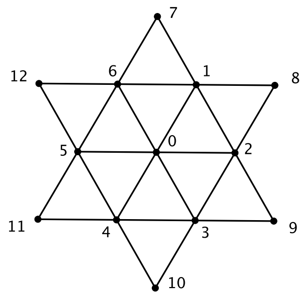
LVIII Olimpiada Matemática Espñola
Concurso Final Nacional
1 y 2 de abril de 2022
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Problema 1

La estrella de seis puntas de la figura es regular: todos los ángulos interiores de los triángulos pequeños son iguales. A cada uno de los trece puntos señalados se le asigna un color: verde o rojo. Demuestra que siempre habrá tres puntos del mismo color que son vértices de un triángulo equilatero.



Solución: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el punto central, 0, de la figura está pintado de rojo. Si hubiera dos de los vértices del hexágono (de vértices $1, 2, 3, 4, 5, 6$) consecutivos (el 1 es siguiente del 6) pintados de rojo, junto con 0, tendríamos un triángulo equilátero con los tres vértices rojos. Si no hay dos vértices consecutivos del hexágono pintados de rojo, tiene que haber al menos tres de los seis pintados de verde. Si son tres rojos y tres verdes, puesto que no puede haber dos rojos consecutivos, los tres rojos y los tres verdes se van alternando; luego los tres rojos (por ejemplo, 1, 3 y 5) son vértices de un triángulo equilátero. Por lo tanto, tiene que haber cuatro (o más) de los seis vértices del hexágono pintados de verde. Teniendo en cuenta que que no puede haber dos rojos consecutivos, y tampoco puede haber tres verdes en lugares alternos, la única posibilidad que queda es que haya dos rojos diametralmente opuestos (pongamos que son el 2 y el 5) y los demás verdes. Finalmente, si 7 es rojo, 2, 5 y 7 forman triángulo equilátero de vértices rojos. Y si 7 es verde, 1, 6 y 7 forman triángulo equilátero de vértices verdes. □

Problema 2

Sean a, b, c, d cuatro números reales positivos. Si se cumple

$$a+b+\frac{1}{ab}=c+d+\frac{1}{cd} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+cd$$

demuestra que al menos dos de los valores a, b, c, d son iguales.

Solución 1: Sea $u=a+b+\frac{1}{ab}$ y $v=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab$. Denotamos $r=\frac{1}{ab}$. Entonces tenemos que $a+b+r=u$, $ab+br+ra=v$ y $abr=1$. Por las identidades de Cardano-Vieta, a, b y r son las tres raíces del polinomio $p(x)=x^3-ux^2+vx-1$. Por la misma razón, c, d y $\frac{1}{cd}$ son estas mismas tres raíces. Como $p(x)$ solo tiene tres raíces, los valores a, b, c, d no pueden ser todos distintos. □

Solución 2: Procedamos por contradicción, suponiendo que existen cuatro valores diferentes (a, b, c, d) que cumplen las igualdades del enunciado. Podemos considerar que c y d están fijadas y hallar a partir de ahí los valores de (a, b) que cumplen el sistema. Una rápida inspección nos da 6 soluciones, que supondremos, por ahora, que son diferentes:

$$(c, d)\,,\ \left(c, \frac{1}{cd}\right),\ (d, c)\,,\ \left(d, \frac{1}{cd}\right),\ \left(\frac{1}{cd}, c\right),\ \left(\frac{1}{cd}, d\right).$$

En todos estos casos hay al menos dos variables iguales entre las cuatro. Si probamos que estas son las únicas soluciones del sistema habremos concluido.

Consideremos las variables auxiliares

$$x=a+b,\ y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

y denotemos

$$z=c+d,\ t=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Es fácil comprobar que cada valor de la pareja (x, y) da lugar, a lo sumo, a dos parejas de soluciones de la forma (a, b) y (b, a). El sistema inicial se reescribe como

$$x+\frac{y}{x}=z+\frac{t}{z}, \quad y+\frac{x}{y}=t+\frac{z}{t}.$$

De la primera ecuación tenemos que

$$y=x\Big(z+\frac{t}{z}-x\Big),$$

y por tanto encontrar el valor de x determina unívocamente el de y. Es suficiente ver entonces que hay a lo sumo tres opciones para el valor de x, dado que eso dejaría a lo sumo tres opciones para el par (x, y) y seis para (a, b), que ya las conocemos. Sustituyendo en la segunda ecuación y eliminando denominadores, tenemos que

$$x\Big(z+\frac{t}{z}-x\Big)^2-\Big(t+\frac{z}{t}\Big)\Big(z+\frac{t}{z}-x\Big)+1=0.$$

Como es una ecuación de tercer grado, hay a lo sumo tres soluciones y hemos concluido.

El único caso que queda por analizar es el derivado de que alguna de las seis soluciones iniciales coincidan, y es inmediato comprobar que eso es equivalente a $c^2d=1$ o $cd^2=1$. Por simetría, es suficiente considerar el primer caso, en el que $d=\frac{1}{c^2}$, con $c\neq 1$. En ese caso, se pueden calcular explícitamente las soluciones de la ecuación en x, que son $x=c+\frac{1}{c^2}$ (doble) y $x=2c$. Se comprueba que la solución doble da lugar a las parejas $(c,\frac{1}{c^2})$ y $(\frac{1}{c^2},c)$, mientras que la solución $x=2c$ da el par (c,c). En ambos casos se tiene la conclusión deseada. □

Problema 3

Sea ABC un triángulo, con $AB<AC$, y sea Γ su circuncírculo. Sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Sea R el punto de EF tal que DR es una altura del triángulo DEF y sea S el punto de corte de la bisectriz exterior del ángulo $\angle BAC$ con Γ. Probar que AR y SD se cortan sobre Γ.

Solución 1: Sea X el segundo punto de corte de AR con Γ. Por comodidad, pongamos $\beta=\angle ABC$ y $\gamma=\angle BCA$. Se tiene entonces que

$$\frac{BX}{XC}=\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle CAX}=\frac{FR}{RE}=\frac{FD\sin(\gamma/2)}{DE\sin(\beta/2)}=\frac{BD\sin\beta\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)}{DC\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)\sin\gamma}=\frac{BD}{DC},$$

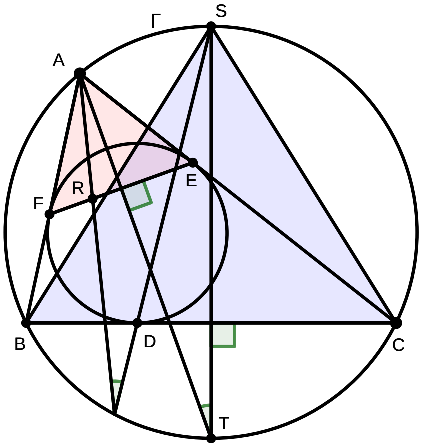
donde en la primera igualdad se ha usado el teorema del seno en los triángulos ABX y ACX; en la segunda que AFE es isósceles; en la tercera el teorema del seno en FDR y DRE; y en la cuarta nuevamente el teorema del seno en BDF y CDE.

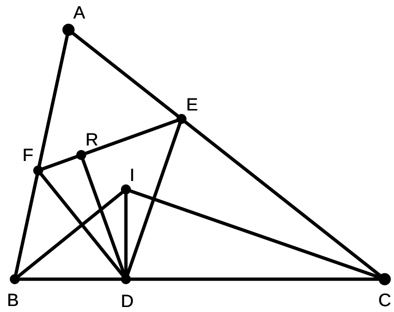
Sea ahora Y el segundo punto de corte de SD con Γ. Tenemos que YD es una bisectriz del ángulo $\angle BYC$ y por tanto podemos aplicar el teorema de la bisectriz y deducir que

$$\frac{BY}{YC}=\frac{BD}{DC}.$$

Por tanto, tenemos que X e Y son dos puntos sobre el arco de BC que no contiene a A y que satisfacen $\frac{BX}{XC}=\frac{BY}{YC}$, lo que implica necesariamente que $X=Y$ (dado que X e Y están sobre el círculo de Apolonio de B y C, que corta en un único punto al arco BC que no contiene a A). Esto demuestra lo que pedía el enunciado. □

Solución 2: Sea T el punto diametralmente opuesto a S en Γ. Vamos a demostrar que el ángulo formado por las rectas AR y SD es igual a $\angle ATS$, y por lo tanto la intersección de dichas rectas se halla sobre Γ.





Comenzamos observando que los triángulos AFE y SBC son semejantes, ya que son isósceles y $\angle FAE = \angle BAC = \angle BSC$. Además, como la altura del lado desigual es AT (la bisectriz interna) en un caso y ST en el otro, la rotación necesaria para orientar igualmente ambos triángulos es igual a $\angle ATS$. Por lo tanto, basta con demostrar que los puntos R y D son puntos equivalentes en la semejanza, es decir, $\frac{FR}{RE} = \frac{BD}{DC}$.

Sea I el incentro de ABC. Claramente $\angle IBD = \angle B/2$ y $\angle ICD = \angle C/2$. Dado que $\angle AFE = 90^\circ - \angle A/2$ (por estar en el triángulo isósceles AFE) y $\angle BFD = 90^\circ - \angle B/2$, obtenemos $\angle DFR = 90^\circ - \angle C/2$ y $\angle DER = 90^\circ - \angle B/2$. Concluimos que

$$\frac{FR}{RE} = \frac{DR\sec(90^\circ - \angle C/2)}{DR\sec(90^\circ - \angle B/2)} = \frac{ID\sec(\angle B/2)}{ID\sec(\angle C/2)} = \frac{BD}{DC},$$

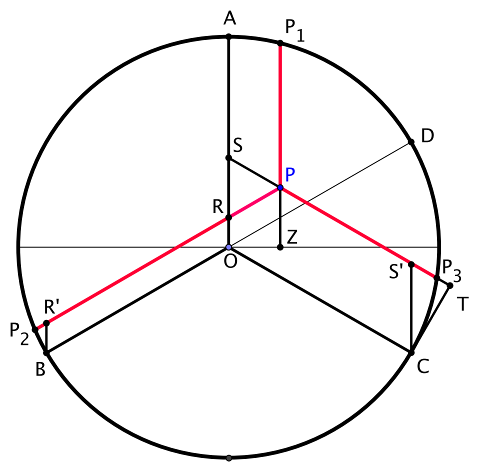
tal y como queríamos demostrar. □

Problema 4

Sea P un punto en el plano. Demuestra que es posible trazar tres semirrectas con origen en P con la siguiente propiedad: para toda circunferencia de radio r que contiene a P en su interior, si P_1, P_2 y P_3 son los puntos de corte de las semirrectas con la circunferencia, entonces

$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| \leq 3r.$$

Solución 1: Trazamos tres semirrectas con origen en P de manera que el ángulo formado por dos cualesquiera de las tres sea de 120°. Imaginemos el círculo dividido en seis regiones mediante tres rectas que pasen por su centro y sean paralelas a las tres semirrectas. Observemos que, por simetría respecto a una de las rectas o por giros de ángulo 120°, basta con analizar lo que ocurre cuando el punto P se encuentra en una cualquiera de las seis regiones. Usamos las notaciones de la figura.



Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el radio de la circunferencia es $r = 1$. Los tres puntos de corte de las semirrectas con la circunferencia son, respectivamente, P_1, P_2 y P_3. Las paralelas con origen en O (centro de la circunferencia) la cortan, respectivamente, en A, B y C. La recta PP_3 y la tangente a la circunferencia en C se cortan en el punto T. S' es el punto de corte de PP_3 con la paralela a OA por C. Es obvio que $\angle S'CT = 30°$, con lo que $SP_3 = SS' + S'P_3 = OC + S'P_3 \leq OC + S'T = OC + \frac{1}{2}CS' = 1 + \frac{1}{2}OS$. De manera análoga, se demuestra que $RP_2 \leq 1 + \frac{1}{2}OR$. También es obvio que $RP = PS$. Además, como $\frac{1}{2}OS = \frac{1}{2}OR + \frac{1}{2}RS$ y $PZ = OR + \frac{1}{2}RS$, tenemos:

$$PP_1 + PP_2 + PP_3 = PP_1 + RP_2 + PR + SP_3 - SP =$$
$$PP_1 + RP_2 + SP_3 \leq PP_1 + 1 + \frac{1}{2}OR + 1 + \frac{1}{2}OS =$$
$$2 + PP_1 + OR + \frac{1}{2}RS \leq 2 + PP_1 + PZ \leq 3.$$

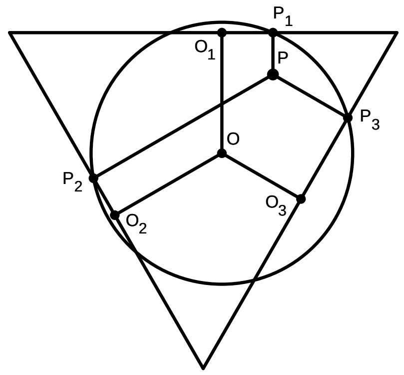
Solución 2: Comenzamos con la siguiente lema:

Lema En un triángulo equilátero ABC, la suma de las distancias de cualquier punto interior P a los tres lados es independiente de P. Si Q no se encuentra en el interior de ABC, entonces la suma de distancias de Q a los tres lados es mayor o igual a aquella de P.

Demostración: Sean X, Y y Z las proyecciones de P en AB, BC y CA, respectivamente. Entonces tenemos que

$$PX + PY + PZ = \frac{2 \cdot \text{área}\, ABP}{AB} + \frac{2 \cdot \text{área}\, BCP}{BC} + \frac{2 \cdot \text{área}\, CAP}{CA} = \frac{2 \cdot \text{área}\, ABC}{AB},$$

que no depende de P. Si Q no está en el interior de ABC usamos el mismo cálculo con área ABQ + área BCQ + área $CAQ \geq$ área ABC. $\square$



Trazamos tres semirrectas desde P que formen ángulos de 120°. Ahora sea ℓ_1 la recta perpendicular a PP_1 que pasa por P_1, y definimos ℓ_2 y ℓ_3 análogamente. Estas tres rectas forman ángulos de 60° entre sí, por lo que forman un triángulo equilátero.

Sea O el centro de la circunferencia. Sea O_1 la proyección de O sobre ℓ_1, y definimos análogamente O_2 y O_3. Como P está en el interior del triángulo equilátero, tenemos que

$$PP_1 + PP_2 + PP_3 \leq OO_1 + OO_2 + OO_3 \leq OP_1 + OP_2 + OP_3 = 3r.$$

Solución 3: Consideramos tres semirrectas arbitrarias que pasen por P y que formen entre sí un ángulo de 120°. Tomemos ahora una circunferencia que contenga en su interior al punto P, y fijemos unos ejes coordenados de manera que la circunferencia tiene radio 1 y una de las semirrectas tiene la dirección del eje de abscisas.

De esta manera $P = (a, b)$, con $a^2 + b^2 < 1$. Para hallar las coordenadas de P_1, consideramos el valor de $\lambda_1 > 0$ tal que $(a, b) + \lambda_1(1, 0)$ tiene módulo 1. Se tiene además que $|PP_1| = \lambda_1$, y es inmediato comprobar que

$$\lambda_1 = -a + \frac{\sqrt{4 - 4b^2}}{2}.$$

De forma similar, para hallar las coordenadas de P_2, consideramos el valor de $\lambda_2 > 0$ tal que $(a, b) + \lambda_2(\cos 120°, \sin 120°)$ tiene módulo 1. Resolviendo la ecuación cuadrática se comprueba que

$$\lambda_2 = \frac{a - b\sqrt{3} + \sqrt{4 - 3a^2 - b^2 - 2\sqrt{3}ab}}{2}.$$

De la misma manera, $|PP_2| = \lambda_2$. Análogamente,

$$\lambda_3 = \frac{a + b\sqrt{3} + \sqrt{4 - 3a^2 - b^2 + 2\sqrt{3}ab}}{2}.$$

La desigualdad del enunciado equivale entonces a

$$\sqrt{4-4b^2}+\sqrt{4-3a^2-b^2-2\sqrt{3}ab}+\sqrt{4-3a^2-b^2+2\sqrt{3}ab}\leq 6.$$

Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{4-4b^2}+\sqrt{4-3a^2-b^2-2\sqrt{3}ab}+\sqrt{4-3a^2-b^2+2\sqrt{3}ab}\\ \leq \sqrt{3}\cdot\sqrt{12-6(a^2+b^2)}\leq 6,\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Problema 5

En un grupo de 2022 estudiantes, algunos son amigos entre sí, y la amistad es siempre recíproca. Sabemos que cualquier subconjunto de esos estudiantes tiene la siguiente propiedad: *siempre existe un estudiante del subconjunto que es amigo de, a lo sumo,* 100 *estudiantes del mismo.*

(a) Determina el menor entero positivo N que nos asegura que se cumple la siguiente propiedad: *es posible dividir a los estudiantes en N grupos (no necesariamente del mismo tamaño), de manera que dos estudiantes que están en el mismo grupo nunca son amigos entre sí.*

(b) Numeramos a los estudiantes del 1 al 2022. Sea c_i el número de amigos del estudiante i. Determina el máximo valor que puede tomar la suma

$$c_1+c_2+\ldots+c_{2022}.$$

Solución: Para la primera parte, seguimos la siguiente estrategia: tomamos un estudiante con a lo sumo 100 amigos (que existe por hipótesis). Diremos que es el estudiante 1. Sacamos a ese estudiante y en el subconjunto resultante, existirá un estudiante con a lo sumo 100 amigos en dicho subconjunto; este será el estudiante 2, y así sucesivamente.

Vamos a probar entonces que la respuesta es $N=101$. Empezamos a asignar grupo por el final. Al estudiante 2022 le asignamos un grupo cualquiera. En general, al estudiante i le asignaremos un grupo que no haya sido usado en ninguno de los estudiantes ya asignados de los que sea amigo. Por construcción, sabemos que es amigo de como máximo 100 estudiantes con un número mayor, así que con tener 101 grupos es suficiente para completar esta asignación.

Para ver que $N=101$ es la mejor opción, consideremos la siguiente configuración: tomamos 100 estudiantes de los 2022 y hacemos que esos 100 sean amigos de todos (tanto entre ellos como con los 1922 restantes); entre los demás no hay más relaciones de amistad. Si ahora tomamos esos 100 estudiantes y uno de los otros tenemos que hay todas las relaciones de amistad posibles, con lo que 100 grupos, o cualquier cantidad inferior, no sería suficiente.

Para el segundo apartado seguimos esta misma estrategia. Tomamos un estudiante con a lo sumo 100 amigos y lo eliminamos. Cada vez que hacemos este proceso, si quedaban por lo menos 101, estamos eliminando a lo sumo 100 relaciones de amistad. Cuando quedan i estudiantes, con $i \leq 100$, estamos sacando como máximo $i-1$ relaciones de amistad. En total, no sacamos más de

$$100 \cdot 1922 + \sum_{i=1}^{99} i = 192200 + \binom{100}{2}$$

relaciones de amistad. Teniendo en cuenta que, por el enunciado del apartado (b), cada relación de amistad ha de contarse dos veces, la suma pedida será menor o igual que $384400 + 9900 = 394300$. Está claro que podemos conseguir la cota. Para ello, al igual que antes, tomamos 100 de los 2022 y hacemos que esos 100 sean amigos de todos (tanto entre ellos como con los 1922 restantes). En este caso, el número de amistades es el proporcionado por la cota.

Problema 6

Halla todas las ternas de enteros positivos (x, y, z) , con $z > 1$, que satisfacen simultáneamente que

$$x \text{ divide a } y+1, \qquad y \text{ divide a } z-1, \qquad z \text{ divide a } x^2+1.$$

Solución 1: Las soluciones son $(1,1,2)$, $(2,1,5)$ y $(2n+1, 2n, 2n^2+2n+1)$ con $n \geq 1$.

Si $x = 1$ la única solución es $(1,1,2)$ (z divide a 2, por lo que $z = 2$, e y divide a 1). Si $x = 2$ la única solución es $(2,1,5)$ (z divide a 5, así que $z = 5$, e y divide a 4 y es impar). Supongamos ahora que $x \geq 3$.

Sean $y+1 = rx$, $z-1 = sy$ y $x^2+1 = tz$. Entonces sustituyendo sucesivamente, obtenemos que

$$x^2 + 1 = tz = sty + t = rstx - st + t. \tag{1}$$

De esta igualdad se tiene que $st - t \equiv -1 \pmod{x}$. Esto implica que $st - t \geq x - 1$, y a su vez $st \geq x$. Si $r \geq 2$, entonces

$$x^2 + 1 = rstx - st + t \geq (2x-1)st + 1 \geq (2x-1)x + 1;$$

que, reordenado, deja $x(x-1) \leq 0$, lo que no es cierto para $x \geq 3$. Por lo tanto, concluimos que $r = 1$ en las soluciones restantes. Tenemos entonces

$$x^2 + 1 = st(x-1) + t \tag{2}$$

Si tomamos módulo $x-1$ a ambos lados, tenemos $t \equiv 2 \pmod{x-1}$. Si $t = 2$, entonces (2) es equivalente a $s = \frac{x+1}{2}$. Entonces x es un número impar (de la forma $2n+1$), $y = rx - 1 = 2n$, y $z = sy + 1 = 2n^2 + 2n + 1$. Si $t \neq 2$, entonces $t \geq x + 1$. De (2) obtenemos $x^2 + 1 \geq (x+1)(x-1) + x + 1$, o $x \leq 1$, con lo que llegamos a una contradicción. No hay más soluciones. Comprobamos que todas las posibles soluciones que hemos obtenido satisfacen las condiciones del enunciado.

Solución 2: Denotemos por a, b, c los tres cocientes, de manera que $y = ax-1$, $z = abx - b + 1$ y
$$x^2 - abcx + bc - c + 1 = 0.$$
Se trata de una ecuación cuadrática en x, que ha de tener por discriminante un cuadrado perfecto, esto es,
$$(abc)^2 - 4(bc - c + 1) = d^2,$$
con $d \geq 0$ un número entero. Observemos que $c(b-1) + 1 > 0$, de manera que $d < abc$, o alternativamente $d \leq abc - 1$. Esta condición nos dice que
$$4(bc - c + 1) = (abc)^2 - d^2 \geq (abc)^2 - (abc-1)^2 = 2abc - 1,$$
y la desigualdad tiene que ser estricta dado que el lado izquierdo siempre es par y el lado derecho siempre es impar. De aquí se deduce lo siguiente:

Si $c > 1$, en particular sucede que el lado derecho es positivo, por lo que necesariamente tiene que pasar que $a = 1$.

Si $c = 1$ también puede pasar que $a = 2$ (pero nunca $a > 2$).

Vamos a analizar cada caso por separado.

(a) Si $c > 1$ y $a = 1$, entonces
$$d^2 = (bc)^2 - 4bc + 4c - 4 = (bc-2)^2 + 4(c-2) \geq (bc-2)^2,$$
con igualdad si y solo si $c = 2$. En este caso, $x = y+1$, $2z = x^2+1$, con lo que x es par. La segunda ecuación señala que $x - 1$ divide a $(x^2-1)/2$, lo cual siempre es cierto. Se obtiene pues como solución $(2n+1, 2n, 2n^2+2n+1)$, con $n \geq 1$. En caso contrario, si $c \neq 2$, como $bc-2 < d < bc$, necesariamente pasa que $d = bc - 1$. Ahora bien, operando se llega a $4(c-2) = 2bc - 3$, lo cual no es posible por razones de paridad.

(b) Si $c = 1$ y $a = 2$, entonces $z = x^2 + 1$, $y + 1 = 2x$. Luego $2x - 1$ divide a x^2. Pero si $2x - 1$ divide a x^2, entonces también divide a $2x^2 - x(2x-1) = x$. A su vez, esto implica que $2x - 1$ también divide a $2x - (2x-1) = 1$. Por tanto, $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

(c) Si $c = 1$ y $a = 1$, entonces $z = x^2 + 1$, $y + 1 = x$. Luego $x - 1$ divide a x^2. Pero si $x - 1$ divide a x^2, entonces también divide a $x^2 - x(x-1) = x$. A su vez, esto implica que $x - 1$ también divide a $x - (x-1) = 1$. Por tanto, $x = 2$, $y = 1$, $z = 5$.

En definitiva, las únicas soluciones son:
$$(1,1,2), (2,1,5) \text{ y } (2n+1, 2n, 2n^2+2n+1), \text{ con } n \geq 1.$$