Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Noviembre – 2022

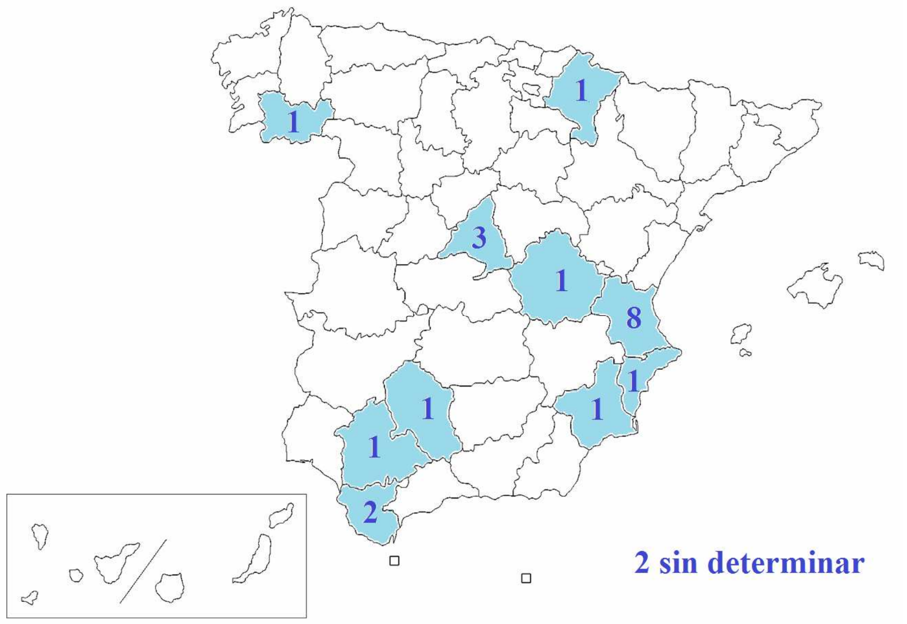
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
026	✓	✓	✓	✓	✓	✓
027	✓	✓	✓	✓	✓	✓
028	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

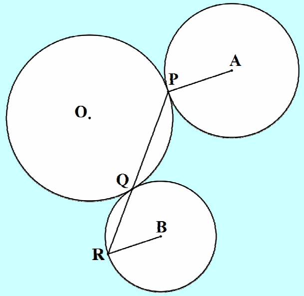
37 respuestas de 22 participantes (14 chicos / 08 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

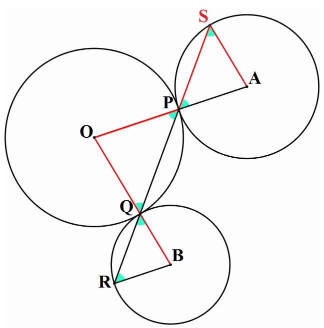
A-028. Circunferencias tangentes.

Dos circunferencias con centros en **A** y en **B** son, como se muestra en la figura, tangentes exteriores a otra de centro **O** en los puntos **P** y **Q** respectivamente. Prolongamos el segmento **PQ** hasta cortar de nuevo a la segunda circunferencia en el punto **R**. Deduce razonadamente que los radios **AP** y **BR** son paralelos.



Solución

Sabemos que si una transversal corta dos líneas rectas bajo el mismo ángulo, ambas rectas son paralelas. Pues esto es lo que vamos a deducir:



Trazamos el segmento que una los centros de cada par de circunferencias que también pasa por el correspondiente punto de tangencia.

Prolongamos el segmento **PQ** por el otro lado hasta que corte a la primera circunferencia en el punto **S**. Se nos forman así tres triángulos isósceles **APS**, **OPQ** y **BQR** pues, claramente, dos de sus lados son radios de sus respectivas circunferencias.

Y como ángulos opuestos por el vértice son iguales, todos esos triángulos son semejantes. Quedando, así probado, que todos los ángulos sombreados en la figura son iguales.

En conclusión, tenemos que la línea transversal **SR** que contiene al segmento **PQ** corta a las líneas que contienen los radios **AP** y **BR** bajo un mismo ángulo. Por tanto, como queríamos probar, son paralelas

*Bien resuelto por: **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco, **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba) y **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada)*

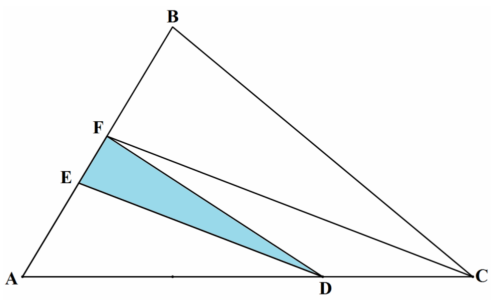
Se recibió también una solución incompleta

I-028. Área de, e, efe.

En el triángulo ABC de 80 u.d.s. situamos sobre el lado AC el punto D de forma que $AD/AC = 2/3$ y el punto E sobre el lado AB de forma que el área del triángulo ADE sea de 20 u.d.s. Si llamamos F al punto sobre el lado AB situado de modo que $CF \,||\, DE$, determina el área del triángulo DEF.

Solución

Representamos la situación:



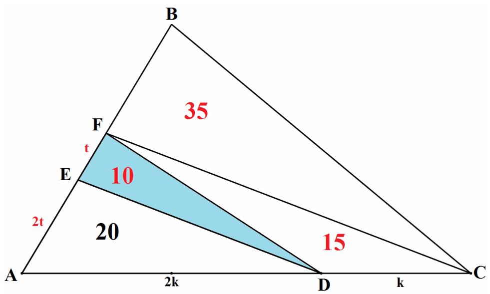
Como $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad AD = 2 \cdot DC$

Como $CF \,||\, DE$, los triángulos ADE y ACF son semejantes.

Por tanto, $AE = 2 \cdot EF$

Considerando que los triángulos, ADE y ACF, tienen sus respectivas bases sobre el lado AB y ambos tienen la misma altura, concluimos que el área del primero es doble que la del segundo: $[ADE] = 2 \cdot [ACF] \quad \rightarrow \quad \underline{[ACF] = 10}$ u.d.s.

Nótese que el dato de inicio, $[ABC] = 80$ u.d.s., no es preciso para nada. Sí, si se piden todas las áreas



*Además de la del proponente, han llegado soluciones correctas de **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco, **Xunuo Huang** (C Juan XXIII. Burjassot), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense) y **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada)*

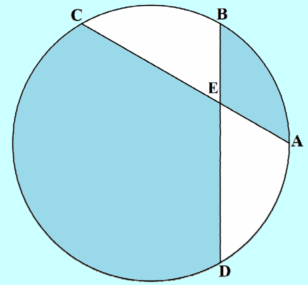
Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

C-028. Arcos de circunferencia.

Sean los siguientes arcos que completan la circunferencia y cuyas longitudes, respectivamente, son: $AB = \pi$, $BC = \pi$, $CD = 3\pi$ y $DA = \pi$

Determina el área de las regiones sombreadas:

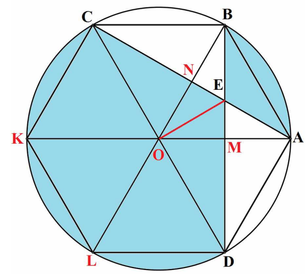
$$[EAB] + [ECD]$$



Solución-1

Como conocemos la longitud de la circunferencia, podemos determinar su radio: $6\pi = 2\pi \cdot r \quad \rightarrow \quad r = 3$ Así, es claro ver que CD es un diámetro y los puntos $ABCD$ son cuatro de los seis vértices del hexágono regular inscrito a la circunferencia de lado $\ell = 3$ igual al radio.

Representamos con detalle la situación y vemos que:



$[EAB]$ es el área del sector circular $A\hat{B}O$, esto es, $1/6$ del área de la circunferencia, menos $2/3$ de Δ_{ABO}, esto es, del área del triángulo equilátero ABO

$$[EAB] = \frac{1}{6}\pi \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$[ECD]$ es el área de media circunferencia más Δ_{ECD}, el área del triángulo ECD que tiene base 6, un diámetro, y altura OE, las $2/3$ partes de la altura del triángulo equilátero ABO:

$$[ECD] = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 + [\Delta_{ECD}] = \frac{9}{2}\pi + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{9}{2}\pi + 3\sqrt{3}$$

Luego, el área pedida es en total: $\underline{[EAB] + [ECD] = 6\pi + 1'5\sqrt{3}}$ u.d.s.

Solución-2

Como vemos en la figura anterior el área pedida es la de toda la circunferencia menos el área de dos segmentos circulares de $60º$ y el área de dos cartabones de cateto mayor 3 (ángulos 30º:60º:90º y, en este caso, lados $\sqrt{3}:3:2\sqrt{3}$ *) o, lo que es lo mismo, el área de un triángulo equilátero de altura 3*

$$[EAB]+[ECD]=9\pi-2\cdot\left[\left(\frac{1}{6}9\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]=9\pi-2\cdot\left[\frac{3}{2}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]=$$

$$=9\pi-\left[3\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]=6\pi+1'5\sqrt{3}$$

*Además de la del proponente, han llegado soluciones correctas de **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco, **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) y **Javier Ruiz Larriva** (Centro Inglés. Puerto de Santa María)*

Señalar que algunos participantes, al utilizar aproximaciones en sus cálculos intermedios, perdieron cierta precisión en el resultado final presentado.

Se recibieron también una solución incompleta y dos incorrectas.

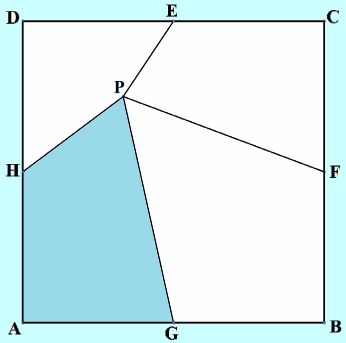
Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-028. Regiones en un cuadrado.

Sea el cuadrado **ABCD** y un punto **P** interior al mismo y sean además **E**, **F**, **G** y **H** los puntos medios de los lados. Si conocemos el valor de las áreas siguientes: $[HPED]=24$, $[EPFC]=30$ y $[FPGB]=48$, se te solicita:

a) El área de la región sombreada $[GPHA]$

b) En el sistema de referencia afín $\{A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$, las coordenadas del punto **P**.



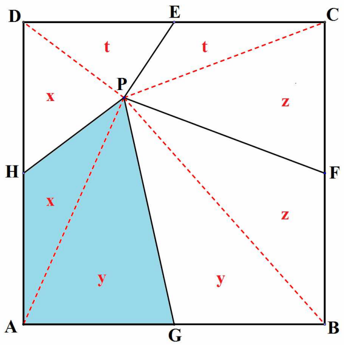
Solución

Dividimos todas las regiones en triángulos y marcamos con las letras **x**, **y**, **z** y **t** las áreas de aquellos pares que tienen dimensiones iguales, esto es, la misma altura y la misma base. Así:

$$[HPED]=24 \quad\rightarrow\quad x+t=24$$
$$[EPFC]=30 \quad\rightarrow\quad t+z=30$$
$$[FPGB]=48 \quad\rightarrow\quad y+z=48$$

Restando las expresiones 1ª y 3ª de la 2ª:

$$z-x=6 \quad y \quad y-t=18$$



En función de un solo parámetro, queda: $x=24-t$, $y=18+t$, $z=30-t$ y $t=t$

Luego $\underline{[GPHA]}=x+y=\underline{42}$

Y, además, $[ABCD]=2(x+y+z+t)=2(24+48)=144 \quad\rightarrow\quad \underline{\ell=12}$

Si $P(p,q)$ en el **sistema de referencia canónico**, nuestras cuatro áreas triangulares x, y, z y t valdrían:

$$x=3\cdot p,\; y=3\cdot q,\; z=3\cdot(12-p) \text{ y } t=3\cdot(12-q)$$

Luego, $x+z=36$ e $y+t=36$. Y con las expresiones ya obtenidas: $z-x=6$ e $y-t=18$ podemos obtener ya sus valores: $\underline{x=15}$ y $\underline{z=21}$ e $\underline{y=27}$ y $\underline{t=9}$

Así, $P(p,q)\equiv P(5,9)\equiv P\left(\frac{5}{12}\left|\overrightarrow{AB}\right|,\frac{9}{12}\left|\overrightarrow{AD}\right|\right)$ y, por tanto, en el sistema de referencia pedido $S\equiv\{A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$ sería $\underline{P\left(\frac{5}{12},\frac{3}{4}\right)_S}$

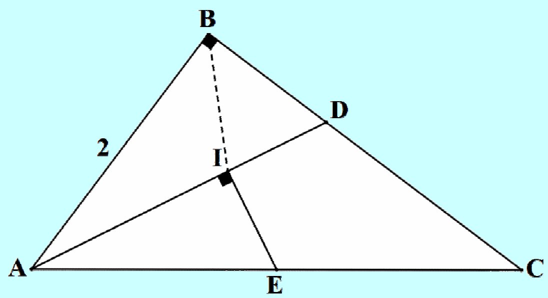
*Además de la del proponente, han llegado soluciones correctas de **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Clara Navarro Escribá** (IES Ausias March. Manises) y **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada)*

La mayoría dio la solución al segundo apartado en el sistema de referencia canónico y no en el que se demandaba, más bien por no ser entendida la cuestión que por olvido

Júnior

Jn-028. Doble perpendicularidad.

El punto I es el incentro del triángulo ABC rectángulo en B y E es el punto medio del lado AC. Calcula los lados de dicho triangulo si se sabe que $AB=2$ y que el ángulo $\angle AIE$, como muestra la figura, también es recto



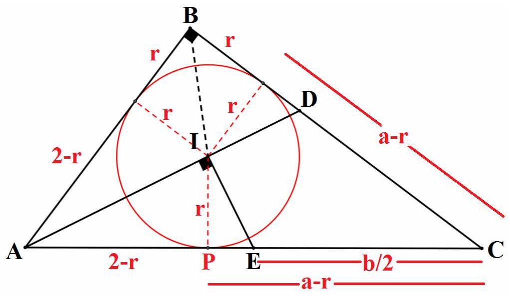
Solución

Con la notación habitual, completamos la figura trazando la circunferencia inscrita al triángulo y los tres radios que contactan con sus lados. Así, tenemos:

$$b = (2-r) + (a-r)$$

$$2r = a - b + 2$$

$$r = \frac{a-b+2}{2}$$



Y elevando al cuadrado:

$$r^2 = \frac{a^2+b^2+4-2ab+4a-4b}{4}$$

Como **ABC** es rectángulo, por el teorema de Pitágoras: $4 + a^2 = b^2$. Así, algo más simplificado, queda: $r^2 = \dfrac{2b^2-2ab+4a-4b}{4}$

Y como **AIE** también es rectángulo, por el teorema de la altura: $r^2 = AP \cdot PE$

$$r^2 = (2-r)\cdot\left(\frac{b}{2}-(2-r)\right) = \frac{-a+b+2}{2}\cdot\frac{a-2}{2} =$$

$$= \frac{-a^2+2a+ab-2b+2a-4}{4} = \frac{-b^2+ab+4a-2b}{4}$$

Igualando ambas expresiones del cuadrado del radio del incírculo, nos queda:

$$r^2 = \frac{2b^2-2ab+4a-4b}{4} = \frac{-b^2+ab+4a-2b}{4}$$

$$2b^2-2ab+4a-4b = -b^2+ab+4a-2b$$

$$3b^2-2b = 3ab \quad\rightarrow\quad 3b-2 = 3a$$

$$(3b-2)^2 = 9a^2 \quad\rightarrow\quad 9b^2-12b+4 = 9a^2$$

$$9(b^2-a^2)+4 = 12b \quad\rightarrow\quad 9\cdot 4+4 = 12b$$

$9+1 = 3b \quad\rightarrow\quad b = 10/3$ y, de la relación pitagórica, $a = 8/3$

Los lados del triángulo son: $\underline{c = 6/3}$, $\underline{a = 8/3}$ y $\underline{b = 10/3}$, esto es, se trata del famoso triángulo pitagórico de lados en proporción $3:4:5$

*Además de la del proponente, han llegado soluciones correctas de **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco, **David Ramos Orozco** (US), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Rafael Lozano** (UAM), **Doménica Díaz** (IES Ausias March. Gandía) y **Ofelia Weyer Sala** (Luis Vives. Valencia)*

S-028. Teorema de Pitágoras revisitado.

Con la notación habitual, probar que una condición necesaria y suficiente para que un triángulo **ABC** dado sea rectángulo es:

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}\right) = (a+b+c)\cdot\sqrt{2} \text{ con } a \ge b \ge c$$

Solución

· De ser cierta esa igualdad, también lo sería la que se obtiene elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}\right) = (a+b+c)\cdot\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)^2\cdot\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}\right)^2 = (a+b+c)^2\cdot 2$$

$$2\cdot\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\cdot 2\cdot\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right) = (a+b+c)^2\cdot 2$$

$$2\cdot\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right) = (a+b+c)^2$$

· Supongamos que el triángulo **ABC** es obtusángulo, esto es, que $a^2 > b^2+c^2$. Entonces: $\sqrt{a^2-b^2} > c$ y $\sqrt{a^2-c^2} > b$

Así, se contradice la igualdad anterior:

$$2\cdot\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right) > 2\cdot(a+c)(a+b) =$$

$$= 2a^2+2(ab+bc+ca) =$$

$$= a^2+a^2+2(ab+bc+ca) >$$

$$> a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) =$$

$$= (a+b+c)^2$$

Análogamente, si **ABC** fuera un triángulo acutángulo, esto es, que $a^2 < b^2+c^2$. Entonces: $\sqrt{a^2-b^2} < c$ y $\sqrt{a^2-c^2} < b$

Que también contradice la igualdad anterior:

$$2\cdot\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right) < 2\cdot(a+c)(a+b) =$$

$$= 2a^2+2(ab+bc+ca) =$$

$$= a^2+a^2+2(ab+bc+ca) <$$

$$< a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) =$$

$$= (a+b+c)^2$$

Luego, solo se puede cumplir que $a^2 = b^2 + c^2$, esto es, que el triángulo ABC sea rectángulo.

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco, **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES José Saramago. Arganda del Rey), **Jesús Mª Gutiérrez Gutiérrez** y **Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES A. Sequeros. Almoradí)*

Se recibió también una solución incorrecta