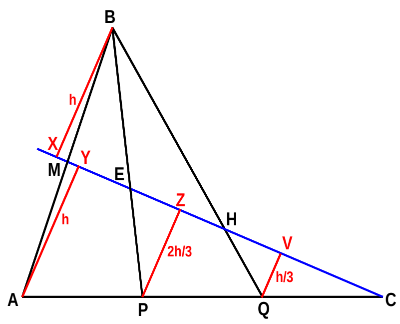
$$k_1 = \left[\frac{2013° - 45°}{90}\right] = 21 \quad \text{y} \quad k_1 = \left[\frac{2013° + 45°}{90}\right] = 22$$

y son $x_1 = 1935°$ y $x_2 = 2025°$.

6 *Por los puntos medios de dos lados de un triángulo ABC trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.*

Solución. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el área del triángulo ABC es uno. Es decir, $[ABC] = 1$. Tenemos





Las medianas dividen al triángulo en seis partes de igual área, luego: $[AMF] = [FNC] = \frac{1}{6}$ y $[AFC] = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Trazamos, desde B, A, P y Q, perpendiculares sobre la mediana CM y sean X, Y, Z y V sus respectivos pies tal y como muestra la figura de la derecha. En esta figura se tiene trabajando con la mediana CM :

- $AMY \equiv BMX$. Como $AM = MB$ entonces $AY = XB = h$.
- $AYC \cong PZC \cong QVC$. Como $AP = PQ = QC$, entonces $PZ = \frac{2}{3} h$ y $QV = \frac{1}{3} h$.

- $PEZ \cong XBE$. Como $PZ = \frac{2}{3}XB \to PE = \frac{2}{3}EB \to PE = \frac{2}{5}PB$ y $EB = \frac{3}{5}PB$.
- $QHV \cong XBH$. Como $QV = \frac{1}{3}QB \to QH = \frac{1}{3}HB \to QH = \frac{1}{4}QB$

Y trabajando, análogamente[1], sobre la otra mediana AN, se obtiene

$$QG = \frac{2}{5}QB \quad GB = \frac{3}{5}QB \quad \text{y} \quad PD = \frac{1}{4}PB$$

Nos fijamos, por ejemplo, en la ceviana PB y ya podemos conocer la proporción en que los puntos D y E la dividen. Falta

$$DE = PE - PD = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) PB = \frac{3}{20}PB$$

Por tanto,

$$PD = \frac{5}{20}PB \quad DE = \frac{3}{20}PB \quad \text{y} \quad EB = \frac{12}{20}PB$$

Ahora dibujamos la línea auxiliar AE. Sobre la ceviana PB, ABP de área conocida queda dividido en tres triángulos, ABE, AED y ADP, de idéntica altura. Por tanto,

$$\frac{[ADP]}{[ABP]} = \frac{PD}{PB} = \frac{5}{20}, \quad \frac{[AED]}{[ABP]} = \frac{DE}{PB} = \frac{3}{20}, \quad \frac{[ABE]}{[ABP]} = \frac{EB}{PB} = \frac{12}{20}$$

De

$$[ABP] = \frac{1}{3} \to [ADP] = \frac{5}{60}, \quad [AED] = \frac{3}{60} \quad \text{y} \quad [ABE] = \frac{12}{60}$$

Por otro lado, como EM es mediana del triángulo ABE, se tiene $[AME] = \frac{1}{2}[ABE] = \frac{6}{60}$. Finalmente,

$$\frac{1}{6} = [AMF] = [AME] + [AED] + [DEF] = \frac{6}{60} + \frac{3}{60} + [DEF]$$

de donde resulta el área de media pajarita. Es decir, $[DEF] = \frac{1}{60}$. Análogamente, $[FGH] = \frac{1}{60}$, y el área pedida es

$$[DEF] + [FGH] = \frac{1}{30} = \frac{1}{30}[ABC]$$

[1]Todo esto es equivalente a aplicar el Teorema de Menelao sobre las transversales de un triángulo

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Sábado

1 *Dado un número entero n escrito en el sistema de numeración decimal, formamos el número entero k restando del número formado por las tres últimas cifras de n el número formado por las cifras anteriores restantes. Demostrar que n es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si k también lo es.*

Solución. Sea A el número formado por las tres últimas cifras de n y B el número formado por las cifras anteriores. Entonces $n = 1000B + A$ y $k = A - B$. Tenemos $n - k = 1001\,B = 7 \cdot 11 \cdot 13\,B$ y n y k son congruentes módulo 7, 11 y 13.

2 *Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ valen lo mismo.*

Solución. Sean r, s y t las raíces, reales o complejas, del polinomio $p(x)$ y sea S_n la suma de sus $n-$ésimas potencias, esto es, $S_n = r^n + s^n + t^n$. Por un lado, teniendo en cuenta las fórmulas de Cardano-Vièta resulta que $S_1 = r + s + t = -2$, $rs + st + tr = 3$ y $rst = -4$ lo que nos permite calcular S_2. En efecto,

$$S_2 = r^2 + s^2 + t^2 = (r + s + t)^2 - 2(rs + st + tr) = -2$$

Y por otro lado:

$$\begin{array}{rcl} p(r) = r^3 + 2r^2 + 3r + 4 = 0 & \rightarrow & r^3 = -2r^2 - 3r - 4 \\ p(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0 & \rightarrow & s^3 = -2s^2 - 3s - 4 \\ p(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4 = 0 & \rightarrow & t^3 = -2t^2 - 3t - 4 \end{array}$$

Sumando las expresiones anteriores, resulta

$$S_3 = r^3 + s^3 + t^3 = -2S_2 - 3S_1 - 12 = -2$$

quedando probado que las sumas de las tres primeras potencias de las raíces del polinomio $p(x)$ valen lo mismo: $s_1 = S_2 = S_3 = -2$.

3 *En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que* *la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los* 10 *cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los* 10 *cm.*

Solución. Sean P_1, P_2,... P_{15} las quince parejas iniciales. Ordenemos ahora los chicos por alturas $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{15}$ y también las chicas $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{15}$. Supongamos que una de las parejas tuviese una diferencia de alturas superior a 10 cm, digamos $a_k - b_k > 10$. Entonces las parejas formadas por las chicas de alturas $b_1, \ldots, b_k$ y los chicos de alturas $a_k, \ldots, a_{15}$ también cumplirán $a_i - b_j > 10$. Coloquemos ahora cada una de las 16 personas mencionadas, de alturas $b_1, \ldots, b_k, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{15}$, en las parejas (cajas) P_s iniciales, según el lugar que ocupaban. Por el principio de las casillas (palomar), dos personas compartirán la misma caja. Por lo tanto en las parejas iniciales había una cuya diferencia de alturas era mayor que 10 cm, contra lo supuesto.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Tarde del Sábado

4 *Demuestra que el producto de los dos mil trece primeros términos de la sucesión*

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^3}$$

no llega a valer 3*.*

Solución. Veamos por inducción que $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n \leq 3 - \frac{1}{n}$ y, así, quedará probado para el caso particular $n = 2013$ que se pide en el enunciado. Para $n = 1$ es $p_1 = a_1 = 1 + \frac{1}{1^3} = 2 \leq 3 - \frac{1}{1}$. Supongamos que es cierto para $n = k$, $p_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_k \leq 3 - \frac{1}{k}$. Hemos de probar que se cumple para $n = k + 1$. Es decir, hemos de ver que $p_{k+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_k \cdot a_{k+1} \leq 3 - \frac{1}{k+1}$. En efecto,

$$p_{k+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_k \cdot a_{k+1} = p_k \cdot a_{k+1} \leq \left(3 - \frac{1}{k}\right)\left(3 - \frac{1}{k}\right)$$

$$= 3 - \frac{1}{k} + \frac{3}{(k+1)^3} - \frac{1}{k(k+1)^3}$$

Ahora falta ver que

$$3 - \frac{1}{k} + \frac{3}{(k+1)^3} - \frac{1}{k(k+1)^3} \leq 3 - \frac{1}{k+1}$$

lo caul es equivalente a probar que

$$\frac{3}{(k+1)^3} - \frac{1}{k(k+1)^3} \leq \frac{1}{-}\frac{1}{k+1} \Leftrightarrow k^2 - k + 2 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0$$

5 *Resuelve la ecuación exponencial*

$$2^x \cdot 3^{5^{-x}} + \frac{3^{5^x}}{2^x} = 6$$

Solución. Aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica y, después, una de de sus más conocidas consecuencias (la suma de un número real positivo y su inverso es siempre mayor o igual que 2, y la igualdad sólo se da para el número 1) tenemos,

$$6 = 2^x 3^{5^{-x}} + 2^{-x} 3^{5^x} \geq 2\sqrt{2^x 3^{5^{-x}} 2^{-x} 3^{5^x}} = 6.$$

Y la igualdad se dará cuando los números mediados sean iguales.

$$2^x 3^{5^{-x}} = 2^{-x} 3^{5^x} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x} = 3^{5^x - 5^{-x}} \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^{-x}$$

esto es, cuando $x = 0$ que será, pues, la única solución de la ecuación.

6 *Sean A, B y C los vértices de un triángulo y P, Q y R los respectivos pies de las bisectrices trazadas desde esos mismos vértices. Sabiendo que PQR es un triángulo rectángulo en P, se te pide probar dos cosas:*

a) *Que ABC ha de ser obtusángulo.*

b) *Que en el cuadrilátero $ARPQ$, pese a no ser cíclico, la suma de sus ángulos opuestos es constante.*

Solución. Para resolver el problema utilizaremos dos herramientas fundamentales en los problemas geométricos relativos a triángulos: el teorema de la bisectriz *(La bisectriz de un ángulo de un triángulo corta al lado opuesto en dos segmentos de longitudes proporcionales a los otros dos lados del triángulo)* y el teorema de Stewart *(Si en un triángulo ABC consideramos un punto P en el lado AB , entonces se cumple que $AP^2\, a = PB\, b^2 + PC\, c^2 - PB\, PC\, a$).*
Sea ahora el punto P pie de la bisectriz de nuestro problema. Por el teorema de la bisectriz tenemos

$$PB = \frac{ac}{b+c} \text{ y } PC = \frac{ab}{b+c}.$$

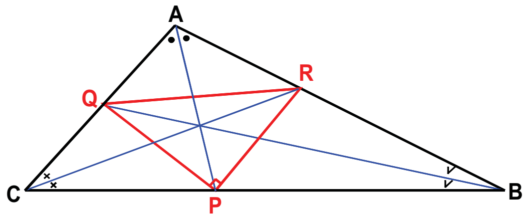
Ahora, aplicando el teorema de Stewart queda

$$AP^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)$$

y, substituyendo a^2 por su expresión obtenida del teorema del coseno

$$AP = \frac{2bc}{(b+c)^2} \cos\frac{A}{2}.$$

Calculemos ahora los lados del triángulo PQR.



Por el teorema del coseno y los teoremas de la bisectriz y de Stewart obtendremos

$$PR^2 = AP^2+QA^2-2AP\,RA\cos A = \frac{4b^2c^2(a-b)\cos^2 A/2}{(b+c)^2(a+b)}+\frac{b^2c^2}{(a+b)^2},$$

$$QR^2 = QA^2+RA^2-2QA\,RA\cos A = \frac{4b^2c^2(a-b)\cos^2 A/2}{(b+c)^2(a+b)}+\frac{b^2c^2}{(a+b)^2},$$

$$PR^2 = AP^2+QA^2-2AP\,RA\cos A = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2}+\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}-\frac{2b^2c^2\cos A}{(a+b)(a+c)}.$$

Como que el triángulo PQR es rectángulo $PQ^2+PR^2=QR^2$, substituyendo y simplificando, tenemos

$$2a^2-b^2-c^2+(2a^2+2bc)\cos A=0$$

de donde sale $\cos A=-1/2$, $A=120^\circ$ y de aquí $R+Q=150^\circ$.