Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Mayo – 2022

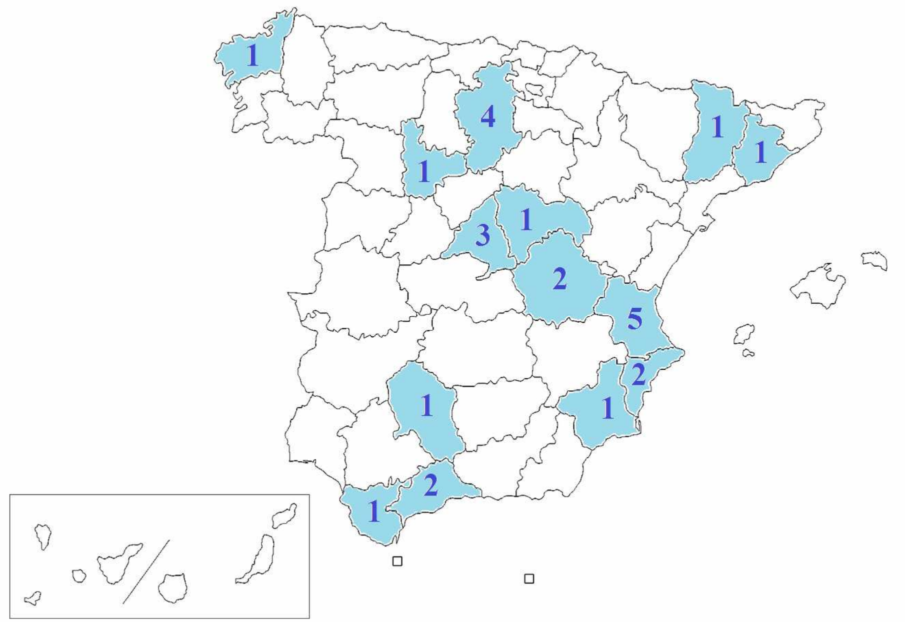
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
021	✓	✓	✓	✓	✓	✓
022	✓	✓	✓	✓	✓	✓
023	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

55 respuestas de 26 participantes (19 chicos / 07 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-023. Tablero iterativo.

Si descifras la pauta de movimientos que siguen los números del tablero sabrás responder a estas dos cuestiones:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

⇒

8	7	4
9	5	1
6	3	2

⇒

3	6	9
2	5	8
1	4	7

⇒ … …

a) ¿En qué iteración los números de cada fila, de izquierda a derecha, aparecerán en columna, de arriba abajo?

b) ¿En qué iteración se volverá a la misma posición de inicio?

Solución

En cada iteración los números de la periferia del tablero se mueven en sentido dextrógiro, como un caballo de ajedrez:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

⇒

8	7	4
9	5	1
6	3	2

⇒

3	6	9
2	5	8
1	4	7

⇒

4	1	2
7	5	3
8	9	6

⇒

9	8	7
6	5	4
3	2	1

⇒

2	3	6
1	5	9
4	7	8

⇒

7	4	1
8	5	2
9	6	3

⇒

6	9	8
3	5	7
2	1	4

⇒

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Así, como vemos, los números de las filas del tablero inicial aparecen en columna en la 6ª iteración y en la 8ª se vuelve a la situación inicial.

Bien resuelto por: ***Irene Navarro Espada*** *(CEIP Serrano Clavero. Requena),* ***Marta Carsi Sánchez*** *(IES Uno. Requena),* ***Aitana Navarro Vergillos*** *(IES Oleana. Requena),* ***Sergio Delgado Zaloña*** *(CEIP Río Arlanzón. Burgos),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Laura Nuévalos Lorente*** *(CEIP Princesa Sofía. Minglanilla),* ***Aitor Espada García*** *(CEIP Princesa Sofía. Minglanilla),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***Iván López Márquez*** *(C. Inmaculada. Alicante),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Vigo Navarro García*** *(CEIP Serrano Clavero. Requena),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(IES Arcebipo Xelmirez I. Santiago de Compostela),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid) y* ***Elisa Estévez Molina*** *(CI Mª Montesori. Málaga)*

Se recibió también una solución incompleta.

Infantil (1º/2º ESO)

I-023. Operación *redondopor*.

La curiosa operación ***redondopor*** con enteros no negativos, que se simboliza así $\otimes$, actúa de esta forma: $a \otimes b = (a-1) \otimes (b+1)$. Por ejemplo: $23 \otimes 32 = 22 \otimes 33$ ó bien $22 \otimes 21 = 21 \otimes 22$ caso, que como puedes ver, conmuta.

Busca todos los pares (a, b) de números naturales para los que conmuta.

Solución

Si, como en el ejemplo, a y b son consecutivos, se ve en un paso: $8 \otimes 7 = 7 \otimes 8$. Pero, si no, también. Por ejemplo:

$$2 \otimes 5 = 1 \otimes 6 = 0 \otimes 7$$

$$5 \otimes 2 = 4 \otimes 3 = 3 \otimes 4 = 2 \otimes 5 = 1 \otimes 6 = 0 \otimes 7$$

Conmuta siempre, como podemos ver aplicándola sucesivamente hasta que la primera componente sea nula:

$$a \otimes b = (a-1) \otimes (b+1) = (a-2) \otimes (b+2) = \ldots\ldots = 0 \otimes (a+b)$$

$$b \otimes a = (b-1) \otimes (a+1) = (b-2) \otimes (a+2) = \ldots\ldots = 0 \otimes (b+a)$$

Aunque podemos verlo antes. Nuestro ejemplo es muy ilustrativo.

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $a \geq b$:

$$a \otimes b = (a-1) \otimes (b+1) = (a-2) \otimes (b+2) = \ldots\ldots$$
$$= \ldots\ldots = [a-(a-b)] \otimes [b+(a-b)] = b \otimes a$$

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda) y **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid)*

Se recibieron también seis soluciones incompletas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-023. Suma de dos cuadrados.

Prueba que, en general: si un número entero se puede poner como suma de dos cuadrados, su doble también.

y, al contrario, que: si el doble de un número entero se puede poner como suma de dos cuadrados, entonces, el número también se puede poner como suma de dos cuadrados.

Solución

Si un número entero n es suma de cuadrados: $n = a^2 + b^2$, entonces:

$$\underline{2n} = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = \underline{(a+b)^2 + (a-b)^2}$$

Y al contrario, si $2n = c^2 + d^2$, entonces, con un artificio similar:

$$\underline{n} = \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} = \frac{c^2}{4} + \frac{2cd}{4} + \frac{d^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{2cd}{4} + \frac{d^2}{4} = \underline{\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2}$$

pues, como $2n = c^2 + d^2$, resulta que c y d tienen la misma paridad y, así, los números $\frac{c+d}{2}$ y $\frac{c-d}{2}$ son enteros

*Bien resuelto por: **Julio Cuenca Verdú** (IES Los Castillos. Alcorcón), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Manuel Vázquez Mourazos** (IES Arcebipo Xelmirez I. Santiago de Compostela) y **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y una incorrecta.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-023. Propiedad de los números combinatorios.

Demuestra que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$3^n + 1 = \binom{n}{0}2^{n+1} + \binom{n}{2}2^{n-1} + \binom{n}{4}2^{n-3} + \binom{n}{6} \cdot 2^{n-5} + \ldots$$

Solución:

Aplicando el binomio de Newton:

$$3^n = (2+1)^n = \binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} + \binom{n}{3}2^{n-3} + \binom{n}{4}2^{n-4} + \ldots$$

$$1 = (2-1)^n = \binom{n}{0}2^n - \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} - \binom{n}{3}2^{n-3} + \binom{n}{4}2^{n-4} + \ldots$$

y restando:

$$3^n + 1 = 2\left[\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{2}2^{n-2} + \binom{n}{4}2^{n-4} + \binom{n}{6} \cdot 2^{n-6} + \ldots\right]$$

Por lo que: $\underline{3^n+1=\binom{n}{0}2^{n+1}+\binom{n}{2}2^{n-1}+\binom{n}{4}2^{n-3}+\binom{n}{6}\cdot 2^{n-5}+\dots}$

*Bien resuelto por: **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Nicolás Uzquiza López** (IES La Bureba. Briviesca), **Manuel Vázquez Mourazos** (IES Arcebipo Xelmirez I. Santiago de Compostela) y **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid)*

Júnior

Jn-023. Tres raíces.

Dado el polinomio $p(x)=x^3+Bx^2+Cx+D$, probar que si una raíz es la media geométrica de las otras dos, entonces $B^3D=C^3$

Solución.

Llamemos r, s y t a las tres raíces.

El polinomio lo podemos escribir así: $p(x)=(x-r)(x-s)(x-t)$.

Si operamos: $p(x)=x^3-(r+s+t)x^2+(rs+st+tr)x-rst$ e igualamos los coeficientes, obtenemos las conocidas **Relaciones de Cardano-Vieta**:

$$r+s+t=-B \qquad rs+st+tr=C \qquad rst=-D$$

Y como $r=\sqrt{s\cdot t} \rightarrow r^2=s\cdot t$, quedan así:

$$\begin{cases} C=rs+r^2+tr=r(s+r+t)=-rB \\ -D=rst=r^3 \end{cases}$$

Finalmente, elevando al cubo esta primera expresión conseguimos lo pedido:

$$\underline{C^3}=(-rB)^3=-r^3B^3=\underline{B^3D}$$

*Bien resuelto por: **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Antonio Recuero Buleje** (IES Miguel Catalan. Coslada), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Miguel Puelma Martínez** (INS. La Ferrería. Motcada i Reixac), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Julio J. Zarate Pinto** (IES La Bureba. Briviesca), **Manuel Vázquez Mourazos** (IES Arcebipo Xelmirez I. Santiago de Compostela) y **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid)*

Sénior

S-023. Más menos más menos.

Sea $P(x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\dots+(-1)^na_n$, con $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n\in\Re^+$, un polinomio cuyas n raíces son reales. Demuestra que:

a) $n\le\sqrt{\dfrac{a_1a_{n-1}}{a_0a_n}}$ b) $n^n\le\min\left(\dfrac{a_{n-1}^n}{a_0a_n^{n-1}},\dfrac{a_1^n}{a_0^{n-1}a_n}\right)$

Solución

Sean $r_1,r_2,\dots,r_n$ las raíces del polinomio y, por la **Regla de los Signos de Descartes** (n cambios de signos entre coeficientes consecutivos), sabemos que son positivas. Teniendo en cuenta las **Relaciones de Cardano-Vieta**, sus medias armónica, geométrica y aritmética son:

$$M_H=\frac{n}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\dots+\frac{1}{r_n}}=\frac{nr_1r_2\dots r_n}{r_2r_3\dots r_n+r_1r_3\dots r_n+\dots+r_1r_2\dots r_{n-1}}=\frac{\frac{na_n}{a_0}}{\frac{a_{n-1}}{a_0}}=\frac{na_n}{a_{n-1}}$$

$$M_G=\sqrt[n]{r_1r_2\dots r_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} \qquad M_A=\frac{r_1+r_2+\dots+r_n}{n}=\frac{\frac{a_1}{a_0}}{n}=\frac{a_1}{na_0}$$

La desigualdad entre las medias establece que $M_H\le M_G\le M_A$, por lo que:

a) $M_H\le M_A \rightarrow \dfrac{na_n}{a_{n-1}}\le\dfrac{a_n}{na_0} \rightarrow n^2\le\dfrac{a_1a_{n-1}}{a_0a_n} \rightarrow \underline{n\le\sqrt{\dfrac{a_1a_{n-1}}{a_0a_n}}}$ *q.e.d.*

b) $M_H\le M_G \rightarrow \dfrac{na_n}{a_{n-1}}\le\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_0}} \rightarrow \dfrac{n^na_n^n}{a_{n-1}^n}\le\dfrac{a_n}{a_0} \rightarrow n^n\le\dfrac{a_{n-1}^n}{a_0a_n^{n-1}}$

$M_G\le M_A \rightarrow \sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_0}}\le\dfrac{a_1}{na_0} \rightarrow \dfrac{a_n}{a_0}\le\dfrac{a_1^n}{n^na_0^n} \rightarrow n^n\le\dfrac{a_1^n}{a_0^{n-1}a_n}$

Y combinando ambas desigualdades: $\underline{n^n\le\min\left(\dfrac{a_{n-1}^n}{a_0a_n^{n-1}},\dfrac{a_1^n}{a_0^{n-1}a_n}\right)}$ *q.e.d.*

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Clemente Sacristán Moreno** (Guadalajara) y **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid)*