Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Abril – 2022

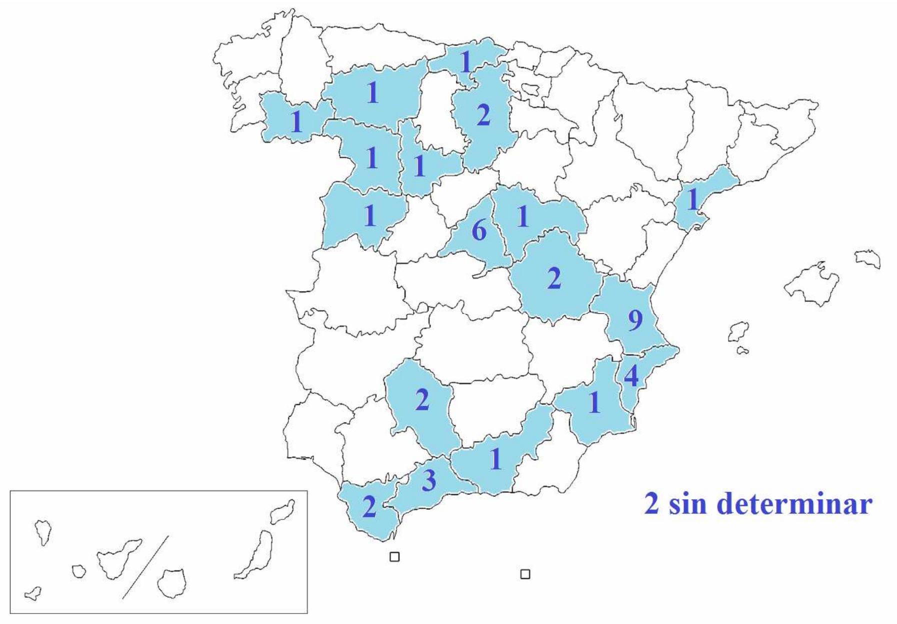
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
020	✓	✓	✓	✓	✓	✓
021	✓	✓	✓	✓	✓	✓
022	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

78 respuestas de 42 participantes (33 chicos / 09 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-022. Suma oculta.

El producto de cuatro números naturales distintos es 1785 y uno de ellos, es mayor que cien, ¿cuánto suman los otros tres?

Solución

Descomponiendo en factores primos: $1785 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$

Si los cuatro números distintos fueran precisamente esos cuatro factores, no habría ninguno mayor de cien. Para encontrar uno mayor que cien, hace falta multiplicar al menos dos de ellos, lo que nos reduce el número de factores y necesitamos cuatro.

Por ejemplo, reduciendo lo mínimo posible para superar cien: $1785 = 3 \cdot 5 \cdot 119$ y esto nos deja sólo con tres factores ¿verdad?. No, si somos un poco avispados: $1765 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 119$ nos da cuatro factores distintos y uno mayor de cien. Por tanto los otros tres, ya no quedan ocultos, y sabemos lo que suman: $1+3+5=\underline{9}$

Tres participantes advirtieron la errata del enunciado inicial con el número 1765: dos respondieron bien y uno no. Corregida, ya con 1785, el problema fue bien resuelto por: **Ana Lozano Miguel** *(IES Uno. Requena),* **Antonio de Gracia García** *(IES Uno. Requena),* **Diego Salón Hernández** *(IES Uno. Requena),* **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba),* **Irene Navarro Espada** *(CEIP Serrano Clavero. Requena),* **Juan Luis Ródenas Pedregosa** *(IES La Mola. Novelda),* **Laura Nuévalos Lorente** *(CEIP Princesa Sofía. Minglanilla),* **Marta Carsi Sánchez** *(IES Uno. Requena),* **Marta Nuévalos Lorente** *(IES P Castilla. Minglanilla),* **Omayma Mabtoul Guetbach** *(IES Uno. Requena),* **Óscar Pons del Río** *(IES Alameda. Utiel),* **Rubén Musoles Roca** *(Villassar de Mar),* **Celso de Frutos de Nicolás** *(Coslada),* **Pablo Sáez Reyes** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* **Elena Boix Miralles** *(IES La Foia. Elche),* **Elisa Estévez Molina** *(CI María Montessori. Málaga) y* **Paula Izquierdo Rodríguez** *(CEIP Río Arlanzon. Burgos)*

Infantil (1º/2º ESO)

I-022. Casi todo doses.

¿Cuánto suman los números que divididos de 2022 dejan un cociente y un resto natural formado sólo por doses y como mucho un cero?

Solución

Tenemos $\begin{array}{l|l} 2022 & d \\ \cline{2-2} \downarrow & c \\ r & \end{array}$ con $2022 = c \cdot d + r$ con $r < d$
y $c, r \in \{2, 20, 22, 202, 220, 222\}$

Así, $2022 - r = c \cdot d$ y viendo los casos según los valores del resto:

· Con restos de una sola cifra*:

$$2022 - 2 = 2020 = c \cdot d = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 = \underline{2 \cdot 1010} = \underline{20 \cdot 101} = \underline{202 \cdot 10}$$

· Con restos de dos cifras:

$$2022-20=2002=c\cdot d=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13=\underline{2\cdot 1001}=\underline{22\cdot 91}$$

$$2022-22=2000=c\cdot d=2^4\cdot 5^3=\underline{2\cdot 1000}=\underline{20\cdot 100}=\cancel{200\cdot 10}$$

· Con restos de tres cifras:

$$2022-202=1820=c\cdot d=2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13=\underline{2\cdot 910}=\cancel{20\cdot 91}$$

$$2022-220=1802=c\cdot d=2\cdot 17\cdot 53=\underline{2\cdot 901}$$

$$2022-222=1800=c\cdot d=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2=\underline{2\cdot 900}=\cancel{20\cdot 90}$$

En total son diez y suman:

$$\underline{S}=10+91+100+101+900+901+910+1000+1001+1010=\underline{6024}$$

* Aceptemos solución válida si alguien en su respuesta incluye el caso $r=0$

$$2022-0=2022=c\cdot d=2\cdot 3\cdot 337=\underline{2\cdot 1011}$$

Serían once y $\underline{S=7035}$

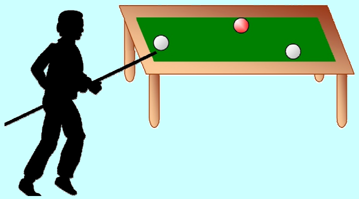
El problema resultó difícil, pues requería cierta meticulosidad. Bien resuelto, solo por: Juan Luis Ródenas Pedregosa *(IES La Mola. Novelda) y* Pablo Sáez Reyes *(IES Núñez de Arce. Valladolid)*

Se recibieron también nueve soluciones incorrectas

Cadete (3º/4º ESO)

C-022. Partidas a 100 carambolas.

Pablo le propone a Quintín echar una partida al billar.



De acuerdo – responde Quintín – ; pero no soy muy bueno que digamos. Cuando juego con Ricardo siempre me deja una ventaja de 25 carambolas en las partidas a 100.

Está bien. Yo también te concederé una ventaja justa para equilibrar la partida. Veamos cuando juego con Ricardo partidas a 100 carambolas, le doy a él una ventaja de 20. Por tanto debo darte a ti una ventaja de ...

¿Cuántas carambolas de ventaja debe darle Pablo a Quintín para echar una partida a 100 carambolas de forma equilibrada?

Solución

La relación entre el número de carambolas que ha de hacer cada jugador en partidas equilibradas a 100 viene dada por los siguientes cocientes:

$$\frac{R}{Q}=\frac{100}{75}\qquad \frac{P}{R}=\frac{100}{80}$$

Multiplicando ambas expresiones se tiene: $\frac{P}{Q}=\frac{100}{60}$

Por tanto, la ventaja que ha de dejar Pablo a Quintín para jugar una partida justa es de 40 carambolas.

Bien resuelto por: ***Ana Lozano Miguel*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Diego Alonso Domínguez*** *(IES Vaguada de la Palma. Salamanca),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(-Ourense),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Samuel Fuentes, Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada) y* ***Javier Delgado Tabernero*** *(Novaschool Añoreta Rincón de la Victoria)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-022. Sin calculadora II.

Halla, sin hacer uso de calculadora alguna en ningún paso intermedio, el valor de:

$$\frac{1}{1+\tan^3 0^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 10^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 20^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 30^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 40^\circ}+$$
$$+\frac{1}{1+\tan^3 50^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 60^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 70^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 80^\circ}$$

Solución

Sabemos que $\tan 0^\circ=0$, por tanto, el primer sumando vale $\frac{1}{1+\tan^3 0^\circ}=1$

Así, reordenando los sumandos, tenemos:

$$S=\frac{1}{1+\tan^3 0^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 10^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 20^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 30^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 40^\circ}+$$
$$+\frac{1}{1+\tan^3 50^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 60^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 70^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 80^\circ}=$$
$$=1+\left(\frac{1}{1+\tan^3 10^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 80^\circ}\right)+\left(\frac{1}{1+\tan^3 20^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 70^\circ}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{1+\tan^3 30^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 60^\circ}\right)+\left(\frac{1}{1+\tan^3 40^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3 50^\circ}\right)$$

Y, como $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$, cada paréntesis vale:

$$\frac{1}{1+\tan^3\alpha^\circ}+\frac{1}{1+\tan^3(90^\circ-\alpha^\circ)}=\frac{1+\tan^3(90^\circ-\alpha)+1+\tan^3\alpha}{(1+\tan^3\alpha^\circ)(1+\tan^3(90^\circ-\alpha^\circ))}=$$

$$=\frac{2+\tan^3\alpha^\circ+\tan^3(90^\circ-\alpha^\circ)}{1+\tan^3\alpha^\circ+\tan^3(90^\circ-\alpha^\circ)+\tan^3\alpha^\circ\cdot\tan^3(90^\circ-\alpha^\circ)}=$$

$$=\frac{2+\tan^3\alpha^\circ+\tan^3(90^\circ-\alpha^\circ)}{1+\tan^3\alpha^\circ+\tan^3(90^\circ-\alpha^\circ)+1}=1$$

Luego, el valor de la suma pedida es: $\underline{S=5}$

*Bien resuelto **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Marcos Monteagudo García** (IES-Uno. Requena), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Miguel España Montero** (C. Trinidad Sansueña. Córdoba), **Antonio Recuero Buleje** (IES Miguel Catalan. Coslada), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA MM. Torre Pach), **Carlos Ragel Castilla** (The English Center. Puerto Sta Mª), **Sotero Romero Morón** (The English Center. Puerto Sata Mª), **F. Damián Aranda Ballesteros** (Prof. IPEP-Córdoba), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Jorge Bartolomé Manrique** (IES Conde Diego Porcelos. Burgos), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Adrián Pardo Rodríguez** (IES José Saramago. Arganda del Rey), **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid) y **Álvaro Ramírez Mangas** (IES José Saramago. Arganda)*

Júnior

Jn-022. Unos repetidos.

El primer término de la sucesión $1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots\ \ldots$ es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el siguiente término, el segundo de dicha sucesión que resulta ser también cuadrado perfecto?

Solución

Sea n ese segundo término: $a_n=11\ldots\ldots11$ con $\underline{n>1}$ unos que resulta ser cuadrado perfecto. Entonces: $10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots\ldots+10+1=k^2$ y como el primer miembro de esta igualdad es impar podemos afirmar que k también, esto es: $k=2t+1$

$$10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots\ldots+10+1=(2t+1)^2 \quad\to$$

$$10(10^{n-2}+10^{n-3}+\ldots\ldots+10+1)=4t(t+1)$$

$5(10^{n-2}+10^{n-3}+\ldots\ldots+10+1)=2t(t+1)$ lo que es absurdo, pues el primer miembro de la igualdad es impar y el segundo par.

En conclusión, en la sucesión de unos repetidos <u>no hay más cuadrados perfectos</u>

*Bien resuelto por: **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Marcos Monteagudo García** (IES-Uno Requena), **Manuel Amorós Juan** (IES Navarro Santafé. Villena), **Diego Alonso Domínguez** (IES Vaguada de la Palma. Salamanca), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Juan Manuel Sánchez H** (IES Claudio Moyano. Zamora), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid), **Mario Balda Agudo** (AMª Casa Madre. Granada) y **Osiris García Parras** (IES Nª Sª de la Victoria. Martiricos)*

Sénior

S-022. Armónicamente sinceros.

Sea la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ resultante de eliminar en la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ los términos en los que la representación decimal de n contenga algún cero.

La serie armónica ya sabemos que no es convergente, pero por sorprendente que parezca, está sí. Pruébalo.

Solución

Denominaremos S_p a la suma parcial de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ formada por los términos inversos de naturales con p cifras decimales. Vamos a acotar cada una de ellas:

$$S_1=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}\le 9\cdot 1=9\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^0$$

$$S_2=\left(\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{21}+\ldots+\frac{1}{29}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{91}+\ldots+\frac{1}{99}\right)\le\frac{9^2}{10}=9\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^1$$

$$\begin{aligned}S_3=&\left(\frac{1}{111}+\ldots+\frac{1}{119}\right)+\left(\frac{1}{121}+\ldots+\frac{1}{129}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{191}+\ldots+\frac{1}{199}\right)+\\&+\left(\frac{1}{211}+\ldots+\frac{1}{219}\right)+\left(\frac{1}{221}+\ldots+\frac{1}{229}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{291}+\ldots+\frac{1}{299}\right)+\\&+\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\&+\left(\frac{1}{911}+\ldots+\frac{1}{919}\right)+\left(\frac{1}{921}+\ldots+\frac{1}{929}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{991}+\ldots+\frac{1}{999}\right)\\&\le\frac{9^3}{100}=9\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2\end{aligned}$$

Y en general:

$$S_p = \left(\underbrace{\frac{1}{11\ldots1}}_{p \text{ veces}} + \ldots + \frac{1}{11\ldots9} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{99\ldots1} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{99\ldots9}}_{p \text{ veces}} \right) \le \frac{9^p}{10^{p-1}} = 9 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{p-1}$$

con $p = 1, 2, \ldots$

(El 9^p sale de tomar variaciones con repetición de 9 elementos tomados de p e p; el $1/10^{p-1}$ es cota superior de todos los elementos de S_p)

Así, pues, nuestra serie de términos positivos y cada vez más pequeños está acotada:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le 9 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{p-1} = 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 90$ y, por tanto, es convergente.

Bien resuelto por: ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES Josñe Saramago. Arganda del Rey),* ***Hugo Fernández Becerro*** *(La Salle. Santander).* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***Juan Manuel Sánchez H*** *(IES Claudio Moyano. Zamora),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid) y* ***Osiris García Parras*** *(IES Nuestra Señora de la Victoria. Martiricos)*

Se recibió también una solución una incorrecta.