Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Abril – 2023

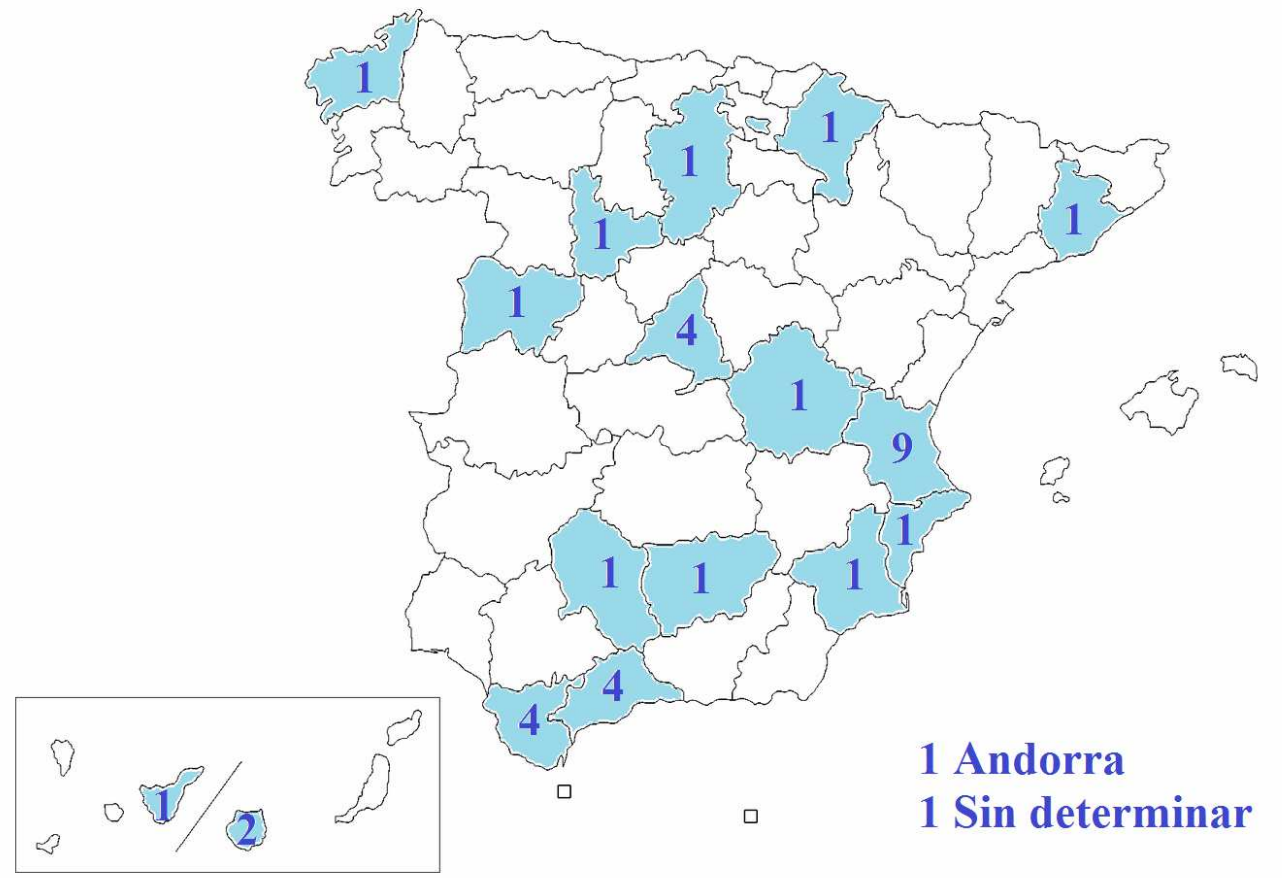
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
031	✓	✓	✓	✓	✓	✓
032	✓	✓	✓	✓	✓	✓
033	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

90 respuestas de 37 participantes (30 chicos / 7 chicas)



A-033. Tabla de pares ordenados.

Fíjate bien cómo se forma esta tabla de pares ordenados de números naturales:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & & & & \\
(1,2) & (2,1) & & & \\
(1,3) & (2,2) & (3,1) & & \\
(1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Y ahora responde a estas dos cuestiones:

¿Qué par ordenado aparece en el décimo lugar de la trigésimo tercera columna?

· ¿Qué par ordenado aparece en el centro de la trigésimo tercera fila?

Solución

Habrás observado que en cada par ordenado, la primera componente nos dice la columna y la segunda componente la fila en la que se encuentra. Por tanto:

· el par ordenado que aparecerá en el décimo lugar de la trigésimo tercera columna es $\underline{(33,10)}$

· el par ordenado que aparecerá en el centro de la trigésimo tercera fila es $\underline{(17,17)}$ pues dicha fila es:

$$(1,33) \quad (2,32) \quad (3,31) \quad (4,30) \quad \ldots \quad (17,17) \quad \ldots \quad (33,1)$$

*Bien resuelto por: **Irene Navarro Espada** (IES Uno. Requena, **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Rubén Musoles Roca** (Villassar de Mar), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) y **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas)*

Se recibieron también una solución incompleta y otra incorrecta.

I-033. Distribución equitativa.

Ya conocerás la **sucesión de Fibonacci**, aquella en la que los dos primeros términos son 1 y, ya luego, los demás términos valen la suma de los dos que le preceden:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\ldots$$

¿Puedes distribuir sus 330 primeros términos en dos grupos con igual número de términos y que, a la vez, los términos que coloques en cada grupo sumen lo mismo? Si es que sí, indica cómo y, si no es posible, justifica bien porqué.

Solución

Sí, es posible. Como $330 = 6 \cdot 55$ vamos a hacer la siguiente distribución en cada uno de esos 55 bloques de seis términos que, claramente, cumple lo pedido:

Bloque 1º: 1, 1, 2, 3, 5, 8			
	Al grupo I: 1,1 y 8	Al grupo II: 2 y 3, 5	Suma: 10
Bloque 2º: 13, 21, 34, 55, 89, 144			
	Al grupo I: 13, 21 y 144	Al grupo II: 34 y 55, 89	Suma: 178

… … … …

Bloque nº: $a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b$			
	Al grupo I: a, b y $3a+5b$	Al grupo II: $a+b$ y $a+2b$, $2a+3b$	Suma: $4a+6b$

Hemos metido tres términos de cada bloque de seis en cada grupo asegurándonos de que la suma de cada terna sea la misma, por tanto, en cada grupo tenemos el mismo número de términos, 165, y la suma de los términos de cada grupo es la misma.

*Bien resuelto por: **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Víctor de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Ana Lozano Miguel** (IES Uno. Requena), **Marina Torres Roldán** (IES Torre Atalaya. Málaga), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menr. Torre Pacheco), **Rubén Musoles Roca** (Villassar de Mar), **Darío Moreno Sánchez-Cogolludo** (E1-Sta Mª Expectación. Cuenca), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina) y **Pelayo Palacio Pérez** (IES Alpajés. Aranjuez)*

Se recibieron también una solución incompleta y otra incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

C-033. Término superindexado.

La sucesión de números naturales $a_1, a_2, a_3, \ldots$ forma una progresión aritmética. Si $a_1 = 10$, $a_{a_2} = 100$, ¿qué vale $a_{a_{a_3}}$?

Solución

Llamando d a la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera:

$$a_1 = 10 \qquad a_2 = 10 + d \qquad a_3 = 10 + 2d \qquad \ldots \qquad a_n = 10 + (n-1)d$$

Así: $100 = a_{a_2} = a_{10+d} = 10 + (9+d)d \rightarrow$

$90 = (9+d)d \rightarrow d = 6$ (solo naturales)

Luego nuestra progresión aritmética es:

$$a_1 = 10 \qquad a_2 = 16 \qquad a_3 = 22 \qquad \ldots \qquad a_n = 6n + 4$$

Por tanto: $a_3 = 22 \rightarrow a_{a_3} = a_{22} = 6 \cdot 22 + 4 = 136$ y, finalmente:

$$\underline{a_{a_{a_3}}} = a_{a_{22}} = a_{136} = 6 \cdot 136 + 4 = \underline{820}$$

*Bien resuelto por: **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Víctor de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Ana Lozano Miguel** (IES Uno. Requena), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Hugo Serrano Macías** (El Centro Inglés. Pto Sta Mª), **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid), **Cristina Ceaus** (IES Dunas de las Chapas. Marbella), **Javier Ruiz de Larriva** (Centro Inglés. Pto Sta María), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **Celso de Frutos de Nicolás** (Prim Jubilado. Coslada), **Julio J. Zárate Pinto** (IES La Bureba. Briviesca), **Alberto Fernández** (Colegio Pozo Nuevo. Rota), **Manuel Gómez Muñoz** (IES Castillo de la Yedra. Cazorla), **Weng Weizhe** (Luis Vives. Valencia), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Pelayo Palacio Pérez** (IES Alpajés. Aranjuez), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Juan Manuel Sánchez Hernández** (IESO Las Batuecas. La Alberca)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y dos incorrectas.

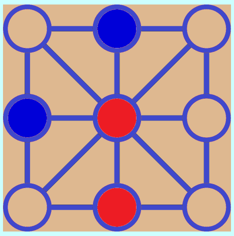
Juvenil (1º/2º Bachillerato)

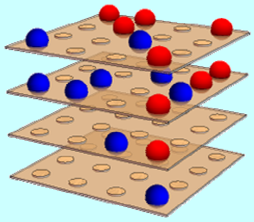
Jv-033. N en raya bi y tri dimensional.

¿De cuántas formas se pueden poner n fichas en línea en un tablero $n \times n$?

¿De cuántas formas se pueden poner n fichas en línea en una estructura cúbica $n \times n \times n$?

En la imagen tres en raya clásico y cuatro en raya tridimensional



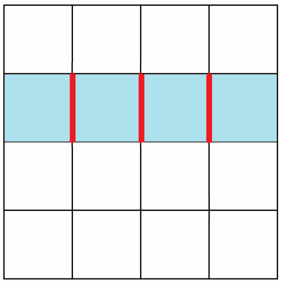


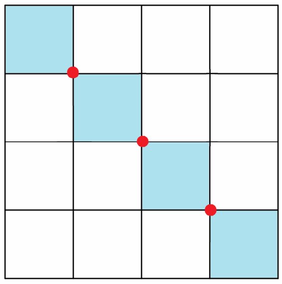
https://www.hjdgvdfds.tk/products.aspx?cname=3d+tic+tac+toe+marbles&cid=23

Solución

1ª cuestión:

Considerando el tablero con celdas cuadradas, podemos considerar dos tipos de alineaciones n en raya: cuando las celdas donde se sitúan las fichas comparten un lado o cuando comparten solo un vértice (en diagonal).

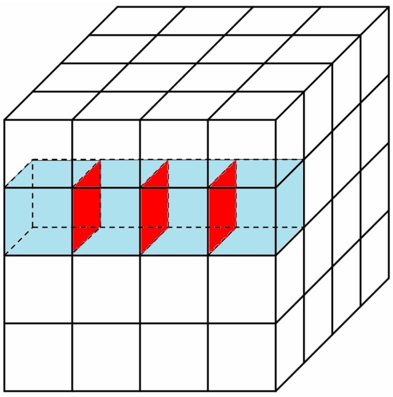


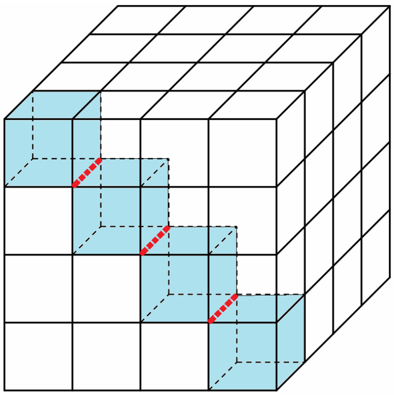


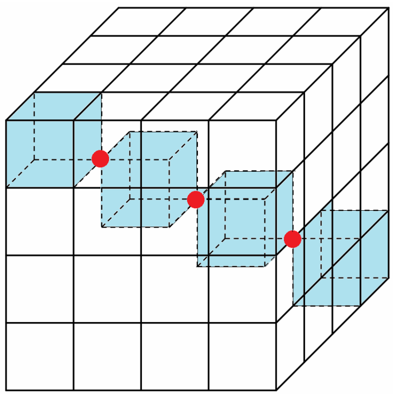
De las primeras habrá n en horizontal y n en vertical y de las segundas dos, las dos diagonales. En total: $\underline{2n+2}$

2ª Cuestión:

Considerando el tablero con celdas cúbicas, podemos considerar tres tipos de alineaciones n en raya: cuando las celdas donde se sitúan las fichas comparten una cara, cuando comparten una arista o cuando comparten sólo un vértice.







De las primeras hay $\underline{3n^2}$:

las que unen las n^2 celdas de cada par de caras opuestas, 6/2, en las tres direcciones del espacio

De las segundas hay $\underline{6n}$:

las que unen las n celdas de cada par de aristas opuestas, 12/2.

De las terceras hay $\underline{4}$:

Las que unen las celdas de cada par de vértices opuestos, 8/2.

En total: $\underline{3n^2+6n+4}$

Bien resuelto por: ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Víctor de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Ana Lozano Miguel*** *(IES Uno. Requena),* ***Rubén Musoles Roca*** *(Villassar de Mar),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Weng Weizhe*** *(Luis Vives. Valencia),* ***Javier Suárez Godoy*** *(IES Mesa y López. Las Palmas) y* ***Juan Manuel Sánchez Hernández*** *(IESO Las Batuecas. La Alberca)*

Se recibieron también cuatro soluciones incompletas y una incorrecta.

Júnior

Jn-033. Ternas expresivas.

Determinar cuántas ternas de enteros positivos (a,b,c) cumplen la expresión:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$

Solución

En principio, supongamos, y sin pérdida de generalidad, que $a \le b \le c$

Si los tres números son mayores que 3, entonces $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \le \left(\frac{4}{3}\right)^3 < 3$, por tanto, a, el menor de ellos sólo puede ser 1 o 2

$\underline{a=1} \rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2}$

Si $b=1$, entonces: $\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad c=-4$ que no es entero positivo

Si $b=2$, entonces: $\left(1+\frac{1}{c}\right)=1 \quad \rightarrow \quad$ sin solución

Si $b>2$, entonces: $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2} \rightarrow$ Operando $\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{3b}{2(b+1)} \rightarrow$

$\frac{1}{c}=\frac{3b}{2b+2}-1=\frac{b-2}{2b+2}=\frac{b-2}{2(b-2)+6} \rightarrow c=2+\frac{6}{b-2}$ y para que sea positivo y el mayor de los tres $\underline{b=3}$ y $\underline{c=8}$ ó $\underline{b=4}$ y $\underline{c=5}$

$b=5$ *y* $b=8$ *dan, respectivamente,* $c=4$ *y* $c=3$ *que sí, es un entero positivo pero no es el mayor de la terna.*

$\underline{a=2} \rightarrow \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2$. Y, de nuevo, operando: $\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{2b}{b+1}$

$$\frac{1}{c}=\frac{2b}{b+1}-1=\frac{b-1}{b+1}=\frac{b-2}{(b-1)+2} \quad \rightarrow \quad c=1+\frac{2}{b-1}$$ y para que sea entero positivo y el mayor de los tres $b=2$ y $c=3$

$b=3$ da $c=2$ que sí, es un entero positivo pero no es el mayor de la terna.

Entonces, las ternas serían <u>(1, 3, 8), (1, 4, 5), (2, 2, 3) y cualquier permutación de sus respectivas componentes</u>, esto es, seis en el primer caso, seis en el segundo y tres en el tercero. Total, <u>15 ternas</u> de enteros positivos cumplen la expresión dada.

*Bien resuelto por: **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Alberto Fernández de Marcos** (Colegio Nazaret-Oporto), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Pablo Sáez Reyes** (IES Núñez de Arce. Valladolid),*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y tres incorrectas.

Sénior

S-033. Potencia de los cuatro cuatros.

Sea $S(x)$ la suma de las cifras de x natural. Determinar $S(S(S(4444^{4444})))$

<u>Solución</u>

· La suma de las cifras de un número es congruente a éste módulo 9: <u>n≡S(n) mod 9</u> (regla de divisibilidad por 9). Así: $4444 \equiv S(4444) \equiv 16 \equiv 7 \mod 9$

Si no caes en este hecho, no importa, lo puedes calcular normalmente: $4444=9\cdot 493+7 \equiv 7 \equiv -2 \mod 9$

Aplicándolo reiteradamente:

$$S(S(S(4444^{4444}))) \equiv S(S(4444^{4444})) \equiv S(4444^{4444}) \equiv 4444^{4444} \equiv 7 \mod 9$$

· El **Teorema de Euler** afirma que: Si a y n son coprimos, entonces $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ siendo el número n un entero positivo y $\varphi(n)$ la **función de Euler** que nos proporcional la cantidad de enteros m positivos menores que n coprimos con n, esto es, primos entre sí, o lo que es lo mismo tales que $mcd(m,n)=1$. Y, así, como los números 4444 y 9 son primos entre sí y $\varphi(9)=Card\{1,2,4,5,7,8\}=6$, tenemos que $4444^6 \equiv 1 \mod 9$. Y, de aquí, como $4444=4440+4=6\cdot 740+4$ es fácil ver que: $\underline{4444^{4444} \equiv 7 \mod 9}$:

$$4444^{4444} \equiv \left(4444^6\right)^{740} \cdot 4444^4 \equiv 1^{740}\cdot 7^4 \equiv 1\cdot(-2)^4 = 16 \equiv 7 \mod 9$$

· Llamando $N = 4444^{4444}$, lo que sigue a continuación son simples acotaciones sucesivas de las sumas de cifras:

$$\log N = \log 4444^{4444} = 4444 \cdot \log 4444 < 4444 \cdot 4 < 20000 .$$

Esto es, N tiene menos de 20000 cifras, por lo que $S(N) < 9 \cdot 20000 = 180000$

El número con mayor suma de cifras que hay entre 0 y 180000 es el 99999. Luego, $S(S(N)) \leq 9 \cdot 5 = 45$.

Finalmente, el número con mayor suma de cifras que hay entre 0 y 45 es el 39. Luego, $S(S(S(N))) \leq 3 + 9 = 12$

Por tanto, como esta suma de cifras es positiva: $0 \leq S(S(S(N))) \leq 12$ y, como vimos antes, $S(S(S(N))) = 7$ mod 9, deducimos que, necesariamente, $\underline{S(S(S(N))) = 7}$

Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Carles Virgili Borrel*** *(Andorra la Vella),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* ***Sergio Sánchez Zufia*** *(Navarra),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba) y* ***Juan Manuel Sánchez Hernández*** *(IESO Las Batuecas. La Alberca)*

Se recibió también una solución incompleta.