Real Sociedad
Matemática Española

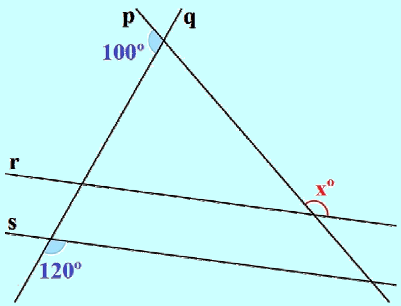
PROBLEMA DEL MES

Marzo – 2023

Soluciones oficiales

Alevín (5º/6º Primaria) — A-032. Ángulos obtusos externos.

Como ves en el gráfico de la derecha, dos rectas secantes p y q cortan a dos rectas paralelas r y s. Y conocemos la medida de dos ángulos obtusos externos como indicamos. ¿Sabrías deducir qué medida tiene el otro ángulo obtuso externo que falta?

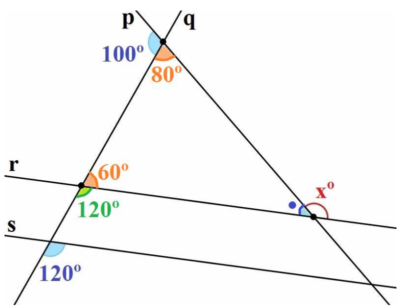


Solución

Sabes que los ángulos correspondientes que forma una línea recta que corta a dos líneas rectas paralelas son iguales *(en verde)*.

Sabes también que el suplementario de un ángulo es lo que le falta para medir un ángulo llano, esto es, 180º *(en naranja)*.

Finalmente, fíjate en el triángulo de vértices punteados, y verás que te falta el ángulo señalado con un puntito por determinar y, también, que dicho ángulo es suplementario del ángulo x° que se pide.



Por tanto, el ángulo x° marcado *en rojo* mide lo mismo que la suma de los dos ángulos conocidos en el triangulo de vértices punteados: $\underline{x^{\circ}} = 80^{\circ}+60^{\circ} = \underline{140^{\circ}}$

Infantil (1º/2º ESO) — I-032. Triángulo 3:4:5 no pitagórico.

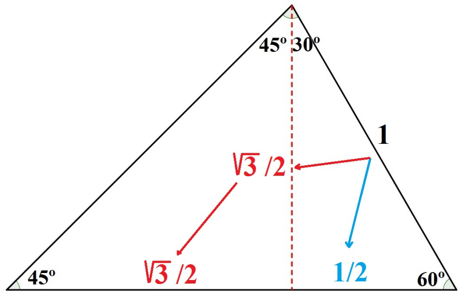
Ya sabes que el triángulo con las medidas de sus lados en proporción $3:4:5$ es un triángulo pitágorico. Pero, si son las medidas de sus ángulos los que están en esa misma proporción, $3:4:5$, ¿qué mediría el lado más largo si el más corto es de una unidad de longitud?

Solución

Que los ángulos del triángulo están en la proporción $3:4:5$, significa que $3k+4k+5k=180^{\circ} \rightarrow k=15$, esto es, los ángulos del triángulo son:

$$3\cdot 15:4\cdot 15:5\cdot 15 \rightarrow \underline{45^{\circ}:60^{\circ}:75^{\circ}}$$

Así, para responder a la cuestión, basta conocer bien tus útiles de dibujo, la escuadra y el cartabón, pues ambos conforman, como vemos en la figura, este curioso triángulo.



Un triángulo con el lado corto, el opuesto al menor ángulo, el de 45º, de una unidad de longitud, según dice el enunciado y, como muestra la figura, con el lado largo, el opuesto al mayor ángulo, el de 75º, la suma de las longitudes que miden los catetos del cartabón con esa hipotenusa de una unidad de longitud, pues el cateto largo coincide con el cateto de la escuadra:

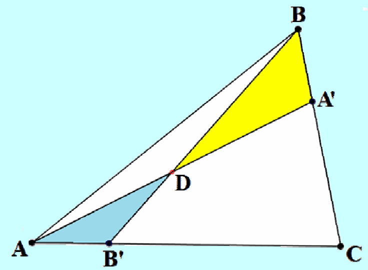
$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{0'5\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

Cadete (3º/4º ESO) — C-032. Razón de áreas.

Sobre los lados BC y AC de un triangulo ABC se consideran los puntos A' y B' de modo que se verifican las relaciones:

$$\frac{BA'}{BC}=\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{AB'}{AC}=\frac{1}{4} \text{ respectivamente.}$$

Halla la razón de áreas K, entre los dos triángulos de distinto color.

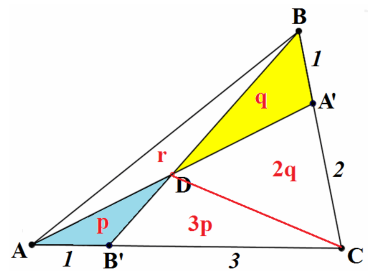


Solución-1

$$\frac{BA'}{BC}=\frac{1}{3} \rightarrow A'C = 2\cdot BA'$$

$$\frac{AB'}{AC}=\frac{1}{4} \rightarrow B'C = 3\cdot AB'$$

Y los valores marcados en cursiva sobre los lados del triángulo del dibujo no son sus medidas, son las proporciones entre sus dos particiones.



Uniendo D con C, como muestra la figura, el triángulo queda dividido en triangulitos cuyas áreas podemos relacionar entre sí. Nominémoslas, como es habitual, poniendo entre corchetes los vértices de los triángulos implicados.

- Sea $p=[AB'D] \;\rightarrow\; [B'CD]=3p$ por tener la misma altura y base triple.
- Sea $q=[A'BD] \;\rightarrow\; [A'DC]=2p$ por tener la misma altura y base doble.
- Sea $r=[ADB]$

Así, por tener la misma altura y base triple: $[B'CB]=3\cdot[AB'B] \;\rightarrow$

$$3p+2q+q=3(p+r) \;\rightarrow\; q=r$$

y por tener la misma altura y base doble: $[A'AC]=2\cdot[A'BA] \;\rightarrow$

$$2q+3p+p=2(q+r) \;\rightarrow\; 2p=r \quad \text{y, por tanto, } 2p=r=q$$

Luego, la razón pedida es: $\underline{K}=\dfrac{q}{p}=\underline{2}$

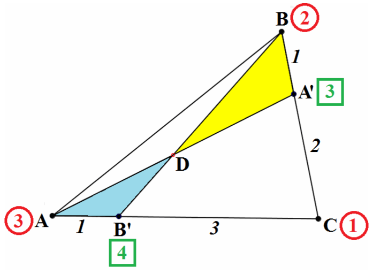
Solución-2

Aplicando la técnica del **centro de masas** ***(ley de la palanca** en distintos segmentos)*

Asignando pesos:

· 3 y 1 a los vértices A y C respectivamente, el equilibrio se logra en B' con un peso 4.

· 2 y 1 a los vértices B y C respectivamente, el equilibrio se logra en A' con un peso 3.



Así, D será centro de masa del triángulo, si:

- sobre el segmento AA' se cumple que $AD=DA'$, lo que implica, por ser triángulos con misma base y misma altura, con la misma nomenclatura que en la solución anterior, que $q=r$
- sobre el segmento BB' se cumple que $BD=2\cdot DB'$, lo que implica, por ser triángulos con misma altura y base doble, que $r=2p$

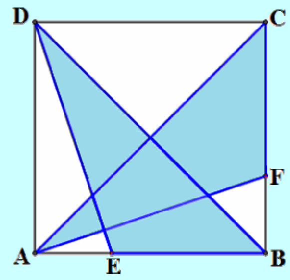
Y, así, como antes: la razón pedida resulta: $\underline{K}=\dfrac{q}{p}=\underline{2}$

Juvenil (1º/2º Bachillerato) Jv-032. Área sombreada.

a) Calcula el valor $S(n)$ del área de la región sombreada, siendo el cuadrado ABCD de lado unidad y los puntos E y F sobre los lados AB y BC respectivamente, tales que satisfacen la relación:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{BF}{BC}=\frac{1}{n} \quad \text{y}$$

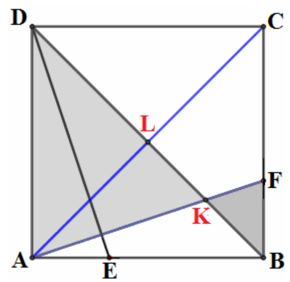
b) Determina el valor del $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$



Solución

Los triángulos AKD y FKB son semejantes y, a partir de su razón de semejanza $r_1=\dfrac{FB}{AD}=\dfrac{1}{n}$, sus alturas trazadas desde el vértice común K serán, respectivamente: $\dfrac{1}{n}h_{AKD}+h_{AKD}=1 \;\rightarrow$

$$h_{AKD}=\frac{n}{n+1} \quad \text{y} \quad h_{FKB}=\frac{1}{n+1}$$

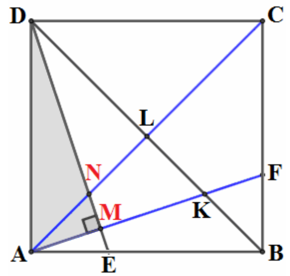


Así: $[FKB]=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{2n(n+1)}$ y el área de cuadrilátero FKLC será:

$$[FKLC]=[BCL]-[FKB]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{n(n+1)-2}{4n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$$

Los triángulos rectángulos AMD y EAD son semejantes con razón de semejanza:

$$r_2=\frac{AD}{DE}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$



Así: $[AMD]=r_2^{\,2}[EAD]=\dfrac{n^2}{n^2+1}\cdot\dfrac{1}{2n}=\dfrac{n}{2(n^2+1)}$

De este modo, $[AME]=[EAD]-[AMD]=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{n}{2(n^2+1)}=\dfrac{1}{2n(n^2+1)}$ y

$$[MEBK]=[ABF]-[AME]-[FKB]=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n(n^2+1)}-\frac{1}{2n(n+1)}=$$

$$=\frac{(n+1)(n^2+1)-(n+1)-(n^2+1)}{2n(n+1)(n^2+1)}=\frac{n^3-1}{2n(n+1)(n^2+1)}$$

Por razones de simetría, los cuadriláteros NEBL y FKLC son equivalentes y así:

$$[NLKM]=[NEBL]-[MEBK]=[FKLC]-[MEBK]=$$

$$=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}-\frac{n^3-1}{2n(n+1)(n^2+1)}=$$

$$=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}-\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{2n(n+1)(n^2+1)}=$$

$$=\frac{(n-1)\left[(n+2)(n^2+1)-2(n^2+n+1)\right]}{4n(n+1)(n^2+1)}=$$

$$=\frac{(n-1)\left[(n+2)(n^2+1))-2(n^2+n+1)\right]}{4n(n+1)(n^2+1)}=$$

$$=\frac{(n-1)(n^3-n)}{4n(n+1)(n^2+1)}=\frac{(n-1)(n-1)(n+1)n}{4n(n+1)(n^2+1)}=\frac{(n-1)^2}{4(n^2+1)}$$

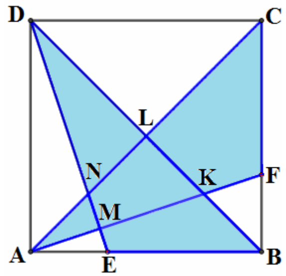
En definitiva, el área sombreada $S(n)$ será:

$$S(n)=[AFC]+[DEB]-[NLKM]=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{(n-1)^2}{4(n^2+1)}=$$

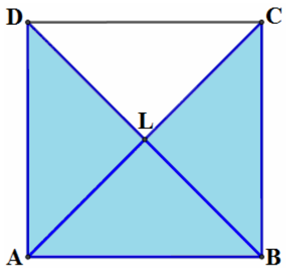
$$=\frac{(n-1)\left[4(n^2+1)-(n-1)n\right]}{4n(n^2+1)}=$$

$$=\frac{(n-1)(3n^2+n+4)}{4n(n^2+1)}$$



Y, finalmente, el $\lim_{n\to\infty} S(n)$ concuerda con lo que se intuía y se ve en la figura:

$$\lim_{n\to\infty} S(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(3n^2+n+4)}{4n(n^2+1)}=\frac{3}{4}$$



Júnior **Jn-032. Buscando a C.**

Dados dos puntos **A** y **B**, determina el lugar geométrico de los puntos **C** del plano cartesiano tales que, en el triángulo **ABC**, el ángulo $\hat{A}$ sea el doble del $\hat{B}$.

Indica de qué curva se trata.

Solución

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A(1,0)$ y $B(-1,0)$.

Con $C(x,y)$ la recta AC es: $y=m(x+1)$

Y como $m=\tan\hat{B}$ $\rightarrow$ $\tan\hat{A}=\tan 2\hat{B}=\frac{2\tan\hat{B}}{1-\tan^2\hat{B}}=\frac{2m}{1-m^2}$ entonces la recta BC tendrá por ecuación: $y=\frac{-2m}{1-m^2}(x-1)$

Tenemos el sistema: $\begin{cases} y=m(x+1) \\ y=\frac{-2m}{1-m^2}(x-1)\end{cases}$ y resolviendo: $m(x+1)=\frac{-2m}{1-m^2}(x-1)$

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{m^2-1}\ \rightarrow\ 1+\frac{2}{x-1}=\frac{2}{m^2-1}\ \rightarrow\ \frac{2}{x-1}=\frac{2}{m^2-1}-1=\frac{3-m^2}{m^2-1}$$

$$x-1=\frac{2m^2-2}{3-m^2}\ \rightarrow\ x=\frac{2m^2-2}{3-m^2}+1=\frac{1+m^2}{3-m^2}$$

Y de aquí: $y=m(x+1)=m\left(\frac{1+m^2}{3-m^2}+1\right)=\frac{4m}{3-m^2}$

En definitiva, la solución es: ⇨ $\left\{x=\frac{1+m^2}{3-m^2},\ y=\frac{4m}{3-m^2}\right.$

Despejando m^2 de $x=\frac{1+m^2}{3-m^2}=-1+\frac{4}{3-m^2}$ $\rightarrow$ $x+1=\frac{4}{3-m^2}$

$$3-m^2=\frac{4}{x+1}\ \rightarrow\ 3-\frac{4}{x+1}=m^2\ \rightarrow\ m^2=\frac{3x-1}{x+1}$$

Y sustituyendo en $y^2=\left(\frac{4m}{3-m^2}\right)^2$:

$$y^2=\frac{16m^2}{(3-m^2)^2}=\frac{16\cdot\frac{3x-1}{x+1}}{\left(3-\frac{3x-1}{x+1}\right)^2}=\frac{\frac{48-16}{x+1}}{\left(\frac{4}{x+1}\right)^2}=(3x-1)(x+1)$$

Nos queda que el lugar geométrico es: $\underline{y^2 = 3x^2 + 2x - 1}$

Para reconocer qué tipo de curva es, operamos como sigue:

$$\frac{y^2}{3} = x^2 + \frac{2}{3}\cdot x - \frac{1}{3} \rightarrow \frac{y^2}{3} = \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} \rightarrow$$

$$\frac{4}{9} = \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{3} \rightarrow 1 = \frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{4/9} - \frac{y^2/3}{4/9} \rightarrow 1 = \frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{4/9} - \frac{y^2}{4/3}$$ que

es la ecuación de la hipérbola: $\underline{1 = \frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{(2/3)^2} - \frac{y^2}{(2/\sqrt{3})^2}}$ con parámetros:

$a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{12}{9}} = \frac{4}{3}$ por tanto, con excentricidad $e = \frac{c}{a} = 2$

Se trata, por tanto, de una hipérbola centrada en el punto entre **A** y **B** que está a doble distancia de **A** que de **B**, de semieje mayor $\frac{2}{3}$ y semieje menor, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Sénior S-032. Triángulo situado.

Determina las coordenadas de los vértices del triangulo ABC con ortocentro $H(-3,10)$, circuncentro en $O(-2,-3)$ y $D(1,3)$ el punto medio del lado BC

Solución

Haremos uso de dos resultados conocidos:

Por un lado, el baricentro divide a cualquier **mediana** de un triángulo en proporción:

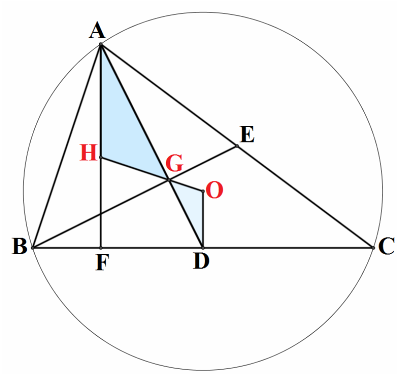
$$AG = 2\cdot GD$$

Y, por otro, el baricentro divide también al **segmento de Euler** (en un triángulo, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están alineados) en idéntica proporción:

$$OG = 2\cdot GH$$

De lo que se desprende que los triángulos AGH y DOG son semejantes y, también:

$$AH = 2\cdot OD$$



Y, de aquí, podemos obtener las coordenadas del vértice $A(a_1,a_2)$:

$$(-3-a_1, 10-a_2) = 2\cdot(3,6) \rightarrow a_1 = -9 \text{ y } a_2 = -2, \text{ esto es, } \underline{A(-9,-2)}$$

Finalmente, $B(b_1,b_2)$ y $C(c_1,c_2)$ están en:

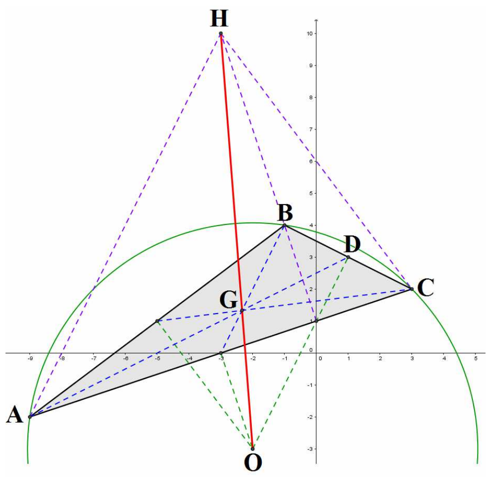
- la recta perpendicular a $\overrightarrow{OD} \equiv 3(1,2)$ que pasa por D, esto es, en forma general, $x+2y-7=0$ y
- en la circunferencia circunscrita al triángulo, la de centro O y radio, el módulo de $\overrightarrow{OA} \equiv (-7,1)$ $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{50}$, esto es: $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 50$.

Así, resolviendo: $(9-2y)^2 + (y+3)^2 = 50 \rightarrow 5y^2 - 30y + 40 = 0$

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 2 \rightarrow x = 3 \\ y = 4 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Esto es, los puntos B y C son, en un sentido u otro, $\underline{(3,2)}$ y $\underline{(-1,4)}$

Representado gráficamente todo:



■