



Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Enero – 2023

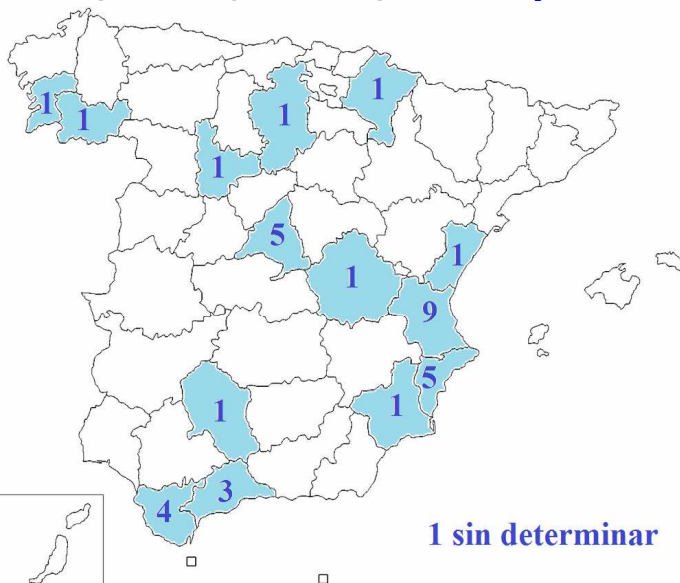
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
028	✓	✓	✓	✓	✓	✓
029		✓		✓		✓
030	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

37 participantes (27 chicos / 10 chicas) 55 respuestas



Alevín (5º/6º Primaria)

A-030. Capicúas cercanos.

Sabes que un número capicúa (o palíndromo) es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, el número **2023202**. Sea **M** un número capicúa menor que el del ejemplo y **N** número capicúa mayor que el del ejemplo, esto es, $M < 2023202 < N$ de forma que no existe otro número capicúa diferente de **2023202** entre **M** y **N**. Se te pide hallar el valor de $M - N$.

Solución

Si cambiamos el **2** de las unidades de **2023202**, para que el número siga siendo capicúa, hemos de cambiar también el **2** de las unidades de millón pero, entonces, el número **2023202** no estaría entre **M** y **N**.

Análogamente ocurriría si cambiáramos el **0** de las decenas de **2023202**, que obligaría a cambiar el **0** de las centenas de millar o, lo mismo, si cambiáramos el otro **2**, el de las centenas de **2023202**, que obligaría a cambiar el **2** de las decenas de millar y, en ambos casos, el número **2023202** tampoco estaría entre **M** y **N**.

Luego, necesariamente hemos de modificar el número central, el de las unidades de millar, obteniendo $M = 2022202$ y $N = 2024202$, por lo que $M - N = -2000$.

Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Mateo Muñíos Martínez** (IES Sanxenxo), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Yassir Abid** (IES Pla. Alicante), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Dario Moreno Sánchez-Cogolludo** (Sta Mª Expectación. Cuenca) y **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia).

Infantil (1º/2º ESO)

I-030. El duomil vigésimo tercer término.

Dados **2023** números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ y a_{2023} , sabemos que el valor de los dos primeros $a_1 = 20$ y $a_2 = 23$, y que, a partir de ahí, cada término es el cociente entre el término que le precede en una posición y el que le precede en dos posiciones, esto es: $a_3 = a_2/a_1$, $a_4 = a_3/a_2$, $a_5 = a_4/a_3$... y así sucesivamente, ¿qué valor tiene a_{2023} , el último término?

Solución

Hallamos los primeros valores:

$$\begin{aligned}a_1 &= 20 & a_2 &= 23 & a_3 &= \frac{a_2}{a_1} = \frac{23}{20} \\a_4 &= \frac{a_2}{a_1} = \frac{23/20}{23} = \frac{1}{20} & a_5 &= \frac{a_4}{a_3} = \frac{1/20}{23/20} = \frac{1}{23} & a_6 &= \frac{a_5}{a_4} = \frac{1/23}{1/20} = \frac{20}{23} \\a_7 &= \frac{a_6}{a_5} = \frac{20/23}{1/23} = 20 = a_1 & a_8 &= \frac{a_7}{a_6} = \frac{20}{20/23} = 23 = a_2 \dots\end{aligned}$$

y, claramente, vemos que el ciclo se repetirá cada seis términos.

Luego, como $2023 = 6 \cdot 337 + 1$, tendremos que $a_{2023} = a_1 = 20$

Bien resuelto por: **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Carolina Aranda Esteban** (C. Juan XXIII. Burjassot), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Miguel Conesa Sánchez** (IES Misteri d'Elx), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López), **Iker Torres García** (IES Matilde Salvador. Castellón), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Xunuo Huang** (C. Juan XXIII. Burjassot), **Ainhoa Boeta Serrano** (IES Sierra de Mijas. Las Lagunas de Mijas), **Alfonso Gadea** (Valladolid), **David Cano Palencia** (IES Juan XXIII. Burjassot), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia) y **Pablo Morales Martín** (P4-CEIP Agustín de Argüelles. Alcorcón)

Se recibió también una solución no justificada.

Cadete (3º/4º ESO)

C-030. El fin de la suma de potencias.

Hallar la última cifra, la de las unidades, de este enorme número:

$$N = 1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023} + \dots + 2022^{2023} + 2023^{2023}$$

Solución

Observamos que:

- Las potencias de cualquier número que acaba en 0, 1, 5 o 6, terminan, respectivamente, en 0, 1, 5 o 6.
- Las unidades de las potencias de cualquier número que acaba en 2, en 3, en 7, o en 8, se repiten cíclicamente cada cuatro números:

$$\begin{array}{lllll}u(\dots 2^1) = 2 & u(\dots 2^2) = 4 & u(\dots 2^3) = 8 & u(\dots 2^4) = 6 & \dots \\u(\dots 3^1) = 3 & u(\dots 3^2) = 9 & u(\dots 3^3) = 7 & u(\dots 3^4) = 1 & \dots \\u(\dots 7^1) = 7 & u(\dots 7^2) = 9 & u(\dots 7^3) = 3 & u(\dots 7^4) = 1 & \dots \\u(\dots 8^1) = 8 & u(\dots 8^2) = 4 & u(\dots 8^3) = 2 & u(\dots 8^4) = 6 & \dots\end{array}$$

- Las unidades de las potencias de cualquier número que acaba en 4 o en 9, se repiten cíclicamente cada dos números:

$$\begin{array}{lllll}u(\dots 4^1) = 4 & u(\dots 4^2) = 6 & u(\dots 4^3) = 4 & u(\dots 4^4) = 6 & \dots \\u(\dots 9^1) = 9 & u(\dots 9^2) = 1 & u(\dots 9^3) = 9 & u(\dots 9^4) = 1 & \dots\end{array}$$

Y, como $2023 = 2 \cdot 1011 + 1 = 4 \cdot 505 + 3$, se tiene que: $u(\dots n^{2023}) = u(\dots n^3)$ para cualquier terminación $n = 0, 1, 2, \dots, 9$ de un número cualquiera que acabe en n

Por tanto, en nuestro caso, $u(N) = 6$ como aquí vemos:

$$\begin{aligned}u(N) &= u(1^{2023} + 2^{2023} + \dots + 2020^{2023}) + u(2021^{2023} + 2022^{2023} + 2023^{2023}) = \\&= u(202 \cdot (0 + 1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9)) + u(1 + 8 + 7) = \\&= u(202 \cdot 45) + u(16) = 0 + 6 = 6\end{aligned}$$

Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: **Alberto Fernández** (Colegio Pozo Nuevo. Rota), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López), **Javier Ruiz de Larriva** (El Centro Inglés. Puerto de Santa María), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Helena Taiyun** (IES Mediterráneo. Torrevieja), **Eva Barrera Vázquez** (El Centro Inglés. Puerto de Santa María), **Cristina Ceaus** (IES Dunas de las Chapas. Marbella), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Joaquín Cos Córcoles** (IES Mediterráneo. Torrevieja), **Pelayo Palacio Pérez** (IES Alpajés. Aranjuez), **Alfonso Gadea** (Valladolid), **Dario Armario Reina** (Centro Inglés. Puerto de Santa María), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia) y **Weng Weizhe** (IES Luis Vives. Valencia)

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-030. Veintitrés en partes.

Ya sabes que $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$ y $\{x\}$ representan, respectivamente, la parte entera por defecto, la parte entera por exceso y la parte decimal del número real x y que $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$. Demuestra que no existen dos números enteros positivos m y n tales que $2^m \cdot \sqrt{23}$ y $3^n \cdot \sqrt{23}$ tengan la misma parte decimal, esto es, que: $\{2^m \cdot \sqrt{23}\} = \{3^n \cdot \sqrt{23}\}$

Solución

Lo vamos a demostrar por reducción al absurdo. Supongamos que existieran dos números enteros positivos m y n tales $\{2^m \cdot \sqrt{23}\} = \{3^n \cdot \sqrt{23}\}$. Entonces, como $\{2^m \cdot \sqrt{23}\} = 2^m \cdot \sqrt{23} - \lfloor 2^m \cdot \sqrt{23} \rfloor$ y $\{3^n \cdot \sqrt{23}\} = 3^n \cdot \sqrt{23} - \lfloor 3^n \cdot \sqrt{23} \rfloor$, tenemos:

$$2^m \cdot \sqrt{23} - \lfloor 2^m \cdot \sqrt{23} \rfloor = 3^n \cdot \sqrt{23} - \lfloor 3^n \cdot \sqrt{23} \rfloor$$
$$(2^m - 3^n) \cdot \sqrt{23} = \lfloor 2^m \cdot \sqrt{23} \rfloor - \lfloor 3^n \cdot \sqrt{23} \rfloor$$

que es entero por ser diferencia de enteros

Así, la única manera de que $(2^m - 3^n) \cdot \sqrt{23}$ sea entero es que $2^m - 3^n = 0$, esto es, que $2^m = 3^n$ y esta igualdad es absurda, pues el primer miembro representa un número par y el segundo uno impar.

Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Clara Navarro Escribá** (IES Ausias March. Manises) y **Pelayo Palacio Pérez** (IES Alpajés. Aranjuez)

Júnior

Jn-030. No apto para triscaidecafóbicos.

El número 13 es el número más temido por los supersticiosos. No obstante, es el único número de dos cifras que divide a $2^{70} + 3^{70}$. ¿Puedes demostrarlo?

Solución:

En primer lugar:

$$\text{Por el Pequeño Teorema de Fermat: } 2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \rightarrow 2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\text{Por otro lado, } 2^5 \equiv 6 \pmod{13} \rightarrow 2^{10} \equiv 36 \equiv 10 \pmod{13}$$

$$\text{Por tanto, multiplicando ambas expresiones: } 2^{70} \equiv 1 \pmod{13}$$

Y, en segundo lugar:

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \rightarrow 3^{69} \equiv 1^{13} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\text{Y como } 3 \equiv 3 \pmod{13}, \text{ multiplicando ambas expresiones: } 3^{70} \equiv 3 \pmod{13}.$$

$$\text{Entonces: } 2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3 \equiv 0 \pmod{13}$$

La unicidad la prueba así F. Damián Aranda Ballesteros:

Teniendo en cuenta que 2 y 3 son primos, sabemos que ninguno de ellos será divisor de $2^{70} + 3^{70}$

Los divisores de 70 distintos de 1 y 70 son: 2, 5, 7, 10, 14 y 35. Por tanto, si actuamos como en el apartado anterior, de existir un divisor b del número $2^{70} + 3^{70}$ debería ocurrir:

· En primer lugar:

$$2^5 \equiv a \pmod{b} \rightarrow (2^5)^{14} = 2^{70} \equiv a^{14} \pmod{b} \rightarrow 2^{70} + 3^{70} \not\equiv 0 \pmod{b}$$
$$3^5 \equiv -a \pmod{b} \rightarrow (3^5)^{14} = 3^{70} \equiv (-a)^{14} \pmod{b}$$

· Lo mismo ocurre para el caso siguiente:

$$2^7 \equiv a \pmod{b} \rightarrow (2^7)^{10} = 2^{70} \equiv a^{10} \pmod{b} \rightarrow 2^{70} + 3^{70} \not\equiv 0 \pmod{b}$$
$$3^7 \equiv -a \pmod{b} \rightarrow (3^7)^{10} = 3^{70} \equiv (-a)^{10} \pmod{b}$$

· Y para este otro caso:

$$2^{35} \equiv a \pmod{b} \rightarrow (2^{35})^2 = 2^{70} \equiv a^2 \pmod{b} \rightarrow 2^{70} + 3^{70} \not\equiv 0 \pmod{b}$$
$$3^{35} \equiv -a \pmod{b} \rightarrow (3^{35})^2 = 3^{70} \equiv (-a)^2 \pmod{b}$$

Nos quedan por estudiar estos otros casos:

· En primer lugar:

$$2^{10} \equiv a \pmod{b} \rightarrow (2^{10})^7 = 2^{70} \equiv a^7 \pmod{b} \rightarrow 2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{b}$$
$$3^{10} \equiv -a \pmod{b} \rightarrow (3^{10})^7 = 3^{70} \equiv (-a)^7 \pmod{b}$$

Los posibles valores de b estarán entre los divisores de $2^{10} + 3^{10} = 60073$ que son $\{1, 13, 4621, 60073\}$ y como vemos el único divisor de dos cifras es 13.

· E igualmente con:

$$2^{14} \equiv a \pmod{b} \rightarrow (2^{14})^5 = 2^{70} \equiv a^5 \pmod{b} \rightarrow 2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{b}$$
$$3^{14} \equiv -a \pmod{b} \rightarrow (3^{14})^5 = 3^{70} \equiv (-a)^5 \pmod{b}$$

Los posibles valores de b estarán entre los divisores de $2^{14} + 3^{14} = 4799353$ que son $\{1, 13, 369181, 4799353\}$ y vemos que el único divisor de dos cifras es 13.

Por tanto, 13 es el único número de dos cifras que divide a $2^{70} + 3^{70}$

Bien resuelto por **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) y **Nicolás Uzquiza López** (IES La Bureba. Briviesca). Solo el primero probó la unicidad.

S-030. Bienvenido 2023.

Demuestra que en cualquier conjunto de dos mil veintitrés números enteros, se puede encontrar siempre uno que sea divisible por **2023**, o varios cuya suma sea divisible por **2023**.

Solución

Sea $\{a_j\}_{j=1}^{2023}$ el conjunto en cuestión de dos mil veintitrés números enteros.

Consideramos las **2023** sumas siguientes:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_{2023} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}$$

- Si una de ellas es múltiplo de **2023**, hemos terminado.
 - Si ninguna de ellas fuera múltiplo de **2023**, por el principio del palomar podemos asegurar que, al menos, dos de ellas dejarán el mismo resto al dividir las por **2023**, pues son **2023** divisiones con **2022** restos posibles ($r = 1, 2, \dots, 2022$).
- O lo que es lo mismo, existen $p < q$ tales que $S_p \equiv S_q \pmod{2023}$, esto es:

$$S_p = a_1 + a_2 + \dots + a_p \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_q = S_q \pmod{2023} \text{ y, por tanto,}$$

$$\text{la suma } a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \dots + a_q \equiv 0 \pmod{2023} \text{ cumple lo pedido.}$$

Bien resuelto por: *Miguel Ángel Ingelmo Benito* (IES JS. Arganda del Rey), *F. Damián Aranda Ballesteros* (IPEP-Córdoba), *J Carlos L* (Politécnica), *Pelayo Palacio Pérez* (IES Alpajés. Aranjuez) y *Sergio Sánchez Zufia* (Navarra)

Se recibieron también una solución incompleta y otra incorrecta.