XLIV Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2008 (Valencia)
PRIMERA SESIÓN (28 de marzo)

1.- Halla dos enteros positivos a y b conociendo su suma y su mínimo común múltiplo. Aplícalo en el caso de que la suma sea 3972 y el mínimo común múltiplo 985928.

SOLUCIÓN:
Sea p un número primo que divide a la suma $a+b$ y a su mínimo común múltiplo $[a,b]$. Como $p|[a,b]$ al menos divide a uno de los dos enteros a ó b. Si $p|a,$ al dividir p a la suma $a+b,$ también $p|b.$ (Obviamente el mismo razonamiento vale si hubiéramos supuesto que $p|b$). Por tanto podemos dividir los dos números a y b por p y también su mínimo común múltiplo $[a,b]$, para obtener dos enteros a_1 y b_1 tales que $a_1=\dfrac{a}{p}, b_1=\dfrac{b}{p}$ y $[a_1,b_1]=\dfrac{[a,b]}{p}.$ Sea el máximo común divisor de a y $b,$ $d=(a,b).$ Repitiendo el proceso anterior llegaremos a obtener dos enteros A y B tales que $a=dA, b=dB$ y $(A,B)=1.$ Entonces $[A,B]=AB.$ Ahora es fácil determinar A y B a partir del sistema de ecuaciones $\begin{cases} A+B=\dfrac{a+b}{d} \\ AB=\dfrac{[a,b]}{d} \end{cases}$. Es decir A y B son las raíces de la ecuación de segundo grado $dt^2-(a+b)t+[a,b]=0.$
Observamos que el discriminante de esta ecuación es no negativo. En efecto:

$$\Delta=(a+b)^2-4d[a,b]=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq 0.$$

Si a y b son distintos, la ecuación anterior tiene por soluciones los dos enteros positivos $A=\dfrac{a}{d}$ y $B=\dfrac{b}{d}.$
En particular cuando $a+b=3972$ y $[a,b]=985928,$ tenemos que $d=(3972,\ 985928)=4.$ Por tanto $a=4A$ y $b=4B$ siendo A y B las raíces de la ecuación $4t^2-3972t+985928=0.$
Es decir $A=491$ y $B=502$ y los números buscados son $a=1964$ (año de la primera OME) y $b=2008$ (año de la actual edición de la OME).

XLIV Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2008 (Valencia)
PRIMERA SESIÓN (28 de marzo)

2.- Prueba que para cualesquiera números reales a,b tales que $0 < a,b < 1,$ se cumple la desigualdad siguiente:

$$\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}.$$

SOLUCIÓN:

Se verifica que $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$ para todo $x \in (0,1)$. Teniendo en cuenta que $0 < \frac{a+b}{2} < 1,$ utilizando la desigualdad anterior y aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se tiene:

$$\sqrt{ab\left(\frac{a+b}{2}\right)} < \sqrt[3]{ab\left(\frac{a+b}{2}\right)} \le \frac{a+b+\left(\frac{a+b}{2}\right)}{3} = \frac{a+b}{2}$$

y

$$\sqrt{(1-a)(1-b)\left(1-\frac{a+b}{2}\right)} < \sqrt[3]{(1-a)(1-b)\left(1-\frac{a+b}{2}\right)} \le$$

$$\le \frac{1-a+1-b+1-\frac{a+b}{2}}{3} = 1-\frac{a+b}{2}.$$

Sumando las expresiones anteriores resulta

$$\sqrt{ab\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \sqrt{(1-a)(1-b)\left(1-\frac{a+b}{2}\right)} < 1,$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)}\right) < 1,$$

de donde se obtiene inmediatamente la desigualdad del enunciado.

3.- Sea $p \geq 3$ un número primo. Se divide cada lado de un triángulo en p partes iguales y se une cada uno de los puntos de división con el vértice opuesto. Calcula el número máximo de regiones, disjuntas dos a dos, en que queda dividido el triángulo.

SOLUCIÓN:

En primer lugar veremos que tres de estos segmentos (cevianas) no pueden ser concurrentes. Sea el triángulo ABC y X, Y, Z puntos de las divisiones interiores de los lados BC, AC, AB respectivamente. Si AX, BY y CZ fueran concurrentes aplicando el teorema de Ceva tendríamos

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Por otro lado, por la forma en que hemos construido los puntos de división, existen enteros positivos $k, l, m \in \{1,2,..., p-1\}$, tales que

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{k}{p-k}, \quad \frac{BX}{XC} = \frac{l}{p-l}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{m}{p-m}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior

$$k\,l\,m = (p-k)(p-l)(p-m),$$

o equivalentemente,

$$2k\,l\,m + p\,m(p-k-l) = p(p-k)(p-l).$$

De aquí resulta que p divide al producto klm, que es imposible y nuestra afirmación inicial queda probada.

Dibujando las cevianas desde el vértice A el triángulo ABC queda dividido en p triángulos. Las cevianas trazadas desde B dividen cada uno de los p triángulos anteriores en p partes disjuntas, teniendo en total p^2 regiones. Cada ceviana trazada desde el vértice C aumenta el número de regiones en un número exactamente igual a su número de intersecciones con las rectas que encuentra (incluido el lado AB). Es decir, $2(p-1)+1 = 2p-1$. Por tanto, el número máximo de regiones disjuntas dos a dos, en que queda dividido el triángulo ABC es $p^2 + (p-1)(2p-1) = 3p^2 - 3p + 1$.

XLIV Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2008 (Valencia)
SEGUNDA SESIÓN (29 de marzo)

4.- Sean p y q dos números primos positivos diferentes. Prueba que existen enteros positivos a y b, tales que la media aritmética de todos los divisores positivos del número $n = p^a q^b$ es un número entero.

SOLUCIÓN:
La suma de todos los divisores de n viene dada por la fórmula

$$(1 + p + p^2 + \ldots + p^a)(1 + q + q^2 + \ldots + q^b),$$

como se puede comprobar desarrollando los paréntesis. El número n tiene $(a+1)(b+1)$ divisores positivos y la media aritmética de todos ellos es $m = \dfrac{(1 + p + p^2 + \ldots + p^a)(1 + q + q^2 + \ldots + q^b)}{(a+1)(b+1)}$.

Si p y q son ambos impares, tomando $a = p$ y $b = q$, es fácil ver que m es un entero. Efectivamente: cada factor $1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^p$ y $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^q$ tiene un número par de sumandos y por ejemplo, el primero se puede escribir como sigue $1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^p = (1 + p) + p^2(1 + p) + \ldots + p^{p-1}(1 + p) =$
$(1 + p)(1 + p^2 + \ldots + p^{p-1})$.
Análogamente el segundo factor $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^q = (1 + q)(1 + q^2 + \ldots + q^{q-1})$.
Entonces $m = (1 + p^2 + p^4 + \ldots + p^{p-1})(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{q-1})$, que es un entero positivo.

Si $p = 2$ y q es impar, se eligen $b = q$ y $a + 1 = 1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{q-1}$. Entonces $m = \dfrac{(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{q^2 + q^4 + \ldots + q^{q-1}})(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^q)}{(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{q-1})(q+1)} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^a$, que es entero.

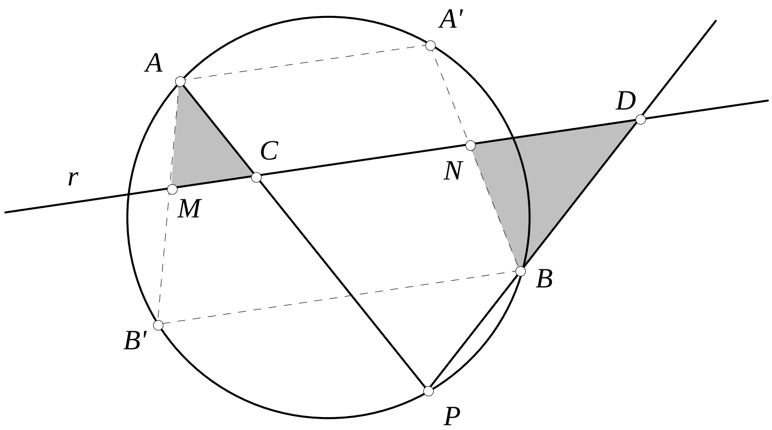
Para $q = 2$ y p impar, análogamente al caso anterior se eligen $a = p$ y $b = p^2 + p^4 + \ldots + p^{p-1}$ y m es entero.

Alternativamente y de una manera casi directa, se obtiene una solución completa observando que si p y q son primos impares se toman $a = b = 1$ y si $p = 2$ y q primo impar, entonces se consideran $a = \dfrac{q-1}{2}$ y $b = 1$.

XLIV Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2008 (Valencia)
SEGUNDA SESIÓN (29 de marzo)

5.- Dada una circunferencia y en ella dos puntos fijos A, B, otro variable P y una recta r; se trazan las rectas PA y PB que cortan a r en C y D respectivamente. Determina dos puntos fijos de r, M y N, tales que el producto $CM \cdot DN$ sea constante al variar P.

SOLUCIÓN:
Trazamos las paralelas a r por A y B que cortan a la circunferencia en A' y B' respectivamente de modo que $AA'BB'$ es un trapecio isósceles.
Las intersecciones de AB' y BA' con r determinan los puntos M y N buscados.
En efecto, los triángulos AMC y DNB (sombreados en la figura) son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales:



$$\angle MAC = \angle B'BP = \angle NDB,$$

donde la primera igualdad es cierta por ser ángulos inscritos en el mismo arco y la segunda por ser BB' paralela a r.

$$\angle AMC = \angle AB'B = \angle DNB,$$

con argumentos análogos a los anteriores.

Estableciendo la proporcionalidad de los lados resulta

$$\frac{AM}{MC} = \frac{ND}{BN} \Leftrightarrow MC \cdot ND = AM \cdot BN,$$

cantidad que no depende de P.

Se observa que si la recta r pasa por el punto A, $M = A = C$, no se forma el triángulo AMC. En este caso $CM = 0$ y el producto $CM \cdot DN = 0$, es constante. Análogamente este producto es cero si la recta r pasa por B o por los puntos A y B en cuyo caso $CM = DN = 0$.

XLIV Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2008 (Valencia)
SEGUNDA SESIÓN (29 de marzo)

6.- A cada punto del plano se le asigna un solo color entre siete colores distintos. ¿Existirá un trapecio inscriptible en una circunferencia cuyos vértices tengan todos el mismo color?

SOLUCIÓN:
La idea inicial es considerar una circunferencia C de radio r y sobre ella bloques de 8 puntos $A_1, A_2, ..., A_8$ igualmente espaciados; es decir que los arcos $A_i A_{i+1}$ $i = 1,...,7$ tengan igual longitud $\lambda > 0$ (que se elegirá convenientemente) para cada uno de los bloques. Se elige un sentido dado (por ejemplo, el antihorario).
Se disponen entonces, en este sentido antihorario, $7 \times 7 + 1 = 50$ bloques de $7 + 1 = 8$ puntos cada uno en la semicircunferencia superior de C, tales que dos bloques distintos no se intersequen o solapen, para lo cual se toma λ suficientemente pequeño, por ejemplo $0 < \lambda < \dfrac{\pi r}{400}$.
Se observa que al menos hay dos puntos del mismo color en cada bloque. Se eligen dos de esos puntos y su color se le asocia al bloque. Y la distancia entre estos dos puntos que es uno de los siete números $d_n = n\lambda$, $n \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, se le asigna también al bloque. De este modo a cada uno de los 50 bloques se le hace corresponder el par (color, distancia), indicado anteriormente. Como el número total de posibles pares es 49, por el principio el palomar, existirán dos bloques R y Q a los que se les asocia el mismo par (color, distancia). Por tanto los cuatro puntos determinados por estos dos bloques tienen el mismo color. Y como los dos puntos del bloque R distan igual que los dos puntos del bloque Q, estando los cuatro puntos sobre la circunferencia C, necesariamente, estos cuatro puntos son los vértices de un trapecio inscriptible.

NOTA: Este mismo razonamiento se podría hacer considerando un arco de circunferencia de radio r de longitud l, $0 < l \leq 2\pi r$. En este caso se tomaría λ, $0 < \lambda < \dfrac{l}{400}$.
Y también se podría generalizar a un número de colores c $(c \geq 2)$ cualesquiera, considerando $c + 1$ puntos en vez de $7 + 1$ y $c^2 + 1$ bloques disjuntos de $c + 1$ puntos cada uno, en vez de $7^2 + 1$ bloques de $7 + 1$ puntos cada uno. Y ahora λ debe cumplir que $0 < \lambda < \dfrac{l}{(c+1)(c^2+1)}$.