Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Junio – 2022

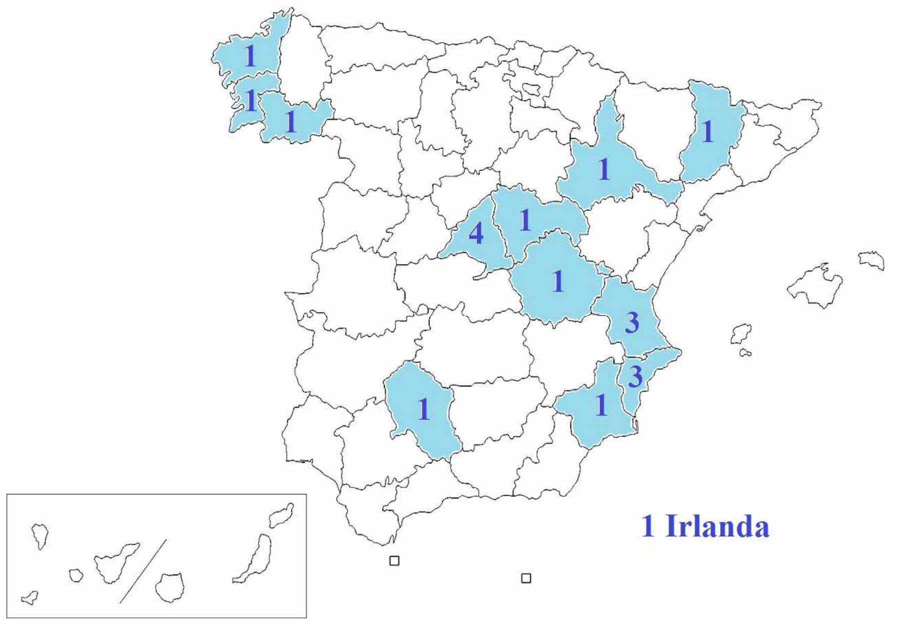
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
022	✓	✓	✓	✓	✓	✓
023	✓	✓	✓	✓	✓	✓
024	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

50 respuestas de 20 participantes (17 chicos / 3 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-024. Doblando esquinas.

Tal y como te mostramos en las figuras, toma un folio cualquiera *(Fig-1)*, dobla hacia abajo la esquina superior derecha *(Fig-2)* y, a continuación, dobla también la esquina inferior derecha alineando los bordes de ambos pliegues *(Fig-3)*.

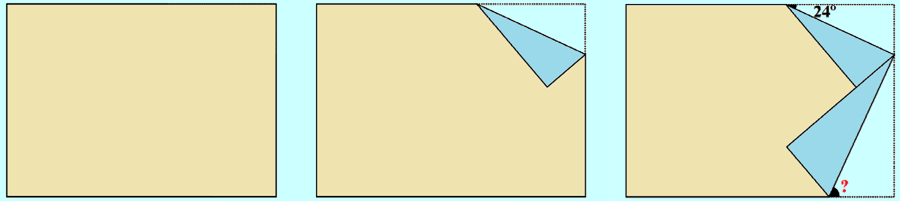
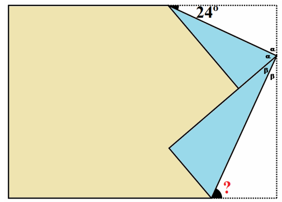


Fig-1 *Fig-2* *Fig-3*

Si el primer pliegue forma un ángulo de $24°$ con el borde superior del folio, ¿qué ángulo formará el segundo pliegue con el borde inferior del folio?

Solución



Cada pliegue deja un triángulo rectángulo como hueco igual al triángulo de papel que desplaza. Y ambos pliegues forman un ángulo recto, pues, en el punto en el que confluyen se ha bisecado el ángulo llano del lateral derecho donde se sitúa.

$$2\alpha + 2\beta = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha + \beta = 90°$$

Luego el ángulo pedido será: $\underline{?} = \alpha = 90° - \beta = 90° - 24° = \underline{66°}$

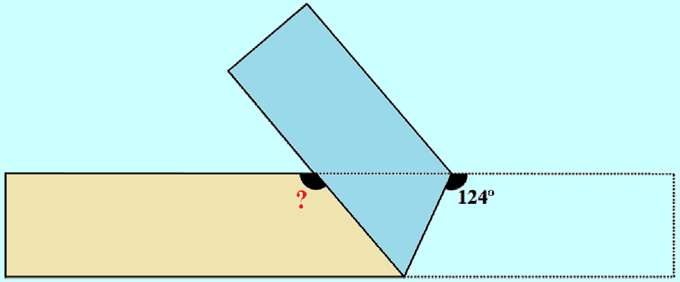
*Bien resuelto por: **Adrián Díaz Sánchez** (CEIP Tierno Galván. San Sebastián de los Reyes), **Cristina González Marrero** (IBM. Dublín), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **Javier Rodríguez Seijas** (IES Sanxenxo), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Lorena Badesa Pérez** (C. Santa Ana. Calatayud), **Manuel Vázquez Mourazos** (IES Arcebispo Xelmirez I. Santiago de Compostela) y **Guillermo Vicente Haya** (Colegio El Armelar. Paterna)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Infantil (1º/2º ESO)

I-024. Doblando la tira.

Doblamos una tira de papel 124º tal y como muestra la figura. ¿Qué medirá el ángulo señalado con el interrogante que se forma tras efectuar el pliegue?

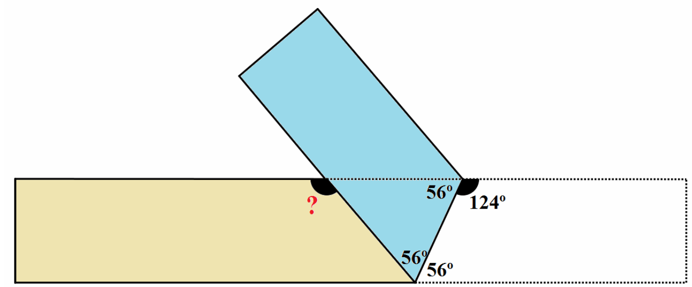


Solución

El triángulo que se forma con doble capa de papel es isósceles:

Del cuadrilátero punteado conocemos tres ángulos: 124º, 90º y 90º. Luego el que falta para sumar los 360º medirá **56º**. Y este ángulo, al hacer el pliegue, se replica en dicho el triángulo.

Y otro ángulo es el suplementario de 124º, esto es, también **56º**.



Luego, el ángulo pedido es la suma de estos dos: $56º+56º=\underline{112º}$ o, si lo prefieres, el suplementario del que falta para obtener el tercer ángulo del triángulo.

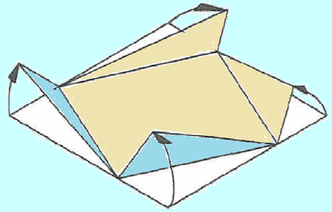
Bien resuelto por: ***Adrián Díaz Sánchez*** *(CEIP Tierno Galván. San Sebastián de los Reyes),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Ourense),* ***Iván López Márquez*** *(C. Inmaculada. Alicante),* ***Javier Rodríguez Seijas*** *(IES Sanxenxo),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Elena Boix Miralles*** *(IES La Foia. Elche),* ***Isaac Dawson Marco*** *(IES Enric Soler i Godes. Benifaió),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(IES Arcebispo Xelmirez I. Santiago de Compostela) y* ***Marc Lidon Duart*** *(IES Enric Soler i Godes. Benifaió)*

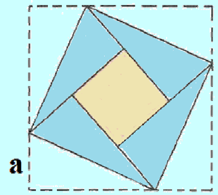
Se recibieron también dos soluciones incorrectas

Cadete (3º/4º ESO)

C-0C-024. Doblando esquinas-II.

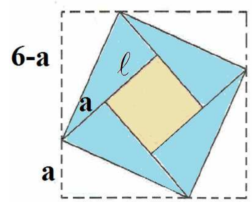
Dispones de una hojita de papel cuadrada de lado **6** u.d.l. y, como se indica en las figuras, has de doblar sus esquinas de tal modo que el cuadradito que quede a la vista en el centro tenga por área la séptima parte del área de la hojita de partida. Determina el valor de la medida **a** que te permita hacer tales dobleces?





Solución

Llamando ℓ al lado del cuadradito y analizando el plegado hecho, vemos:



por un lado que $\ell^2=\dfrac{6^2}{7} \rightarrow \ell=\dfrac{6}{\sqrt{7}}=\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$

y, por otro: $\ell+a=6-a \rightarrow a=\dfrac{6-\ell}{2}$

Con todo: $a=\dfrac{1}{2}\left(6-\dfrac{6\sqrt{7}}{7}\right)=3\left(1-\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)=\dfrac{3}{7}\left(7-\sqrt{7}\right) \rightarrow \underline{a\cong 1'866}$

Bien resuelto por: ***José Luis Marín Albea*** *(Escuela de Pensamiento Matemático Miguel de Guzmán. Torrelodones),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba) y* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(IES Arcebispo Xelmirez I. Santiago de Compostela)*

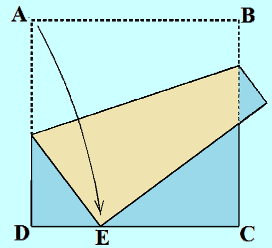
Se recibieron también una solucion incompleta y otra incorrecta

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

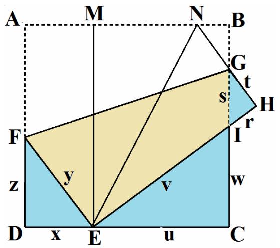
Jv-024. Lo haga como lo haga.

Un cuadrado de papel **ABCD** se dobla de modo que el vértice **A** toque en un punto arbitrario **E** del lado **CD**. Así, se obtienen tres triángulos rectángulos formados por una sola capa de papel.

Demuestra que el perímetro del triángulo mayor es la suma de los perímetros de los otros dos triangulos unicapa menores y que vale la mitad que el perímetro del cuadrado inicial.



Solución-1



Efectivamente, se trata de uno de los **Teoremas** papirofléctivos **de Haga** (Kazuo Haga. Universidad de Tsukuba. Japón)

Sin pérdida de generalidad, tomamos la longitud del lado del cuadrado como unidad. Denominamos, con letras mayúsculas, los puntos característicos que produce el plegado y, con minúsculas, los lados de los triángulos.

Obtenemos **M** y **N** como se indica en la figura.

Por la simetría del plegado **FG**, los triángulos rectángulos **IHG** y **NBG** son iguales:

$$r = HI = BN\ ,\ s = GI = GN \text{ y } t = GH = BG$$

Los triángulos rectángulos **EMN** y **EHN** también son iguales, pues tienen la diagonal en común y un lado de igual longitud **EM = EH = 1. Luego:**

$$MN = HN = GH + GN = BG + GI = BI = t + s$$

Así, los perímetros de los triángulos unicapas resultan ser:

$$P_{EDF} = ED + DF + FE = x + DF + FA = x + 1$$

$$P_{IHG} = IH + HG + GI = BN + HG + GN = BN + HN = BN + MN = BM = CE = 1 - x$$

$$P_{ECI} = EC + CI + IE = BM + 1 - BI + 1 - IH = BM + 2 - MN - NB = 2$$

En conclusión: $P_{EDF} + P_{IHG} = (x+1)+(1-x) = 2 = P_{ECI}$ y, como $P_{ABCD} = 4$, tenemos lo pedido: $\underline{P_{EDF} + P_{IHG} = P_{ECI}}$ y $\underline{P_{ECI} = P_{ABCD}/2}$

Solución-2: Calculando los lados de todos los triágulos unicapa en función de x

- En el triángulo **EDF**: $\left.\begin{array}{r} x^2+z^2=y^2 \\ z+y=1 \end{array}\right\}$ y resolviendo:

$$DE = x \qquad EF = y = \frac{1}{2}(1+x^2) \qquad FD = z = \sqrt{y^2-x^2} = \frac{1}{2}(1-x^2)$$

  cuyo perímetro es, obviamente, $\underline{P_{EDF} = x+1}$

- Los triángulos rectángulos de una capa de papel son semejantes, pues, por un lado, $\angle FED$ y $\angle IEC$ son complementarios y, por otro, $\angle EIC = \angle GIH$

  Así, por semejanza de los triángulos **EDF** y **ECI**.

$$\frac{x}{z} = \frac{w}{u} \quad \rightarrow \quad w = \frac{x.u}{z} = \frac{x(1-x)}{z}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{v}{u} \quad \rightarrow \quad v = \frac{y.u}{z} = \frac{y(1-x)}{z}$$

  Luego, los lados del triángulo **ECI** son:

$$EC = u = 1-x \qquad EI = v = \frac{1+x^2}{1+x} \qquad CI = w = \frac{2x}{1+x}$$

  y su perímetro $\underline{P_{ECI}} = u+v+w = \frac{1-x^2}{1+x} + \frac{1+x^2}{1+x} + \frac{2x}{1+x} = \underline{2}$

- Finalmente, por semejanza de los triángulos **ECI** y **IHG**.

$$\frac{w}{v} = \frac{r}{s} \quad \rightarrow \quad s = \frac{v.r}{w} = \frac{v(1-v)}{w}$$

  Los lados del triángulo **IHG** son:

$$IH = r = 1-v = \frac{x(1-x)}{1+x} \qquad IG = s = \frac{(1+x^2)(1-x)}{2(1+x)} \qquad GH = t = 1-w-s = \frac{(1-x)^2}{2}$$

  y su perímetro $\underline{P_{IHG}} = r+s+t = \frac{2x(1-x)}{2(1+x)} + \frac{(1+x^2)(1-x)}{2(1+x)} + \frac{(1-x)^2(1+x)}{2(1+x)} =$

$$= \frac{(1-x)\left[2x+(1+x^2)+(1-x^2)\right]}{2(1+x)} = \frac{(1-x)[2x+2]}{2(1+x)} = \underline{1-x}$$

Quedando probado lo que se pedía: $\underline{P_{EDF} + P_{IHG}} = (x+1)+(1-x) = 2 = \underline{P_{ECI}}$ y que $\underline{P_{ECI} = 2}$, la mitad del perímetro del cuadrado.

<u>Nota</u> El triángulo **ECI** siempre es el de mayor área. Podemos justificarlo:

<u>Analíticamente</u>

Como $0 \le x \le 1 \quad \rightarrow \quad 1 \le 1+x \le 2 \quad \rightarrow$

$(1+x)^2 \le 4 \quad \rightarrow \quad 4-(1+x)^2 \ge 0$

$$2S_{ECI} - 2S_{EDF} = \frac{2x(1-x)}{1+x} - \frac{x(1-x^2)}{2} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}\left[4-(1+x)^2\right] \ge 0$$

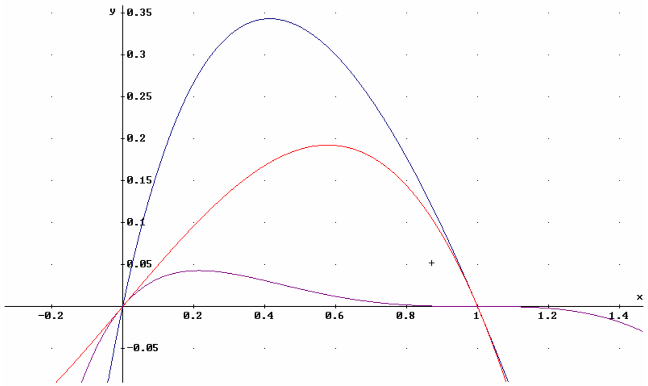
Como $0 \le x \le 1 \quad \rightarrow \quad 0 \le 1-x \le 1$

$$2S_{EDF} - 2S_{IHG} = \frac{x(1-x^2)}{2} - \frac{x(1-x)^3}{2(1+x)} =$$

$$= \frac{x(1-x)}{2(1+x)}\left[(1+x)^2-(1-x)^2\right] = \frac{2x^2(1-x)}{1+x} \ge 0$$

Luego: $\underline{S_{ECI} \ge S_{EDF} \ge S_{IHG}}$

<u>O gráficamente</u>



$$y = 2S_{ECI} = \frac{2x(1-x)}{1+x}$$

$$y = 2S_{EDF} = \frac{x(1-x^2)}{2}$$

$$y = 2S_{IHG} = \frac{x(1-x)^3}{2(1+x)}$$

*Bien resuelto por: **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba) y **Manuel Vázquez Mourazos** (IES Arcebispo Xelmírez I. Santiago de Compostela)*

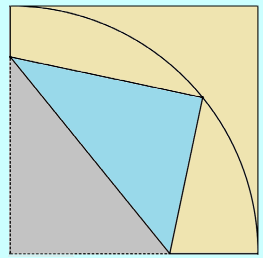
También se recibieron una solución incompleta y otra incorrecta

Jn-024. Pliegue sobre un arco.

En un cuadrado de papel de lado uno, se traza un cuarto de círculo de centro uno de los vértices y radio también uno.

Doblamos el papel de modo que el centro del círculo caiga sobre el arco de círculo trazado antes.

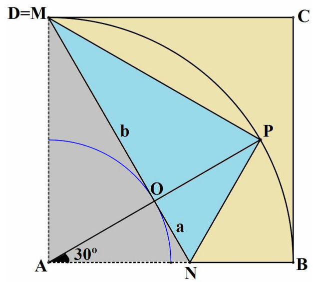
Hallar la mayor y la menor área de la zona plegada *(en gris en la figura)*.

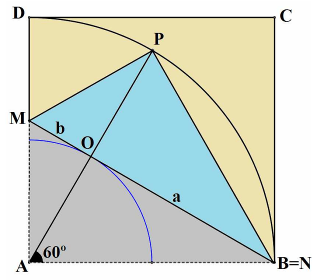


<u>Solución</u>

Por simetría respecto de la mediatriz de AP, estudiemos el triángulo rectángulo engrisecido MAN.

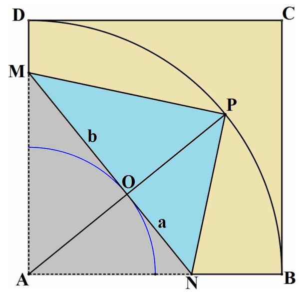
Para que M y N estén en los lados derecho y bajo, respectivamente, del cuadrado de papel es preciso: $30° \le \angle PAB \le 60°$ como se ve en estos dos casos extremos:





Como la altura OA vale $0'5$ para cualquier posición de P, el área será máxima o mínima cuando lo sea la hipotenusa $MN = a + b$ y por el **teorema de la altura** $OA^2 = a \cdot b \quad \rightarrow \quad a \cdot b = 0'25$

MN es mínima cuando $\underline{a = b = 0'5 \Rightarrow MN = 1}$ y, por tanto, $\underline{[AMN]_{mín} = 0'25}$



MN es máxima cuando uno de los catetos vale 1, lo que ocurre en los dos casos extremos dibujados arriba. Así, el otro cateto, el menor, vale $1/\sqrt{3}$ y la hipotenusa el doble, $\underline{MN = 2/\sqrt{3}}$, datos fáciles de deducir por ser AMN una escuadra, esto es, un triángulo rectángulo con ángulos $30°:60°:90°$ y lados en proporción $1:\sqrt{3}:2$. Y, análogamente, por ser también OAN y OAM escuadras: a y b valen, en un caso u otro, $\sqrt{3}/2$ y $1/(2\sqrt{3})$.

En cualquier caso, bien por un lado: $[AMN]=\frac{1}{2}\cdot AN\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$, o bien

por el otro: $[AMN]=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Así,

en definitiva: $\underline{[AMN]_{máx}=\sqrt{3}/6}$

Bien resuelto por: ***Jordi Agustí Abella*** *(Centro de Formación de Adultos. La Seu de Urgell),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba) y* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(IES Arcebispo Xelmirez I. Santiago de Compostela)*

Se recibió también una solucion incompleta

S-024. Pliegue clásico.

Se dobla un folio DIN-A4 de manera que, como muestra la figura, el vértice inferior izquierda toque el borde superior. Determina la longitud mínima del pliegue y el ángulo que forma dicho pliegue con el borde inferior del folio.

Fig-1

→

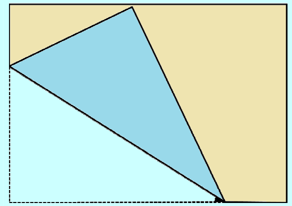
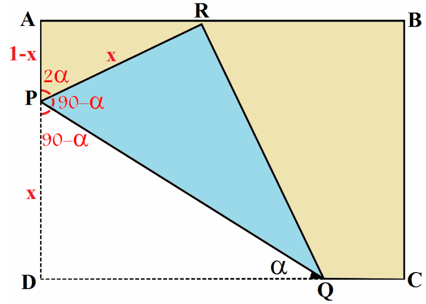


Fig-2

Solución

Representemos la situación, tal y como muestra la figura, señalando los vértices del folio que, al ser de formato DIN-A, sin perdida de generalidad, podemos suponer de dimensiones $1\times\sqrt{2}$, los puntos notables del plegado y el ángulo solicitado:



Hemos de minimizar: $y=PQ=\frac{x}{\sin\alpha}$

Y tenemos la relación que une ambos parámetros, x y α:

$$\cos 2\alpha=\frac{1-x}{x}\quad\rightarrow\quad\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-x}{x}\quad\rightarrow\quad\sin^2\alpha=\frac{2x-1}{2x}$$

Así: $y=PQ=\frac{x}{\sin\alpha}=x\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}=\sqrt{\frac{2x^3}{2x-1}}$ con campo de existencia, en nuestro caso, solo para $x>1/2\;\rightarrow\;y^2=PQ^2=\frac{x^2}{\sin^2\alpha}=\frac{2x^3}{2x-1}$

Derivando: $2yy'=\frac{6x^2(2x-1)-2\cdot 2x^3}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2(4x-3)}{(2x-1)^2}$

Para $x>3/4$, $y'>0$, por tanto, y creciente. Y para $x<3/4$, $y'<0$, por tanto, y decreciente. En consecuencia, para $\underline{x=3/4}$ el pliegue será mínimo

Vemos que no es preciso que el folio rectangular sea un DIN-A, basta con que su anchura permita que el pliegue una los lados inferior y superior al llevar el vértice inferior izquierdo al borde superior.

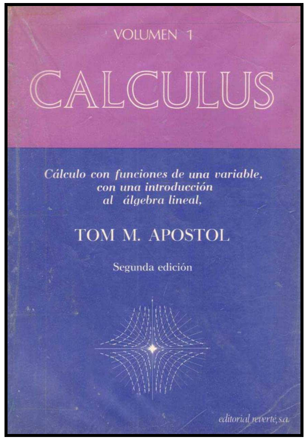
No obstante, en tal caso, $\sin^2\alpha = \frac{1}{3} \quad \to \quad \alpha \approx 35{,}264389\ldots \approx 35^\circ\ 15'\ 51.80''$

y la longitud del pliegue $\underline{PQ = \frac{3}{4}\sqrt{3}}$ y, de aquí, $DQ = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

Y si concretamente es DIN-A4, de dimensiones $21 \times 21 \cdot \sqrt{2} \cong 21 \times 29'7$:

$x = PD = \frac{3}{4} \cdot 21 = 15'75$, $DQ = \frac{3}{4} \cdot 21\sqrt{2} \cong 22'27$ y $\underline{PQ = \frac{3}{4} \cdot 21\sqrt{3} \cong 27'28}$

Nota.- *La versión original de este problema está en el clásico **Calculus Volume 1** del profesor estadounidense de origen griego **Tom M. Apostol**, fallecido hace seis años, y que sirvió para que muchos profesores nos acercáramos a la **Papiromatemática**.*



https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apostol/pictdisplay/

https://www.freelibros.me/matematicas/calculus-volumen-i-2da-edicion-tom-m-apostol

*Bien resuelto por: **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES José Saramago. Arganda del Rey), **Jordi Agustí Abella** (Centro de Formación de Adultos. La Seu de Urgell), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Clemente Sacristán Moreno** (Guadalajara) y **Manuel Vázquez Mourazos** (IES Arcebispo Xelmirez I. Santiago de Compostela)*

Se recibieron también una solución incorrecta

■