Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Diciembre – 2022

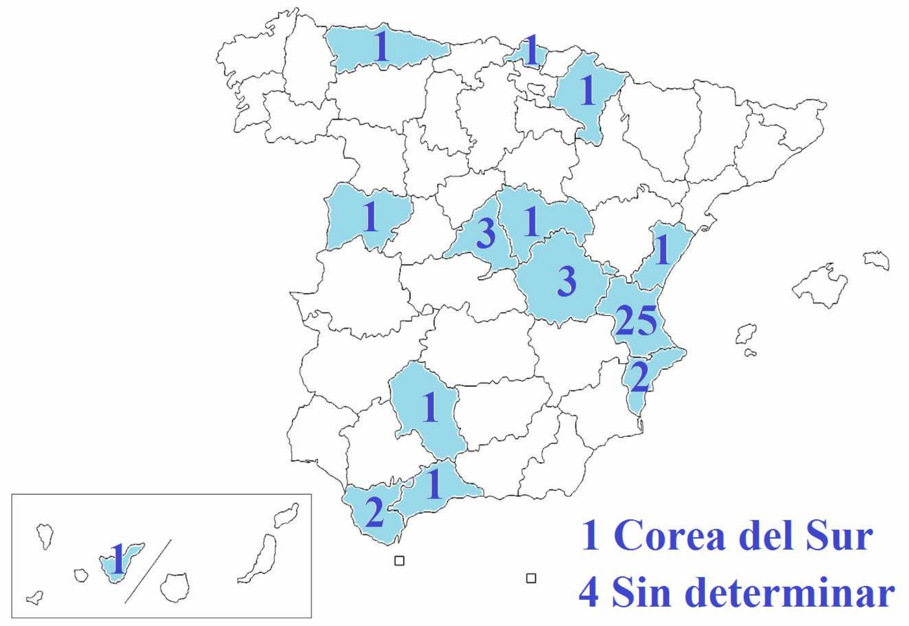
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
027	✓	✓	✓	✓	✓	✓
028	✓	✓	✓	✓	✓	✓
029	✓		✓		✓	

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

64 respuestas de 49 participantes (38 chicos / 11 chicas)



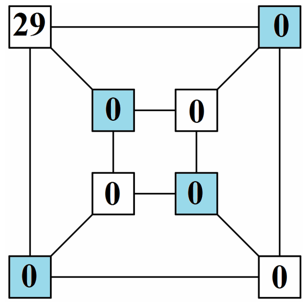
Alevín (5º/6º Primaria) / Infantil (1º/2º ESO)

A-029 / I-029. Las aristas de esta cuestión.

En los vértices de un cubo se ha escrito, en uno, el número 29 y en todos los demás, ceros. En cada movimiento del juego está permitido sumar una unidad a los vértices de la arista que arbitrariamente elijas. ¿En cuántos pasos, como mínimo, podrías conseguir que los números de todos los vértices fueran divisibles por 2? ¿Y por 3?

Solución

- Al inicio del juego, la suma de los números escritos en los vértices del cubo es 29, impar. Y en cada movimiento se suman dos puntos a los vértices de la arista elegida. Por tanto, tras cada movimiento, la suma de los vértices continúa siendo impar. Luego va a resultar totalmente imposible conseguir que los números de todos los vértices sean divisibles por 2.
- Y también va a ser imposible que los números de todos los vértices sean divisibles por 3. Para justificarlo, supongamos, sin pérdida de generalidad, que coloreamos los vértices como se indica en este gráfico:



La diferencia que hay entre la suma de los números de los vértices en blanco y la suma de los números de los vértices ensombrecidos es 29, un número que no es múltiplo de 3. Y en cada movimiento se suman dos puntos a los vértices de la arista elegida, uno de cada color. Por tanto, la diferencia entre la suma de los números de los vértices en blanco y la suma de los números de los vértices ensombrecidos sigue siendo la misma, 29, un número que no es múltiplo de 3. Y la situación a la que aspiramos sí que exigiría que esa diferencia fuera múltiplo de 3.

*Bien resuelto por: **Francisco Burgos Valle** (IES Oleana. Requena), **Hugo Hernández Climent** (IES Oleana. Requena), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Ana Lozano Miguel** (IES Uno. Requena), **Omayma Mabtoul Guetbach** (IES Uno. Requena), **Antonio de Gracia García** (IES Nº-1. Requena), **Víctor de Gracia García** (IES Nº-1. Requena), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Hyunbin Yoo** (Corea del Sur), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia) y **Francisco Rodríguez-Carretero Roldán** (C Bética-Mudarra. Córdoba)*

Se recibieron también tres soluciones incompletas y seis incorrectas.

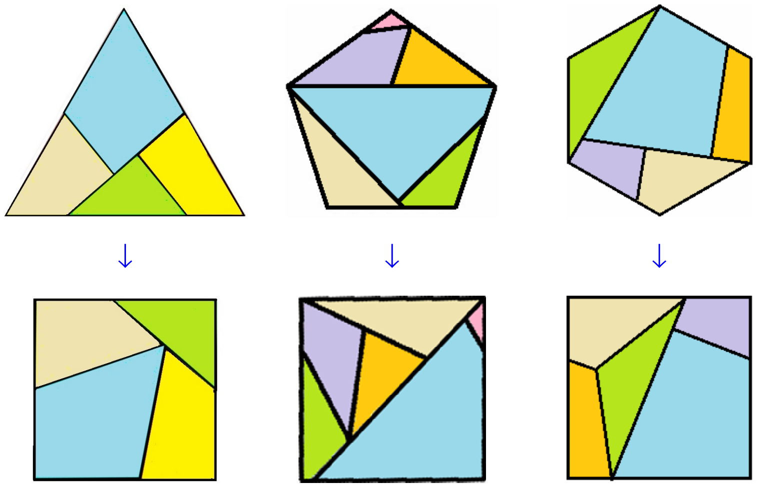
Cadete (3º/4º ESO) / Juvenil (1º/2º Bachillerato)

C-029 / Jv-029. Trapecio equivalente a un pentágono.

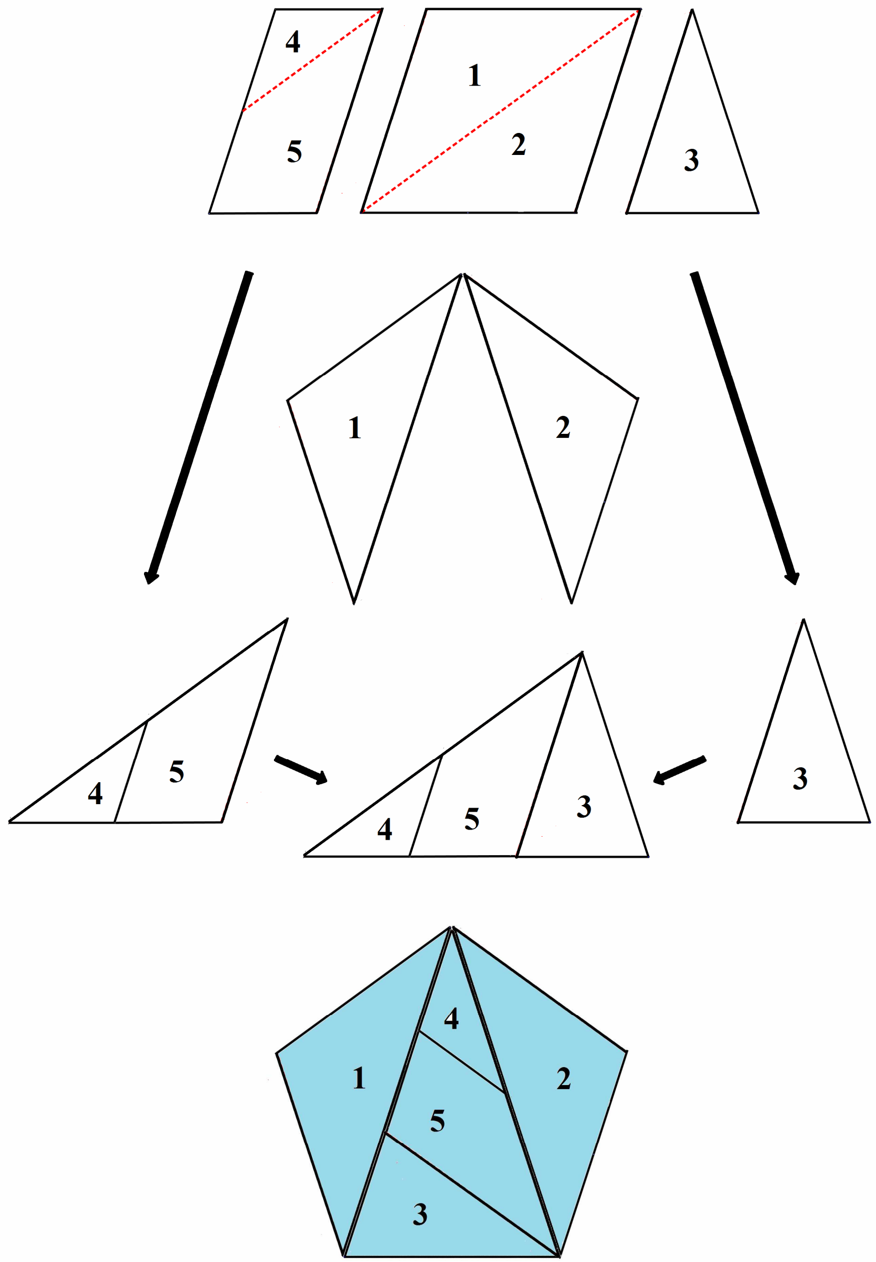
Da cuatro cortes rectos con tijeras a este **trapecio isósceles** con el fin de obtener cinco piezas que ensambladas adecuadamente, sin huecos ni solapamientos, te permitan formar un **pentágono regular**.

Nota. Un bonito resultado, el **Teorema de Wallace Bolyai-Gerwien**, asegura que:

> Dados dos polígonos cualesquiera de la misma área, es posible cortar uno de ellos en un número finito de piezas poligonales de forma que estas piezas puedan reordenarse formando exactamente el otro polígono.
>
> He aquí, como ejemplo, unas conocidas disecciones de **Henry E. Dudeney**:



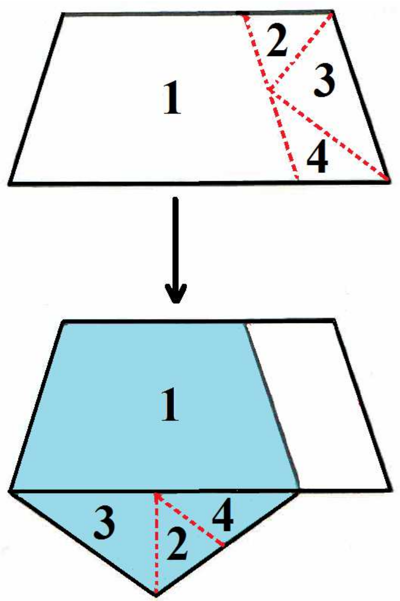
Solución



El problema ha resultado muy difícil. La mayoría de las respuestas enviadas no hacen cuatro cortes en el trapecio del enunciado, si no en otro que se acomoda bien para conseguir cinco "quesitos" triángulos iguales que configuren un pentágono regular que las hemos dado por incompletas. No llegaron soluciones correctas hasta final de mes. Hasta que punto estábamos preocupados que el autor de la propuesta, el profesor Francisco Xabier Babarro, conocedor del hecho, pensó que igual debió plantearse el reto con solo dos cortes, cosa que también es posible.

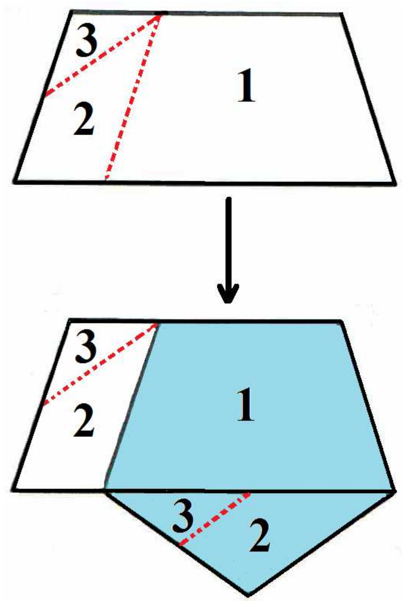
Además de la del proponente, han llegado soluciones correctas de: ***David Ortí Pascual*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Javier Ruiz de Larriva*** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María),* ***Francisco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(Colegio Bética-Mudarra. Córdoba) y* ***Elena Boix Miralles*** *(IES La Foia. Elche)*

Se recibieron también ocho soluciones incompletas y cuatro incorrectas.



Bonita solución con ***tres cortes*** *de:*

David Ortí Pascual *(IES Luis Vives. Valencia)*



Y con sólo ***dos cortes*** *de:*

Javier Ruiz de Larriva *(Centro Inglés. Pto de Santa Mª),* ***Francisco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(Colegio Bética-Mudarra. Córdoba) y* ***Elena Boix Miralles*** *(IES La Foia. Elche)*

(los cortes que faltan para llegar a los cuatro pedidos en el enunciado se pueden hacer en cualquiera de las otras piezas)

Júnior / Sénior

Jn-029 / S-029. Nunca primos entre sí.

Prueba que en cualquier conjunto de 15 números compuestos menores que 2022 habrá siempre, al menos dos que no sean primos entre sí.

¿Y si los elegimos entre los menores que 2023? ¿Y entre los menores que 2024? …

¿Cuál será el menor n natural para el que no podremos asegurar que al elegir 15 números compuestos menores que n haya, al menos dos que sean primos entre sí?

Solución

Es sabido que los factores primos de todos los números menores que 2022 han de ser inferiores a $\sqrt{2022} \cong 44'97$, esto es, pueden ser cualquiera de estos catorce:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 y 43.

Por tanto, como elegimos quince números compuestos, podemos asegurar que habrá dos que tendrán como factor común alguno de esos catorce primos y, en consecuencia, no serán primos entre sí.

Y, lo mismo ocurrirá con los menores de 2023 y, también de 2024.

El siguiente primo es 47 y como $47^2 = 2209$, no podremos asegurar que al elegir quince números compuestos menores que 2210 haya siempre dos que no sean primos entre sí. Fácil de ver, por ejemplo, si elegimos estos quince:

4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961, 1369, 1681, 1849 y 2209

Bien resuelto por: ***Marcos Monteagudo García*** *(IES-Uno. Requena),* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Pedro Julián Moreno Beltrán*** *(Cuenca),* ***J Carlos L*** *(Politecmática),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***Joaquín Cos Córcoles*** *(IES Mediterráneo. Torrevieja),* ***Juan Manuel Sánchez Hernández*** *(IESO Las Batuecas. La Alberca),* ***Aarón Jiménez Delgado*** *(Colegio El Armelar. Paterna),* ***Hyunbin Yoo*** *(Corea del Sur),* ***Alejandro Camblor Fernández*** *(IES Rey Pelayo. Cangas de Onis),* ***Tristán Romera Sobrado*** *(IES S. Inazio BHI. Bilbao),* ***Fco Rodríguez-Carretero Roldán*** *(Colegio Bética-Mudara. Córdoba),* ***Sergio Sánchez Zufia*** *(Navarra) y* ***Antonio Barella Barambio*** *(Valencia)*

Dos de ellas fueron rectificadas en segunda instancia

Se recibieron también una solución incompleta y tres incorrectas.