LVI Olimpiada matemática Española (Concurso Final)

Enunciados y Soluciones

1. Decimos que un polinomio $p(x)$, con coeficientes reales, es *almeriense* si tiene la forma

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + a$$

y sus tres raíces son números reales positivos en progresión aritmética. Halla todos los polinomios almerienses tales que $p(7/4) = 0$.

Solución. Llamemos $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ a las raíces del polinomio. De la condición de estar en progresión aritmética tenemos que existe un número real no negativo δ de manera que $\alpha = \beta - \delta$ y $\gamma = \beta + \delta$. Por su parte, utilizando las fórmulas de Cardano–Viète, resulta que

$$\alpha\beta\gamma = -a = \alpha + \beta + \gamma,$$

o lo que es lo mismo

$$\beta(\beta^2 - \delta^2) = 3\beta.$$

Como las raíces son distintas de cero, se llega finalmente a que

$$(\beta - \delta)(\beta + \delta) = \beta^2 - \delta^2 = 3.$$

Tenemos que analizar los tres casos posibles:

(a) Si $\beta - \delta = 7/4$, entonces $\beta + \delta = 12/7$. De aquí se tiene que $\beta = 97/56$ y $\delta = -1/56$, lo cual contradice la hipótesis de que $\delta \geq 0$ (alternativamente, no es posible que $\beta + \delta < \beta - \delta$).

(b) Si $\beta = 7/4$, entonces $\delta^2 = 1/4$. Por lo tanto, las raíces del polinomio son $(3/2, 7/4, 2)$ y se obtiene que

$$p(x) = (x - 3/2)(x - 7/4)(x - 2) = x^3 - \frac{21}{4}x^2 + \frac{73}{8}x - \frac{21}{4}.$$

(c) Si $\beta + \delta = 7/4$, entonces $\beta - \delta = 12/7$. De aquí se tiene que $\beta = 97/56$ y $\delta = 1/56$. Por lo tanto, las raíces del polinomio son $(12/7, 97/56, 7/4)$ y se obtiene que

$$p(x) = (x - 12/7)(x - 97/56)(x - 7/4) = x^3 - \frac{291}{56}x^2 + \frac{14113}{1568}x - \frac{291}{56}.$$

2. Consideramos la sucesión de números enteros $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

- $f(1) = 1$.
- Si n es par, $f(n) = f(n/2)$.
- Si $n > 1$ es impar y $f(n-1)$ es impar, entonces $f(n) = f(n-1) - 1$.
- Si $n > 1$ es impar y $f(n-1)$ es par, entonces $f(n) = f(n-1) + 1$

a) Calcula $f(2^{2020} - 1)$.

b) Demuestra que $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ no es periódica, es decir, no existen enteros positivos t y n_0 tales que $f(n+t) = f(n)$ para cualquier $n \geq n_0$.

Solución. En primer lugar, hacemos notar que la sucesión está bien definida: para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, el valor de $f(n)$ está perfectamente determinado a partir de los valores de $f(r)$ con $r < n$.

Consideramos la sucesión $g(n)$ dada por $g(n) = 0$ si la expresión binaria de n tiene un número par de unos; y $g(n) = 1$ si la expresión binaria de n tiene un número impar de unos. Es obvio que g cumple todas las condiciones que definen a f, luego $f(n) = g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
De esta forma, puesto que $2^{2020} - 1$ se escribe en binario con 2020 unos,

$$f(2^{2020} - 1) = 0$$

Finalmente, veamos que la sucesión no es periódica. Supongamos que lo fuera a partir de un valor n_0 y con periodo t. Tomamos el entero, r, tal que $2^r \leq t < 2^{r+1}$. Observamos que la expresión binaria de $2^r + t$ se obtiene sustituyendo el primer 1 (por la izquierda) de la expresión de t por dos dígitos 10, con lo que $f(2^r + t) = f(t)$. Tomamos un entero $k > r + 1$ tal que $2^k > n_0$. Ahora, se tiene:
Si $f(t) = 1$, entonces $f(2^k + t) = 0$ y por tanto, $f(2^k + t) \neq f(2^k) = 1$.

Si $f(t) = 0$, entonces $f(2^k + 2^r + t) = 1 + f(2^r + t) = 1 + f(t) = 1$ y por tanto, $f(2^k + 2^r + t) \neq f(2^k + 2^r) = 0$.

3. A cada punto del conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\}$, formado por los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas son enteras, le asignamos un color de entre p colores posibles. Demuestra que forzosamente existe algún paralelepípedo recto (poliedro de seis caras en el que cada cara es un rectángulo) cuyos vértices pertenecen a A y son todos del mismo color.

Solución. Ponemos $n = p\binom{p+1}{2}$. Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, pensamos en el conjunto $A_j^0 = \{(i, j, 0) \in A; 0 \leq i \leq p\}$. Por el Principio del Palomar, podemos asegurar que, para cada j hay dos puntos de A_j^0 del mismo color. Puede que haya más de dos o que ocurra para más de un color; no importa, de entre los $p+1$ marcamos dos que comparten color. Teniendo en cuenta que hay $p\binom{p+1}{2} + 1$ posibles valores de j, de nuevo por el Palomar, existirán al menos $r = \binom{p+1}{2} + 1$ de esos A_j^0 (digamos $A_{j_1}^0, \ldots, A_{j_r}^0$) en los que el color repetido en todos ellos es el mismo (color c). Como el número de maneras de elegir los dos lugares (valores de i) de cada uno de esos $A_{j_t}^0$, con $t = 1, \ldots, r$, es $\binom{p+1}{2}$, usando de nuevo el Principio del Palomar, podemos asegurar que existen A_{j_α} y A_{j_β}, con $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$, en los que el color c aparece dos veces en cada uno y en los mismos lugares. O sea, queda probado que en el plano $z = 0$, y con valores de la coordenada $x \in \{0, 1, \ldots, p\}$ y de la coordenada $y \in \{0, 1, \ldots, n\}$, existen cuatros puntos

$$(i_1, j_\alpha, 0),\ (i_2, j_\alpha, 0) \in A_{j_\alpha} \qquad (i_1, j_\beta, 0),\ (i_2, j_\beta, 0) \in A_{j_\beta}$$

que son vértices de un rectángulo (siempre de Lados Paralelos a los Bordes de la Cuadrícula: LPBC) y los cuatro de un mismo color.

El número, m, de formas de elegir, en una cuadrícula de $(p + 1) \times (n + 1)$ puntos, cuatro puntos que sean vertíces de un rectángulo LPBC es lo mismo que el número de maneras de elegir dos valores de la abscisa y dos valores de la ordenada, o sea $m = \binom{p+1}{2}\binom{n+1}{2}$.

Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, p \times m\}$ consideramos la cuadrícula $A^k = \{(i, j, k) \in A; 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq n\}$. Tenemos $pm + 1$ cuadrículas y en cada una de ellas hay cuatros puntos que comparten color y son vértices de un rectángulo

LBPC. Por el Principio del Palomar, hay al menos $p+1$ de esas cuadrículas en las que los cuatro puntos de cada una de ellas ocupan los mismos lugares en lo referido a sus dos primeras coordenadas. Finalmente, de nuevo por el Palomar, hay (al menos) dos de esas $p+1$ cuadrículas tales que el color común de los cuatro vértices de una es el mismo que el color común de los cuatro vértices de la otra. Así tenemos ocho puntos de A que comparten color y son vértices de un paralelepípedo recto.

4. Ana y Benito juegan a un juego que consta de 2020 rondas. Inicialmente, en la mesa hay 2020 cartas, numeradas de 1 a 2020, y Ana tiene una carta adicional con el nœmero 0. En la ronda k-ésima, el jugador que no tiene la carta $k-1$ decide si toma la carta k o si se la entrega al otro jugador. El número de cada carta indica su valor en puntos. Al terminar el juego, gana quien tiene más puntos. Determina qué jugador tiene estrategia ganadora, o si ambos jugadores pueden forzar el empate, y describe la estrategia a seguir.

Solución. Ambos jugadores pueden forzar el empate. Dividimos el juego en 505 etapas, cada una con cuatro rondas consecutivas de la forma

$$\{k, k+1, k+2, k+3\}.$$

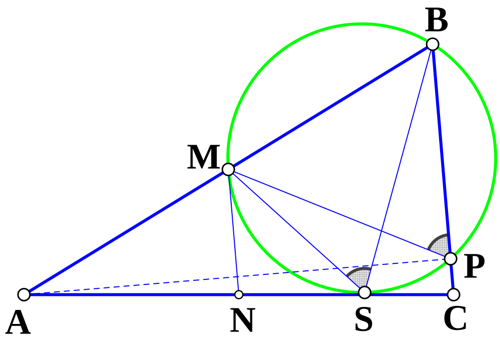
Vamos a demostrar que cada jugador puede conseguir al menos la mitad de los puntos de cada etapa, independientemente de qué jugador tenga la carta $k-1$. No importa qué ocurra en la k-ésima ronda. A partir de ahí:

- El jugador que recibe la carta k (sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es Ana) puede asegurase al menos el empate en la etapa de 4 turnos. En efecto, si Benito le entrega también la carta $k+1$ y la carta $k+2$, entonces Ana ya ha recibido $3k+3$ puntos y gana la etapa de 4 turnos. Si Benito entrega a Ana la carta $k+1$ y se queda la $k+2$, Ana toma la carta $k+3$ y gana la etapa de 4 turnos. Si Benito se queda la carta $k+1$, Ana entrega la carta $k+2$ a Benito y se queda con la carta $k+3$, con lo que empata la etapa de 4 turnos. En resumen, quien recibe la carta k siempre puede conseguir al menos el empate.

- El jugador que no recibe la carta k (sin pérdida de generalidad, Benito) se queda con la carta $k+1$. Si Ana le entrega la carta $k+2$, Benito ya tiene $2k+3$ puntos y se garantiza el empate en la etapa de 4 turnos. Si Ana se queda la carta $k+2$, Benito se queda con la carta $k+3$, con lo que acaba con $2k+4$ puntos y gana la etapa de 4 turnos. En resumen, quien no recibe la carta k siempre puede conseguir al menos el empate.

5. En un triángulo acutángulo ABC, sea M el punto medio del lado AB y P el pie de la altura sobre el lado BC. Prueba que si $AC + BC = \sqrt{2}AB$, entonces la circunferencia circunscrita del triángulo BMP es tangente al lado AC.

Solución. Sea S el punto de AC, al mismo lado de A que C, tal que $AS = \sqrt{2}AB/2$. Este punto cumple que $AS^2 = \frac{AB^2}{2} = AB \cdot AM$, que es la potencia de A con respecto a la circunferencia circunscrita de BMP; luego si esta circunferencia circunscrita pasa por S entonces es tangente a AB. Vamos a demostrar que esto es cierto, probando que $\angle MSB = \angle MPB$. Sea N el



punto medio de AC. Como $AS = \frac{\sqrt{2}AB}{2} = \frac{AC+BC}{2} = AN + MN$, tenemos $NS = NM$. De ahí obtenemos $\angle NMS = \angle NSM$.
Obsérvese que los triángulos ASB y AMS son semejantes, porque $\frac{AB}{AS} = \sqrt{2} = \frac{AS}{AM}$. De aquí se deduce que $\angle AMS = \angle ASB$. Entonces $\angle ABC = \angle AMN = \angle AMS - \angle NMS = \angle ASB - \angle NSM = \angle MSB$.
Por otro lado, por ser M el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo APB, tenemos $MP = MB$. Esto quiere decir que $\angle MPB = \angle MBP = \angle ABC = \angle MSB$, como queríamos demostrar.

6. Sea S un subconjunto finito de los números enteros. Definimos $d_2(S)$ y $d_3(S)$ de la siguiente manera:

- $d_2(S)$ es el número de elementos $a \in S$ para los que existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x^2 - y^2 = a$.

- $d_3(S)$ es el número de elementos $a \in S$ para los que existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x^3 - y^3 = a$.

(a) Sea m un número entero y sea $S = \{m, m+1, \ldots, m+2019\}$. Prueba que

$$d_2(S) > \frac{13}{7} \cdot d_3(S).$$

(b) Sea n un entero positivo y sea $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Prueba que existe un número N de manera que si $n > N$,

$$d_2(S_n) > 4 \cdot d_3(S_n).$$

Solución. En primer lugar, observamos que un número se puede escribir como diferencia de cuadrados si y solo si no es de la forma $4k+2$. Para ver esto, escribimos $x^2 - y^2 = \alpha \cdot \beta$, donde α y β tienen la misma paridad y simplemente ponemos $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Por ejemplo, si $n = 4k$ sirve $\alpha = 2$, $\beta = 2k$; si $n = 4k+1$ o $n = 4k+3$, sirve $\alpha = 1$, $\beta = n$. Recíprocamente, una diferencia de cuadrados nunca podrá dar resto 2 al dividir entre 4 (simplemente notando que un cuadrado es 0 o 1 módulo 4).
Analicemos ahora cómo pueden ser las diferencias de dos cubos. Observamos que la congruencia módulo 7 del cubo de un entero solo puede ser 0, 1 o 6; en consecuencia, la diferencia de dos cubos, módulo 7, solo puede ser 0, 1, 2, 5 o 6. Haciendo lo mismo módulo 9, vemos que la congruencia de un cubo módulo 9 solo puede ser 0, 1 u 8; en consecuencia, la diferencia de dos cubos módulo 9, solo puede ser 0, 1, 2, 7 u 8. Por tanto, hay a lo sumo 5 opciones módulo 7 y 5 opciones módulo 9, y, por el teorema chino de los restos, tenemos tan solo 25 opciones módulo 63.
En un intervalo de longitud 2020 (múltiplo de 4), exactamente 3/4 partes de los números serán no congruentes con 2 módulo 4 (esto es, $d_2(S) = 1515$). Por su parte, tenemos que $2020 = 32 \cdot 63 + 4$, de manera que

$$d_3(S) \leq 32 \cdot 25 + 4 = 804.$$

Por tanto, tenemos que $d_2(S)/d_3(S) \geq 1515/804 > 13/7$, como queríamos demostrar.

Pasamos ahora a resolver la segunda parte. El mismo razonamiento usado anteriormente muestra que

$$\frac{3n}{4} - \frac{1}{2} \leq d_2(S_n) \leq \frac{3n}{4} + \frac{1}{4}.$$

Será suficiente entonces con ver que asintóticamente $d_3(n) < \frac{3n}{16}$, esto es, que para valores de n suficientemente grandes se cumple esa última desigualdad.

Supongamos que $x > y > 0$. Una primera observación es que si $x^3 - y^3 \leq n$, entonces

$$n \geq x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) \geq x^2+xy+y^2 > 3y^2,$$

con lo que $y < \sqrt{n/3}$. Por su parte,

$$x^3 \leq n + y^3 \leq n + (n/3)^{3/2}.$$

Esto es, $x \leq \sqrt[3]{n + (n/3)^{3/2}}$. Como el cociente $n/(n/3)^{3/2}$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito, tenemos que para cualquier $\delta > 0$ existirá un número N suficientemente grande de manera que cuando $n > N$,

$$x \leq \sqrt[3]{n + (n/3)^{3/2}} < (1+\delta)\sqrt{n/3}.$$

Como sabemos además que $y < x$, necesariamente el número de parejas está acotado por $\frac{(1+\delta)^2 n/3}{2}$. Por tanto, podemos obtener a lo sumo $(1+\delta)^2 n/6$ números. Observamos que no es necesario considerar el caso en el que $x, y < 0$, dado que los números obtenidos serán los mismos.
En el caso en que $y < 0 < x$, tenemos que $x^3 + (-y)^3 \leq n$, y han de ser x, $-y < n^{1/3}$, de manera que podemos obtener a lo sumo $n^{2/3}$ números. Seleccionando un δ suficientemente pequeño (por ejemplo $\delta = 0.01$), concluimos que

$$d_3(S_n) \leq (1+0.01)^2 n/6 + n^{2/3} < \frac{3n}{16}$$

si n es suficientemente grande.