Problemas Primera Sesión

1. *Demuestra que*

$$(ax+by)^2 \leq ax^2+by^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a+b=1, a, b \geq 0$. *¿En qué casos se da la igualdad?*

Solución 1. Nótese que

$$ax^2+by^2-(ax+by)^2 = a(1-a)x^2+b(1-b)y^2-2abxy = ab(x-y)^2,$$

donde hemos usado que $1-a=b$ y $1-b=a$. Esta expresión es claramente no negativa, siendo nula si y sólo si bien $ab=0$ (es decir, uno de entre a, b es 0 y el otro es 1), bien $x=y$.

Solución 2. Considérense los vectores $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$ y $\left(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y\right)$, cuyo producto escalar es $ax+by$, y cuyos módulos son $\sqrt{a+b}=1$ y $\sqrt{ax^2+by^2}$. La desigualdad propuesta es equivalente a la desigualdad del producto escalar aplicada a estos vectores, y por lo tanto cierta, dándose la igualdad si y sólo si ambos vectores son proporcionales, cosa que puede pasar bien si una de sus coordenadas es nula (es decir, si $a=0$ o $b=0$), bien si ambas coordenadas son proporcionales cuando no son nulas, es decir, $x=y$.

Solución 3. La función $f(z)=z^2$ es claramente convexa, con lo que por la desigualdad de Jensen, para cualesquiera reales no negativos a, b, y cualesquiera reales x, y, se tiene

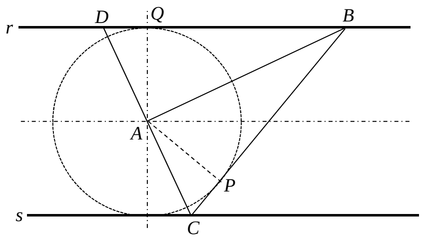
$$(ax+by)^2 = f(ax+by) \leq \frac{af(x)+bf(y)}{a+b} = \frac{ax^2+by^2}{a+b}.$$

Usando que $a+b=1$, se obtiene el resultado pedido, dándose la igualdad bien si uno de los dos puntos "desaparece" (es decir, $a=0$ o $b=0$), o en caso contrario si ambos puntos coinciden (es decir, $x=y$).

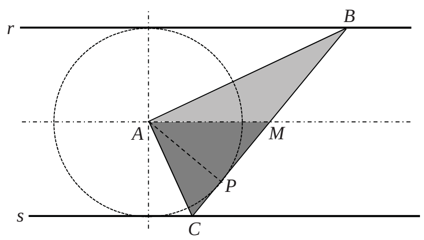
□

2. *Sean* r *y* s *dos rectas paralelas, y* A *un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto* B *de la recta* r*, sea* C *el punto de la recta* s *tal que* $\angle BAC = 90°$*, y sea* P *el pie de la perpendicular desde* A *sobre la recta* BC*. Demuestra que, independientemente de qué punto* B *de la recta* r *tomemos, el punto* P *está sobre una circunferencia fija.*

Solución 1. Sea Q el punto de r tal que AQ es perpendicular a r. Sea D el punto donde AC corta a r. Como A está a la misma distancia de las rectas r y s, $AC = AD$. Los triángulos ABC y ABD son ambos rectángulos en A, comparten el lado AB, y el lado AC es igual al lado AD. En consecuencia, ambos triángulos son iguales. Los pies de las alturas desde A en cada triángulo son P y Q, respectivamente, por lo que $AP = AQ$. Como Q no depende de B, la distancia $AP = AQ$ es fija, y el punto P está sobre la circunferencia fija de centro A, que es tangente simultáneamente a las rectas r y s.



Solución 2. Sea M el punto medio del segmento BC. Como el triángulo ABC es rectángulo en A, M es su circuncentro, es decir, $AM = MB = MC$. Llamando d a la distancia de A a las rectas r y s, nótese que la longitud de las alturas desde B y desde C sobre AM es d, con lo que las áreas de AMB y AMC son ambas iguales a $\frac{d \cdot AM}{2}$, y el área del triángulo ABC es $d \cdot AM$. Pero $BC = MB + MC = 2AM$, luego la longitud AP de la altura desde A sobre BC es $2\frac{d \cdot AM}{2AM} = d$, que es constante, concluyendo igual que en la solución anterior.



Solución 3. Si h es la distancia entre A y las rectas r y s, podemos tomar un sistema de coordenadas cartesianas tales que $A \equiv (0, 0)$, $r \equiv y = h$, $s \equiv y = -h$, y para cualquier punto $B \equiv (d, h)$, la recta AB tiene pendiente $\frac{h}{d}$, con lo que

$$AC \equiv y = -\frac{dx}{h}, \qquad C \equiv \left(\frac{h^2}{d}, -h\right), \qquad BC \equiv y = \frac{2hdx}{d^2 - h^2} - \frac{h\left(d^2 + h^2\right)}{(d^2 - h^2)}.$$

La ecuación de la recta AP es entonces $y = -\frac{d^2 - h^2}{2hd}x$, con lo que podemos hallar P como la intersección de esta recta con la recta BC, resultando finalmente tras algo de álgebra en

$$P \equiv \left(\frac{2h^2 d}{d^2 + h^2}, -\frac{h\left(d^2 - h^2\right)}{d^2 + h^2}\right), \qquad AP^2 = h^2 \frac{4h^2 d^2 + \left(d^2 - h^2\right)^2}{\left(d^2 + h^2\right)^2} = h^2,$$

es decir $AP = h$, concluyéndose como en las soluciones anteriores.

$\square$

3. *Un campeonato de baloncesto se ha jugado por sistema de liga a dos vueltas (cada par de equipos se enfrentan dos veces) y sin empate (si el partido acaba en empate hay* *prórrogas hasta que gane uno de los dos). El ganador del partido obtiene 2 puntos y el perdedor 1 punto. Al final del campeonato, la suma de de los puntos obtenidos por todos los equipos salvo el campeón es de 2015 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado el campeón?*

Solución. Supongamos que el número de equipos es n. Entonces, se juegan un total de $2\binom{n}{2} = n^2 - n$ partidos en el campeonato por ser a doble vuelta. En cada partido se dan 3 puntos, por lo que $3n^2 - 3n$ es el número total de puntos dados. Si el campeón tiene P puntos, y los otros $n-1$ equipos tienen entre todos 2015 puntos, entonces

$$P = 3n^2 - 3n - 2015,$$

donde además $P > \frac{2015}{n-1}$ para poder ser el campeón. Para que se cumpla esto, ha de ser

$$3n^2 - 3n - 2015 > \frac{2015}{n-1}, \qquad 3n(n-1) > \frac{2015n}{n-1}, \qquad n-1 > \sqrt{\frac{2015}{3}}.$$

Como $25^2 = 625 < \frac{2015}{3}$, se tiene que $n > 26$, o $n \geq 27$.
Por otra parte, la puntuación máxima que ha podido obtener el ganador es $4(n-1)$, si ha ganado todos sus partidos (2 partidos con cada uno de los otros $n-1$ equipos), es decir,

$$3n^2 - 3n - 2015 \leq 4(n-1), \qquad (3n-4)(n-1) \leq 2015.$$

Ahora bien, si $n \geq 28$, entonces $3n - 4 \geq 80$, $n - 1 \geq 27$, y $80 \cdot 27 = 2160 > 2015$, luego ha de ser $n \leq 27$.
Luego $n = 27$ es el número de equipos en el campeonato, el número de puntos obtenidos por el campeón es $3 \cdot 27^2 - 3 \cdot 27 - 2015 = 91$, y como estos puntos se han obtenido en $2 \cdot 26 = 52$ partidos, el número de partidos ganados (en los que se obtienen 2 puntos en lugar de 1) es claramente $91 - 52 = 39$.

□

4. *Los enteros positivos x, y, z cumplen*

$$x + 2y = z, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310.$$

Halla todos los posibles valores del producto xyz.

Solución 1. Podemos despejar $2y$ de la primera ecuación y sustituir en la segunda, con lo que ha de cumplirse

$$310 = x^2 - (z-x)^2 + z^2 = 2zx, \qquad zx = 155 = 5 \cdot 31.$$

Luego al ser $5, 31$ primos, se tiene que z ha de tomar uno de los valores $155, 31, 5, 1$, tomando x respectivamente los valores $1, 5, 31, 155$. Como además $z = x + 2y > x$, los dos últimos casos quedan descartados. En los dos primeros casos, se tiene que $y = \frac{z-x}{2}$ toma respectivamente los valores 77 y 13, resultando respectivamente en

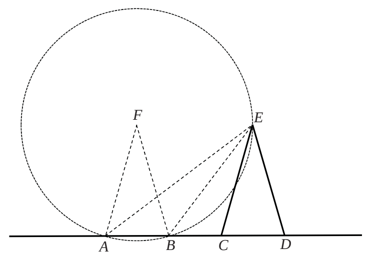
$$xyz = 1 \cdot 77 \cdot 155 = 11935, \qquad xyz = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015.$$

Solución 2. Como $x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y) = z(x-2y)$, tenemos que z ha de dividir a $310 - z^2$, luego a 310. Además, z no puede ser par, pues en ese caso x también lo sería, y $x^2 - 4y^2 + z^2$ sería múltiplo de 4, pero 310 no lo es. Luego z ha de dividir a $155 = 5 \cdot 31$, es decir, z ha de tomar uno de los valores $1, 5, 31, 155$. Como $z = x + 2y$, con x, y enteros positivos, es imposible que $z = 1$, y si $z = 5$, entonces bien $x = 3$, $y = 1$, bien $x = 1$, $y = 2$, que obviamente no satisfacen la segunda ecuación. Se tiene entonces que $z = 31$ o $z = 155$, tomando entonces respectivamente $2y - x = \frac{z^2-310}{z}$ los valores 21 y 153, que junto a $2y + x = z$, nos permite hallar los mismos valores de x, y que por el método anterior, bastando multiplicarlos para hallar los dos mismos valores del producto xyz.

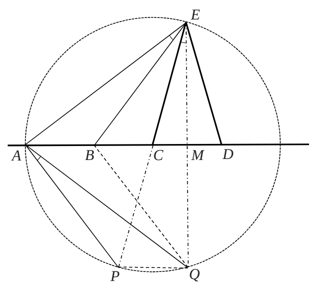
$\square$

5. *En una recta tenemos cuatro puntos A, B, C y D, en ese orden, de forma que $AB = CD$. E es un punto fuera de la recta tal que $CE = DE$. Demuestra que $\angle CED = 2\angle AEB$ si y sólo si $AC = EC$.*

Solución 1. Sea F el punto tal que los triángulos ABF y CDE son iguales. Claramente un triángulo es el otro desplazado por AC, luego $EF = AC$ y $AF = CE = DE = BF$. Trazamos la circunferencia de centro F que pasa por A y B, y como $\angle AFB = \angle CED$, por ser el ángulo central el doble del inscrito, $\angle AEB = 2\angle CED$ si y sólo si E está sobre la circunferencia que acabamos de trazar, es decir, si y sólo si $EF = AF$, y esto es equivalente a $AC = EC$.



Solución 2. Sean M el punto medio de CD, P el simétrico de E respecto de C, y Q el simétrico de E respecto de la recta CD.



El triángulo EPQ es el resultado de aplicar a ECM una homotecia de centro E y razón 2, con lo que EPQ es claramente rectángulo en Q, con $PQ = 2CM = CD = AB$, siendo además PQ paralelo a CD, luego a AB. Se tiene entonces que EP es diámetro de la circunferencia circunscrita a EPQ, que tiene por lo tanto centro en C y radio CE. Al mismo tiempo, al ser $ABQP$ paralelogramo por ser $AB = PQ$ paralelos, AP es paralela a BQ, que es la simétrica de BE respecto a AD, mientras que AP es la simétrica de AE respecto a AD, luego $\angle PAQ = \angle AEB$. Se tiene entonces que $\angle CED = 2\angle AEB$ y $CE = CA$ son ambos equivalentes a $\angle PAQ = \angle PEQ$, luego equivalentes entre sí, como queríamos demostrar.

Solución 3. Notemos en primer lugar que sólo es necesario demostrar que si $AC = EC$, entonces $\angle CED = 2\angle AEB$. Para ello, consideremos que A está a la izquierda de D sobre la recta horizontal AD, y AB está en una posición tal que $\angle AEB$ es la mitad de $\angle CED$. Si ahora desplazamos E hacia la derecha (equivalente a desplazar AB hacia la izquierda), $\angle AEB$ decrece (nos basta con considerar la circunferencia circunscrita a AEB en su posición inicial, y observar que E "sale" de la circunferencia). De forma análoga, si desplazamos E hacia la izquierda (equivalente a desplazar AB hacia la derecha), $\angle AEB$ crece (E "entra" en la circunferencia circunscrita a AEB). Luego existe a lo sumo una posición de AB sobre la recta AD a la izquierda de CD, tal que $\angle CED = 2\angle AEB$, y nos basta con demostrar que cuando $AC = EC$, AB está de hecho en tal posición.
Sea entonces un sistema de coordenadas con centro en C y tal que el eje horizontal coincide con la recta por A, B, C, D. Denotando por R a la distancia EC, y llamando $\angle CED = 2\alpha$ (con lo que α es claramente agudo), se tiene que $AB = CD = 2R\sin\alpha$, $A \equiv (-R, 0)$ por ser $AC = EC$, $B \equiv (-R+2R\sin\alpha, 0)$ y $E \equiv (R\sin\alpha, R\cos\alpha)$. Ahora bien,

$$\overrightarrow{AE} \equiv (R + R\sin\alpha, R\cos\alpha), \qquad \overrightarrow{BE} \equiv (R - R\sin\alpha, R\cos\alpha),$$

con lo que

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = R^2 - R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha = 2R^2\cos^2\alpha,$$

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{R^2 + 2R^2\sin\alpha + R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha} = R\sqrt{2 + 2\sin\alpha},$$

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{R^2 - 2R^2\sin\alpha + R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha} = R\sqrt{2 - 2\sin\alpha},$$

y como

$$\sqrt{2 + 2\sin\alpha} \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha} = 2\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 2\cos\alpha,$$

tenemos que

$$\cos\angle AEB = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}}{\left|\overrightarrow{AE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BE}\right|} = \frac{2R^2\cos^2\alpha}{2R^2\cos\alpha} = \cos\alpha,$$

y queda concluída la demostración.
También es posible completar la demostración sin realizar la observación inicial, tomando $A \equiv (-d, 0)$, donde hemos de demostrar que $d = AC$ si y sólo si $\cos\angle AEB = \cos\alpha$. La segunda condición se traduce, tras algo de álgebra, en la relación

$$\left(d^2 - R^2\right)\left(d^2 + R^2 + 2R^2\cos(2\alpha)\right)\sin^2\alpha = 0,$$

donde el segundo y el tercer factores son claramente positivos (usamos para ello que $d > R$ para que B esté a la izquierda de C), con lo que esta relación es en efecto equivalente a $d = R$, como queríamos demostrar.

$\square$

6. *Halla todas las ternas de reales positivos* (x, y, z) *que cumplan el sistema*

$$2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1,$$

$$2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1,$$
$$2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1.$$

Solución 1. Nótese que, por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, se tiene que

$$x^2 + x + 1 \geq 2\sqrt{x^2(x+1)} = 2x\sqrt{x+1},$$

con igualdad si y sólo si $x^2 = x + 1$, es decir si y sólo si x es una raíz de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$. Se tiene entonces de la primera ecuación que

$$y^2 + y + 1 = 2x\sqrt{x+1} \leq x^2 + x + 1,$$

y de forma similar para las otras dos, con lo que

$$x^2 + x + 1 \geq y^2 + y + 1 \geq z^2 + z + 1 \geq x^2 + x + 1,$$

con lo que se ha de dar la igualdad en las tres desigualdades, es decir, x, y, z son soluciones de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$. El producto de las dos raíces de esta ecuación es -1, luego exactamente una de ellas es negativa, y x, y, z son iguales entre sí e iguales a la raíz positiva, es decir, la única solución es

$$x = y = z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Solución 2. Supongamos que $x < y$, luego de la primera ecuación obtenemos

$$2x\sqrt{x+1} = y^2 + y + 1 > x^2 + x + 1,$$

o tras elevar al cuadrado y reagrupar términos,

$$0 > x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = \left(x^2 - x - 1\right)^2,$$

claramente falso, luego $x \geq y$, con $x = y$ si y sólo si son iguales a la raíz positiva de $r^2 - r - 1 = 0$. De forma similar, obtenemos de la segunda ecuación que $y \geq z$, y de la tercera que $z \geq x$, con análogas condiciones de igualdad. Luego $x \geq y \geq z \geq x$, con igualdad si y sólo si x, y, z son la raíz positiva de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$, obteniéndose la misma única solución que por el método anterior.

□

Problemas Segunda Sesión

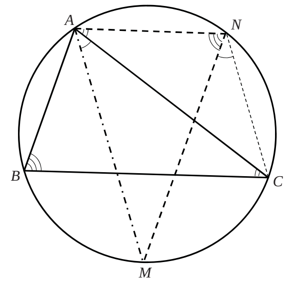
1. *Alrededor de una mesa circular están sentadas seis personas. Cada una lleva un sombrero. Entre cada dos personas hay una mampara de modo que cada una puede ver los sombreros de las tres que están enfrente, pero no puede ver el de la persona de su izquierda ni el de la de su derecha ni el suyo propio. Todas saben que tres de los sombreros son blancos y tres negros. También saben que cada una de ellas es capaz de obtener cualquier deducción lógica que sea factible. Empezamos por una de las seis personas y le preguntamos "¿puedes deducir el color de algún sombrero de los que no ves?". Una vez que ha respondido (todas oyen la respuesta), pasamos a la persona de su izquierda y le hacemos la misma pregunta, y así sucesivamente. Demuestra que una de las tres primeras responderá "Sí".*

Solución. Numeramos las personas en el orden en que van respondiendo, con lo que la persona 1 ve los sombreros de las personas $3, 4, 5$, la persona 2 los de las personas $4, 5, 6$, y la persona 3 los de las personas $5, 6, 1$.
Supongamos que ni la persona 1 ni la persona 2 han podido responder "Sí". Los sombreros de las personas $3, 4, 5$ no pueden ser todos del mismo color, porque si no la persona 1 sabría que todos los sombreros que no ve son del otro color. Si los sombreros de las personas $4, 5$ fueran del mismo color, entonces la persona 2 sabe que el sombrero 3 ha de ser del otro color, con lo que los sombreros $4, 5$ han de ser de distinto color. Pero entonces la persona 3 sabe que el color del sombrero 4, que no ve, es distinto al del sombrero 5, que sí ve. Luego o una de las dos primeras personas contesta "Sí", o si las dos primeras contestan "No", entonces la tercera contesta "Sí".

□

2. *El triángulo ABC es isósceles en C, y sea Γ su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A, y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a Γ. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de ABC?*

Solución. Si AN es paralela a BC, entonces $ABCN$ es un trapecio con circunferencia circunscrita, y por lo tanto isósceles.



Se tiene entonces que $\angle ANC = \angle BAN$. Pero $\angle NAC = \angle ACB$ y $\angle ANM = \angle ABC$ por ser AN y BC paralelas, y ser AB y MN también paralelas. Tenemos entonces por una parte que $\angle BAN = \angle A + \angle C$. Finalmente, $\angle CNM = \angle CAM = \frac{1}{2}\angle A$ por ser M el punto medio del arco BC, siendo entonces AM la bisectriz de $\angle A$, con lo que $\angle ANC = \angle B + \frac{1}{2}\angle A$. Igualando ambos ángulos, y usando que $\angle A = \angle B$ por ser ABC isósceles en C, se tiene que $\angle A = \angle B = 2\angle C$, luego $180° = \angle A + \angle B + \angle C = 5\angle C$, para $\angle C = 36°$, y $\angle A = \angle B = 72°$.

$\square$

3. Sean x, y, z reales positivos tales que $x+y+z = 3$. Halla el valor máximo alcanzado por

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6}.$$

¿Para qué valores de x, y, z se alcanza dicho máximo?

Solución 1. Consideremos los vectores $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y+1}, \sqrt{z+2}\right)$ y $\left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, cuyas coordenadas son todas reales y positivas, cuyos módulos respectivos son $\sqrt{x+y+z+3} = \sqrt{6}$ y $\sqrt{1+2+3} = \sqrt{6}$, y cuyo producto escalar es la expresión cuyo máximo se pide hallar. Por la desigualdad del producto escalar, el valor máximo es igual al producto de módulos de vectores, que es 6, dándose la igualdad cuando ambos vectores son proporcionales. En este caso, al tener ambos vectores el mismo módulo, se da la igualdad si y sólo si ambos vectores son iguales, es decir,

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6} \leq 6,$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z = 1$.

Solución 2. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava, por lo tanto, por la desigualdad de Jensen, se tiene que

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6} = f(x) + 2f\left(\frac{y+1}{2}\right) + 3f\left(\frac{z+2}{3}\right) \leq$$

$$\leq 6f\left(\frac{x+(y+1)+(z+2)}{6}\right) = 6f(1) = 6,$$

con igualdad si y sólo si $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$, es decir, $y = 2x-1$ y $z = 3x-2$, con lo que $x+y+z = 6x-3 = 3$, o $x = y = z = 1$.

$\square$

4. Encuentra todas las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verifican $f(n) + f(n+1) = 2n+1$ para cualquier entero n y además

$$\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015.$$

Solución. Nótese que $f(n+1) = 2n+1-f(n)$, con lo que podemos hallar sucesivamente

$$f(1) = 1 - f(0), \qquad f(2) = 3 - f(1) = 2 + f(0), \qquad f(3) = 5 - f(2) = 3 - f(0), \ldots$$

Esto nos permite conjeturar que $f(n) = n + (-1)^n f(0)$ para todo $n \geq 0$, cosa que podemos demostrar por inducción, siendo cierto como ya se ha visto para $n = 1, 2, 3$, y si es cierto para n, entonces

$$f(n+1) = 2n + 1 - n - (-1)^n f(0) = n + 1 + (-1)^{n+1} f(0).$$

Luego es cierto para todo entero positivo n. Inducción hacia atrás, usando que $f(n) = 2n + 1 - f(n+1)$ nos permite comprobar igualmente que esta expresión es de hecho válida para todo entero n, también negativo.
Nótese ahora que en $\{1, 2, 3, \dots, 63\}$ hay exactamente un entero impar más que enteros pares. En la imagen de cada entero par aparece $f(0)$ con signo positivo, y en la de cada entero impar con signo negativo, luego

$$2015 = \sum_{i=1}^{63} f(i) = -f(0) + \sum_{i=1}^{63} i = \frac{63 \cdot 64}{2} - f(0) = 2016 - f(0).$$

Concluímos que $f(0) = 1$, con lo que la única función que satisface las condiciones de enunciado es

$$f(n) = n + (-1)^n.$$

□

5. *Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Tenemos $2n$ bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que, siempre que formamos n parejas con las bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.*

(1) Demuestra que hay cuatro bolas con el mismo número.

(2) Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es como mucho $n - 1$.

Solución. (1) Sean los valores de las bolas, en orden no creciente, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n}$. Formemos la pareja k-ésima emparejando la bola a_{2k-1} con la bola a_{2k} para $k = 1, 2, \dots, n$, con lo que sus sumas son

$$s_1 = a_1 + a_2 \geq s_2 = a_3 + a_4 \geq \cdots \geq s_n = a_{2n-1} + a_{2n}.$$

Al estar las sumas en orden no creciente, si dos de ellas son iguales, han de ser iguales dos sumas consecutivas, es decir ha de ser $a_{2k-1} + a_{2k} = a_{2k+1} + a_{2k+2}$, con $a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq a_{2k+1} \geq a_{2k+2}$, luego obviamente estos cuatro enteros han de ser iguales.

(2) Supongamos que hay al menos n valores distintos, que podemos ordenar en orden decreciente $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Ordenamos ahora los valores de las restantes n bolas en orden no creciente, $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$. Haciendo las parejas (b_i, c_i) para $i = 1, 2, \dots, n$ es claro que las parejas i-ésima e $i+1$-ésimas tienen valores $b_i + c_i > b_{i+1} + c_{i+1}$, con lo que las parejas están ordenadas con valores de suma estrictamente decrecientes, y no puede haber dos con la misma suma, contradicción. Luego hay a lo sumo $n - 1$ valores distintos.

□

6. *Encuentra todos los enteros positivos n, que verifican*

$$n = 2^{2x-1} - 5x - 3 = \left(2^{x-1} - 1\right)\left(2^x + 1\right)$$

para algún entero positivo x.

Solución 1. Realizando el producto del miembro de la derecha y reorganizando términos, la igualdad entre los miembros segundo y tercero se puede escribir como

$$2^{x-1} = 5x + 2.$$

Se comprueba fácilmente que ni $x = 1$ ni $x = 2$ son soluciones, mientras que si $x \geq 3$, entonces $5x + 2$ ha de ser múltiplo de 4, luego x es par pero no múltiplo de 4, es decir, $x \geq 6$. Para $x = 6$, se comprueba que $2^{x-1} = 5x + 2 = 32$, con lo que sería una posible solución. Nótese ahora que si para $x \geq 6$ se tiene que $2^{x-1} > 5x$ (cosa que es cierta para $x = 6$), entonces $2^x > 10x > 5(x + 1) + 2$, es decir, por inducción 2^{x-1} siempre será mayor que $5x + 2$ para todo $x \geq 7$. Luego el único valor que puede tomar el entero positivo x es 6, que a su vez resulta en

$$n = 2^{11} - 30 - 3 = 2048 - 33 = 2015.$$

Solución 2. Obtenemos igual que en la solución anterior la ecuación $2^{x-1} = 5x + 2$, y encontramos la solución $x = 6$, con lo que nos queda sólo demostrar que es única.
La función $y = 2^{x-1}$ es convexa en x, luego tiene a lo sumo dos intersecciones con cualquier recta, en particular con la recta $y = 5x + 2$. Como $2^{x-1} > 5x + 2$ tanto para $x \to -\infty$ como para $x \to +\infty$, siendo $2^{x-1} < 5x + 2$ para $x = 0$, hay en efecto exactamente dos soluciones de $2^{x-1} = 5x + 2$, una negativa (que por lo tanto es irrelevante al problema) y otra positiva, que es $x = 6$, y por lo tanto es la única para la que x es un entero positivo.

$\square$