Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Septiembre – 2022

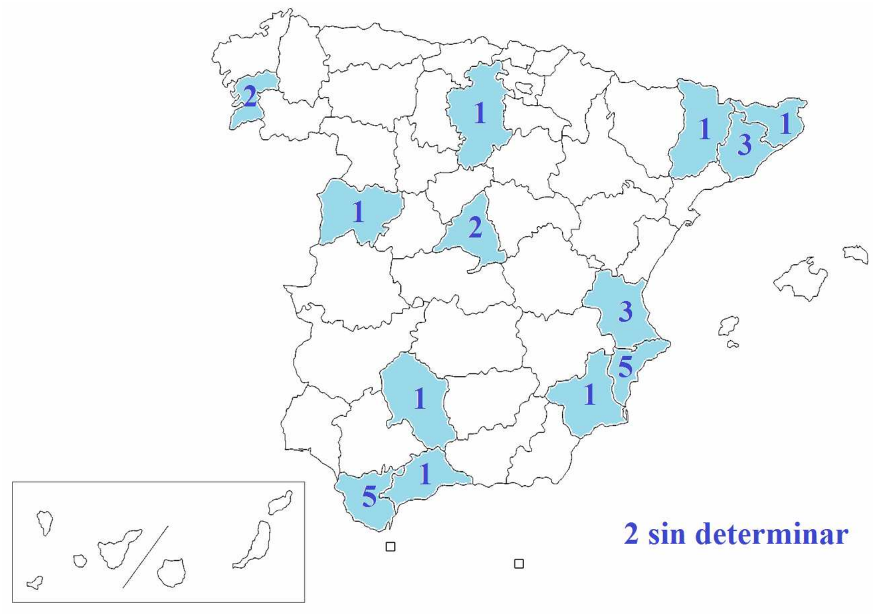
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
024	✓	✓	✓	✓	✓	✓
025	✓	✓	✓	✓	✓	✓
026	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

50 respuestas de 29 participantes (22 chicos / 07 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-026. MCM permutando exponentes.

Obtén el mínimo común múltiplo de estos tres enormes números en potencias de 6, de 10 y de 15 (tiene que haber de las tres y solo de esas tres):

$$a = 6^9 \cdot 10^3 \cdot 15^3,\ b = 6^3 \cdot 10^9 \cdot 15^3 \text{ y } c = 6^3 \cdot 10^3 \cdot 15^9$$

Solución

En primer lugar, descompondremos debidamente cada número en factores primos:

$$a = 6^9 \cdot 10^3 \cdot 15^3 = (2\cdot 3)^9 \cdot (2\cdot 5)^3 \cdot (3\cdot 5)^3 = 2^{12}\cdot 3^{12}\cdot 5^6$$

$$b = 6^3 \cdot 10^9 \cdot 15^3 = (2\cdot 3)^3 \cdot (2\cdot 5)^9 \cdot (3\cdot 5)^3 = 2^{12}\cdot 3^{6}\cdot 5^{12}$$

$$c = 6^3 \cdot 10^3 \cdot 15^6 = (2\cdot 3)^3 \cdot (2\cdot 5)^3 \cdot (3\cdot 5)^9 = 2^{6}\cdot 3^{12}\cdot 5^{12}$$

Luego $\mathrm{mcm}(a,b,c) = 2^{12}\cdot 3^{12}\cdot 5^{12}$ y pasándolo a potencias de 6, de 10 y de 15, y solo de 6, de 10 y de 15, nos queda:

$$\underline{\mathrm{mcm}(a,b,c) = 2^6\cdot 2^6\cdot 3^6\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 5^6 = (2\cdot 3)^6\cdot(2\cdot 5)^6\cdot(3\cdot 5)^6 = 6^6\cdot 10^6\cdot 15^6}$$

lejos de lo, en principio esperado, $6^9\cdot 10^9\cdot 15^9$, si no se entendió bien lo de esa cantinela de los *factores comunes y no comunes con mayor exponente.*

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES Antonio Sequeros. Almoradí), **Javier Rodríguez Seijas** (IES Sanxenxo) y **Elena Boix Miralles** (IES La Foia. Elche)*

Se recibieron también seis soluciones incorrectas.

Infantil (1º/2º ESO)

I-026. Consecutivos muy peculiares.

¿Cuál es el máximo de número de naturales consecutivos de tres cifras con sus decenas diferentes de 9 que puedes elegir de forma que no haya ninguno cuya suma de sus cifras sea divisible por 11? Pon algún ejemplo y justifica debidamente que ese número no puede ser mayor.

Solución

Números naturales consecutivos en los que la suma de sus cifras no sea nunca divisible por 11 vemos, por ejemplo, que puede haber:

- 100, 101, 102, …, 117 y 118 — en total, 19
- 120, 121, 122, …, 126 y 127 — ahora, solo 8
- 129, 130, 131, …, 135 y 136 — también 8 solo

- $471, 472, 473, \ldots, 488$ y 489 también 19 *(las decenas no pueden ser 9)*
- $561, 562, 563, \ldots, 587$ y 588 y ahora 28
- $741, 742, 743, \ldots, 767$ y 768 también 28

Probemos que <u>28 es el máximo</u>, que si elegimos 29 números naturales consecutivos cualesquiera, siempre habrá uno cuyas suma de sus cifras sea múltiplo de 11:

Entre esos 29 números siempre habrá 20 con $b < 9$ de la forma:

$$\overline{ab0}, \overline{ab1}, \overline{ab2}, \ldots, \overline{ab9}, \overline{a(b+1)0}, \overline{a(b+1)1}, \overline{a(b+1)2}, \ldots, \overline{a(b+1)9}$$

y la suma de sus cifras será: $a+b$, $a+b+1$, $a+b+2$, $\ldots$, $a+b+9$, $a+(b+1)$, $a+(b+1)+1$, $a+(b+1)+2$, $\ldots$, $a+(b+1)+9$ que, como vemos, abarca 11 valores consecutivos: $a+b$, $a+b+1$, $a+b+2$, $\ldots$, $a+b+10$. Luego, al menos uno de ellos será seguro divisible por 11.

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES Antonio Sequeros. Almoradí), **Javier Rodríguez Seijas** (IES Sanxenxo) y **Javier Rodríguez Seijas** (E3-IES Sanxenxo)*

Cadete (3º/4º ESO)

C-026. ¿Sumas de nueves?

Si el número entero $M = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots99}_{1110\text{ cifras}}$, sin hacer la operación, ¿puedes hallar la suma exacta de todas las cifras de M?

<u>Solución</u>

$$M = 9 + 99 + 999 + \ldots\ldots\ldots + \underbrace{999\ldots99}_{1110\text{ cifras}} =$$

$$= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \ldots\ldots\ldots + (10^{1110}-1) =$$

$$= 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots\ldots + 10^{1110} - 1110 = \underbrace{111\ldots11}_{1107\text{ cifras}}0000$$

Por tanto, la suma exacta de la cifras de M es <u>1107</u>.

*Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Ariadna Franch Pérez** (IES Lluis Simarro. Xátiva), **Julia Quijada Parras** (IES Jaume Balmes. Barcelona), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Javier Ruiz de Larriva** (Centro Inglés. Pto Sta María) y **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES A. Sequeros. Almoradí)*

Se recibieron también una solución incompleta y dos incorrectas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-026. Descomposición prima.

Halla todos los números primos p que pueden expresarse como suma de dos números primos y, a la vez, como resta de dos números primos.

<u>Solución:</u>

El 2 no puede escribirse como suma de números primos, por lo que el primo p que buscamos ha de ser impar.

Como todos los primos son impares menos el 2, para que la suma, o la resta, de dos primos sea impar es necesario que uno de los primos que se suma, o se resta, sea precisamente el 2 *(par+impar=impar)*, esto es: $p = q + 2 = r - 2$, con q y r primos.

Así, $q = p - 2$, p y $r = p + 2$, además de primos, son tres números impares consecutivos. Y, entre tres impares consecutivos, uno de ellos siempre ha de ser múltiplo de 3

Fácil de ver: Sean $2n+1$, $2n+3$ y $2n+5$ los tres impares consecutivos.

Si $n = 3k$, entonces es múltiplo de 3 el segundo: $2n+3 = 6k+3 = \dot{3}$

Si $n = 3k+1$, entonces es múltiplo de 3 el primero: $2n+1 = 6k+3 = \dot{3}$

Si $n = 3k-1$, entonces es múltiplo de 3 el tercero: $2n+5 = 6k+3 = \dot{3}$

En nuestro caso, al ser además primos, necesariamente el menor será $q = p - 2 = 3$. Y entonces: $p = 5$ y $r = p + 2 = 7$.

Luego, el único número primo que se puede descomponer como suma de dos primos y resta de dos primos es $\underline{p = 5}$ $(5 = 2 + 3 = 7 - 2)$

*Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: **Carlos Ragel Castilla** (The English Center. Puerto de Santa María), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Ariadna Franch Pérez** (IES Lluis Simarro. Xátiva), **Adriá Armengol Artigas** (B2-IES J. Balmes. Barcelona), **Marcos Monteagudo García** (IES-Uno Requena), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES Antonio Sequeros. Almoradí), **Jaime Domínguez Ávila** (Centro Inglés. Pto Sta María) y **Nicolás Uzquiza López** (IES La Bureba. Briviesca)*

Júnior

Jn-026. Quinientos cinco mil.

Sea S_n la suma de los n primeros términos de una **progresión aritmética** de primer término 1. Si sabemos que $S_1 + S_2 + \ldots + S_{100} = 505000$, ¿cuánto vale la diferencia d de la progresión?

Solución:

Por ser progresión aritmética, tenemos que: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 1 + (n-1)\cdot d$ y

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{[2+(n-1)\cdot d]\cdot n}{2} = \frac{(2-d)\cdot n + d\cdot n^2}{2}$$

Conociendo la suma de los n primeros naturales y la de sus cuadrados:

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{(n+1)\cdot n}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

tenemos que:

$$505000 = \sum_{r=1}^{100} S_n = \frac{1}{2}\cdot\left[(2-d)\sum_{r=1}^{100} r + d\sum_{r=1}^{100} r^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[(2-d)\cdot\frac{101\cdot 100}{2} + d\cdot\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[(2-d)\cdot 5050 + 338350\cdot d] = 5050 + 166650\cdot d$$

Y, resolviendo la ecuación: $505000 = 5050 + 166650\cdot d \quad \to \quad \underline{d=3}$

Bien resuelto por: ***Ariadna Franch Pérez*** *(IES Lluis Simarro. Xátiva),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES Antonio Sequeros. Almoradí),* ***Ana Mascato García*** *(IES do Sanxenxo),* ***Juan Manuel Sánchez Hernández*** *(IESO Las Batuecas. La Alberca),* ***Jordi Agustí Abella*** *(La Seu de Urgell) y* ***Nicolás Uzquiza López*** *(IES La Bureba. Briviesca)*

Se recibieronó también dos soluciones incorrectas

Sénior

S-026 Peculiares cuadrados de seis cifras.

Halla todos los cuadrados de seis cifras de forma que el número formado por sus tres últimas cifras sea una unidad mayor que el que forman las tres primeras.

Solución

Buscamos números de la forma $\overline{ABC(ABC+1)} = n^2$.

Ahora bien, para que estos números cuadrados tengan seis cifras, esto es, $100000 \le n^2 \le 999999$, debe verificarse que: $317 \le n \le 999$

Sea $x = \overline{ABC}$, entonces: $n^2 = 1001\cdot x + 1 \quad \to$

$$n^2 - 1 = 1001\cdot x \quad \to \quad (n-1)(n+1) = 1001\cdot x = 7\cdot 11\cdot 13\cdot x$$

Considerando $x = a\cdot b$ (donde a y b son dos enteros desconocidos) tenemos seis casos posibles a tratar:

1) $n-1 = 143\cdot a$ y $n+1 = 7\cdot b$

$$7\cdot b - 143\cdot a = 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} 7\cdot 41 - 143\cdot 2 = 1 \\ a = 7\cdot t + 4 \text{ y } b = 143\cdot t + 82 \end{array}\right.$$

Así: $n = 143\cdot a + 1 = 1001\cdot t + 573$ que nos vale sólo para $t=0$

$$n = 1001\cdot 0 + 573 = 573 \quad \to \quad n^2 = 573^2 = \underline{328329}$$

2) $n-1 = 7\cdot b$ y $n+1 = 143\cdot a$

$$143\cdot a - 7\cdot b = 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} 143\cdot(-2) - 7\cdot(-41) = 1 \\ a = 7\cdot t - 4 \text{ y } b = 143\cdot t - 82 \end{array}\right.$$

Así: $n = 7\cdot b + 1 = 1001\cdot t - 573$ que nos vale sólo para $t=1$

$$n = 1001\cdot 1 - 573 = 428 \quad \to \quad n^2 = 428^2 = \underline{183184}$$

3) $n-1 = 91\cdot a$ y $n+1 = 11\cdot b$

$$11\cdot b - 91\cdot a = 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} 11\cdot 25 - 91\cdot 3 = 2 \\ a = 11\cdot t + 3 \text{ y } b = 91\cdot t + 25 \end{array}\right.$$

Así: $n = 91\cdot a + 1 = 1001\cdot t + 274$ que nos vale sólo para $t=0$

$n = 1001\cdot 0 + 274 = 274 \quad \to \quad n^2$ no tiene seis cifras

4) $n-1 = 11\cdot b$ y $n+1 = 91\cdot a$

$$91\cdot a - 11\cdot b = 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} 91\cdot(-3) - 11\cdot(-25) = 2 \\ a = 11\cdot t - 3 \text{ y } b = 91\cdot t - 25 \end{array}\right.$$

Así: $n = 11\cdot b + 1 = 1001\cdot t - 274$ que nos vale sólo para $t=1$

$$n = 1001\cdot 1 - 274 = 727 \quad \to \quad n^2 = 727^2 = \underline{528529}$$

5) $n-1 = 77\cdot a$ y $n+1 = 13\cdot b$

$$13\cdot b - 77\cdot a = 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} 13\cdot 6 - 77\cdot 1 = 1 \\ a = 13\cdot t + 2 \text{ y } b = 77\cdot t + 12 \end{array}\right.$$

Así: $n = 77\cdot a + 1 = 1001\cdot t + 155$ que nos vale sólo para $t=0$

$n = 1001\cdot 0 + 155 = 155 \quad \to \quad n^2$ no tiene seis cifras

6) $n-1=13\cdot b$ y $n+1=77\cdot a$

$$77\cdot a-13\cdot b=2 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} 77\cdot(-1)-13\cdot(-6)=1 \\ a=13\cdot t-2 \text{ y } b=77\cdot t-12 \end{array}\right.$$

Así: $n=13\cdot b+1=1001\cdot t-155$ que nos vale sólo para $t=1$

$$n=1001\cdot 1-155=846 \quad \rightarrow \quad n^2=846^2=\underline{715716}$$

Luego, los únicos cuatro cuadrados de seis cifras con el número formado por sus tres últimas cifras una unidad mayor que el que forman las tres primeras son: $\underline{328329}$, $\underline{183184}$, $\underline{528529}$ y $\underline{715716}$.

Bien resuelto por: ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES JS. Arganda del Rey),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Cesc Folch Aldehuelo*** *(IES Sa Palomera. Blanes),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES Antonio Sequeros. Almoradí),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell) y* ***Sergio Sánchez Zufia***