XLVI Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2010 (Valladolid, 26 y 27 de Marzo)
Soluciones oficiales

• Problema 1

Una sucesión *pucelana* es una sucesión creciente de dieciséis números impares positivos consecutivos, cuya suma es un cubo perfecto. ¿Cuántas sucesiones *pucelanas* tienen solamente números de tres cifras?

Solución:
Sea la sucesión $n, n+2, \ldots, n+30$. Entonces la suma es $\frac{1}{2}16(2n+30) = 8(2n+30)$. Por tanto, es necesario que $2n+30$ sea un cubo perfecto. Ahora hay que contar el número de tales n que son impares y verifican $101 \leq n \leq 969$. Los cubos pares entre 232 y 1968 son 512, 1000 y 1728, que corresponden a valores de n de 241, 485 y 849. Por lo tanto hay exactamente tres sucesiones *pucelanas*.

• Problema 2

Sean N_0 y Z el conjunto de todos los enteros no negativos y el conjunto de todos los enteros, respectivamente. Sea $f: N_0 \to Z$ la función que a cada elemento n de N_0 le asocia como imagen el entero $f(n)$ definido por

$$f(n) = -f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) - 3\left\{\frac{n}{3}\right\}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera del número real x y $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ su parte decimal. Determina el menor entero n tal que $f(n) = 2010$.

NOTA: La parte entera de un número real x, denotada por $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero que no supera a x. Así $\lfloor 1{,}98 \rfloor = 1$, $\lfloor -2{,}001 \rfloor = -3$, $\lfloor 7\pi - 8{,}03 \rfloor = 13$.

Solución:
Se prueba fácilmente por inducción que, si $n = (\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0})_3$, entonces

$$f(n) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impar}}}^{k} a_j - \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^{k} a_j$$

En efecto, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = -2$.

Supongamos que, para todo n menor que $3t$, $f(n) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impar}}}^{k} a_j - \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ par}}}^{k} a_j$. Entonces, si $t = \left(\overline{b_k \ldots b_0}\right)_3$, $3t = \left(\overline{b_k \ldots b_0 0}\right)_3$, $3t+1 = \left(\overline{b_k \ldots b_0 1}\right)_3$, $3t+2 = \left(\overline{b_k \ldots b_0 2}\right)_3$. Por lo tanto,

como $f(3t)=-f(t)$, $f(3t+1)=-f(t)-1$, $f(3t+2)=-f(t)-2$, la propiedad sigue siendo cierta para todo entero n menor que $3t+2$.
Luego, para todo $n=(\overline{a_k a_{k-1}\dots a_0})_3$, $f(n)=\sum_{\substack{j=0\\ j\text{ impar}}}^{k} a_j-\sum_{\substack{j=0\\ j\text{ par}}}^{k} a_j$.
De esta forma, se obtiene el menor $n=\left(\overline{2020\dots20}\right)_3$, tal que $f(n)=2010$. Este número contiene 1005 doses; su valor en base decimal es:

$$3\cdot\frac{3^{2010}-1}{4}$$

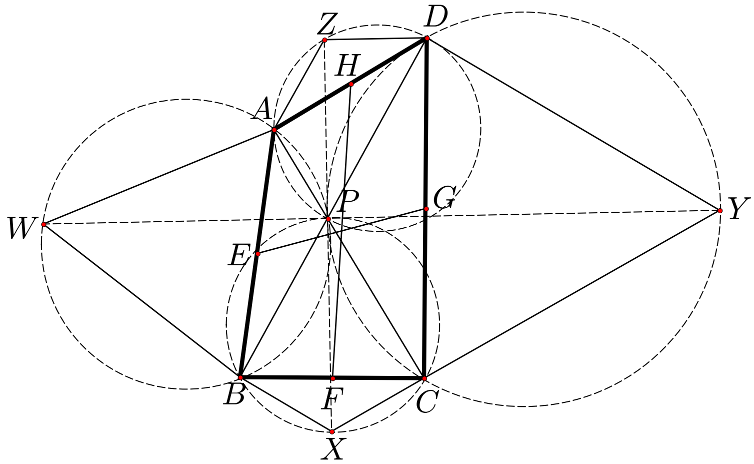
• Problema 3

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea P la intersección de AC y BD. El ángulo $\angle APD=60°$. Sean E, F, G y H los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Halla el mayor número real positivo k tal que

$$EG+3HF\geq kd+(1-k)s$$

siendo s el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ y d la suma de las longitudes de sus diagonales. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución:
Probaremos que $k=1+\sqrt{3}$ y que la igualdad se da si, y sólo si, $ABCD$ es un rectángulo.



Sean W, X, Y y Z cuatro puntos exteriores a $ABCD$ de modo que los triángulos ABW y DCY sean equiláteros, el triángulo BCX sea isósceles en X, el triángulo AZD sea isósceles en Z y $\angle BXC=\angle AZD=120°$.
Los cuadriláteros $WAPB$, $XBPC$, $YCPD$ y $ZDPA$ son cíclicos. Luego, por el *teorema de* **Ptolomeo**, se obtiene que:

$$WP=PA+PB\,,\quad XP\sqrt{3}=PB+PC\,,\quad YP=PC+PD\,,\quad ZP\sqrt{3}=PD+PA$$

Por otro lado,

$$\angle WPY=\angle WPB+60°+\angle CPY=\angle WAB+60°+\angle CDY=180°$$

Luego W, P, Y están alineados y, de forma análoga, Z, P, X están alineados. Luego:

$$\begin{aligned} WY &= WP + PY = PA + PB + PC + PD = AC + BD \\ XZ &= XP + PZ = \frac{1}{\sqrt{3}}(PB + PC + PD + PA) = \frac{1}{\sqrt{3}}(AC + BD) \end{aligned}$$

Por la desigualdad, triangular:

$$WY \leq WE + EG + GY\,, \quad XZ \leq XF + FH + HZ$$

Luego:

$$AC + BD \leq AB\,\frac{\sqrt{3}}{2} + EG + DC\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(AC + BD) \leq \frac{BC}{2\sqrt{3}} + FH + \frac{AD}{2\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, sumando,

$$\begin{array}{r} AC + BD \leq AB\,\frac{\sqrt{3}}{2} + EG + DC\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}(AC + BD) \leq BC\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 3FH + AD\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline \left(1 + \sqrt{3}\right)(AC + BD) \leq EG + 3FH + s\sqrt{3} \end{array}$$

o sea,

$$EG + 3FH \geq \left(1 + \sqrt{3}\right) d - s\sqrt{3}$$

Luego, si $k = 1 + \sqrt{3}$, entonces $EG + 3FH \geq kd + (1 - k)s$.
La igualdad se dará si, y sólo si, por un lado, W, E, G, Y están alineados y, por otro lado, X, F, H, Z también están alineados. Como WE es perpendicular a AB y GY es perpendicular a DC, AB y DC deben ser paralelas y, de forma análoga, BC y AD también deben ser paralelas, luego $ABCD$ debe ser un paralelogramo. Además, la recta EG es perpendicular a DC, lo que implica que $ABCD$ es un rectángulo y se comprueba fácilmente que si $ABCD$ es un rectángulo, entonces se da la igualdad. Luego, la igualdad se da si, y sólo si, $ABCD$ es un rectángulo.
Ahora, sea un número real positivo l tal que $EG+3HF \geq ld+(1-l)s$. Entonces, si $ABCD$ es un rectángulo,

$$kd + (1 - k)s \geq ld + (1 - l)s$$

o sea

$$k(d - s) \geq l(d - s)$$

Pero la desigualdad triangular implica que $d > s$, lo que implica que $k \geq l$. Luego el número real buscado es $k = 1 + \sqrt{3}$ y la igualdad se da si, y sólo si, $ABCD$ es un rectángulo.

• Problema 4

Sean a, b, c tres números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a + b + 3c}{3a + 3b + 2c} + \frac{a + 3b + c}{3a + 2b + 3c} + \frac{3a + b + c}{2a + 3b + 3c} \geq \frac{15}{8}$$

Solución:

Haciendo $a = x_1$, $b = x_2$, $c = x_3$ y llamando $s = x_1 + x_2 + x_3$, resulta que el lado izquierdo de la desigualdad se escribe como

$$S = \frac{s + 2x_1}{3s - x_1} + \frac{s + 2x_2}{3s - x_2} + \frac{s + 2x_3}{3s - x_3}$$

Por otro lado,

$$S + 6 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{s + 2x_k}{3s - x_k} + 2 \right) = \sum_{k=1}^{3} \frac{7s}{3s - x_k}$$

con lo que

$$S + 6 = \frac{7s}{3s - x_1} + \frac{7s}{3s - x_2} + \frac{7s}{3s - x_3} = 7s \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3s - x_k}$$

Dado que $\sum_{k=1}^{3} (3s - x_k) = 8s$, entonces $s = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{3} (3s - x_k)$, y

$$S + 6 = \frac{7}{8} \sum_{k=1}^{3} (3s - x_k) \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3s - x_k} \geq \frac{63}{8}$$

de donde resulta que

$$S = \frac{s + 2x_1}{3s - x_1} + \frac{s + 2x_2}{3s - x_2} + \frac{s + 2x_3}{3s - x_3} \geq \frac{63}{8} - 6 = \frac{15}{8}$$

La igualdad tiene lugar cuando $x_1 = x_2 = x_3$, es decir, cuando $a = b = c$.

• Problema 5

Sea P un punto cualquiera de la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC, y sean A', B', C' puntos respectivos de las rectas BC, CA, AB, tales que PA' es perpendicular a BC, PB' es perpendicular a CA y PC' es perpendicular a AB. Demuestra que PA' y $B'C'$ se cortan sobre la mediana AM, siendo M el punto medio de BC.

Solución:

Sea E el punto de intersección de PA' y $B'C'$. Si P se mueve sobre la bisectriz AI (I es el incentro), la figura $PB'C'E$ es homotética de sí misma con respecto al punto A. Luego E describe una recta que pasa por A. La bisectriz AI corta a la circunferencia circunscrita a ABC en F, que se proyecta en el punto medio A_m de BC; si $P = F$, la recta $B'C'$ es la *recta de* **Simson** de F, luego el lugar geométrico de E es la mediana AA_m.

• Problema 6

Sea p un número primo y A un subconjunto infinito de los números naturales. Sea $f_A(n)$ el número de soluciones distintas de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$, con $x_1, x_2, \ldots, x_p \in A$. ¿Existe algún número natural N tal que $f_A(n)$ sea constante para todo $n > N$?

Solución:

Para demostrar el enunciado procederemos por contradicción. Supongamos que existe un número N para el que se cumpla la propiedad anterior. Como el conjunto A es infinito, tomemos $a \in A$ mayor que N. Vamos a estudiar el valor de $f_A(pa)$ y $f_A(pa+1)$. Por hipótesis, se cumple que $f_A(pa) = f_A(pa+1)$.

Sea $S = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$ solución de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n\,, \quad s_1, s_2, \ldots, s_p \in A$$

Entonces, cualquier permutación de los índices da lugar a una nueva solución de la ecuación (posiblemente repetida si se permutan valores iguales). Diremos que una solución $S = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$ es asociada a una solución $S' = \left(s'_1, s'_2, \ldots, s'_p\right)$ si la primera se obtiene a partir de la segunda mediante permutación de índices. Sea $S = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$ una solución del problema y sea $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_p)$ una solución asociada a S con la propiedad que $q_1 = q_2 = \cdots = q_{r_1} \neq q_{r_1+1} = q_{r_1+2} = \cdots q_{r_1+r_2}$, y así de manera sucesiva hasta llegar a $q_{r_1+r_2+\cdots+r_k} = q_p$. En otras palabras, Q se obtiene a partir de S agrupando los valores s_i que son iguales. En particular, $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = p$. Con esta notación, el número de soluciones asociadas a S (contando también S) es igual a $\dfrac{p!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$.

Obsérvese que si todos los r_i son estrictamente menores que p, entonces dicha expresión es congruente con 0 módulo p, puesto que el cociente de factoriales es un número natural y en el denominador no hay ningún término múltiplo de p.

Ya tenemos todas las herramientas que necesitábamos. Volviendo al problema original, observar que $\underbrace{(a, a, \ldots, a)}_{p}$ es solución de $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = pa$.

Por lo tanto $f_A(pa) \equiv 1 \pmod{p}$: la solución $\underbrace{(a, a, \ldots, a)}_{p}$ no se asocia a ninguna otra, mientras que cualquier otra solución de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = pa$ tiene un número múltiplo de p de asociadas. Por otro lado no existen soluciones de $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = pa + 1$ con todas las x_i iguales (su valor tendría que ser $a + \dfrac{1}{p}$), con lo que según lo anterior $f_A(pa+1) \equiv 0 \pmod{p}$ y llegamos a una contradicción.