Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Mayo – 2023

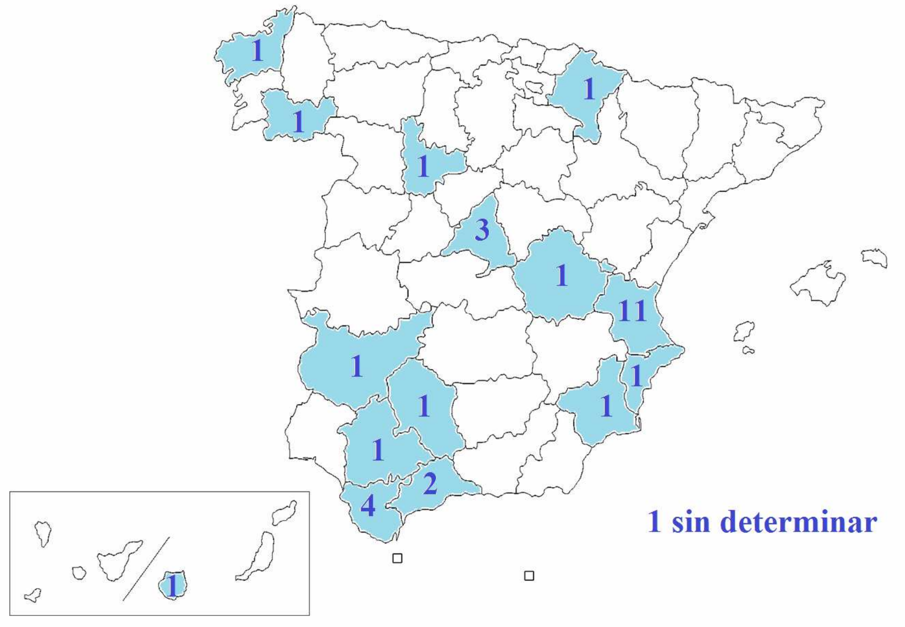
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
032	✓	✓	✓	✓	✓	✓
033	✓	✓	✓	✓	✓	✓
034	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

60 respuestas de 32 participantes (24 chicos / 8 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-034. Capataz avispado.

El capataz de una obra contrata 10 obreros para realizarla en una semana, de lunes a viernes. Una vez visto el trabajo hecho el lunes, se da cuenta que no le va a dar tiempo y contrata a un obrero más. Acabado el martes, vuelve a observar que será imposible acabar en el plazo y contrata a un obrero más. Lo mismo le ocurre al acabar el miércoles y al acabar el jueves, de modo que, teniendo cada día un obrero más que el día anterior, acaba la obra al finalizar el viernes como estaba programado. ¿Cuántos obreros debería haber contratado inicialmente para acabar la obra el viernes sin tener que hacer más contrataciones durante la semana?

Solución:

El Lunes trabajaron 10 obreros; el Martes, 11; el Miércoles, 12; el Jueves; 13 y, finalmente, el Viernes, 14 obreros.

Si entendemos que una jornada de trabajo es el trabajo que hace una persona durante un día, podemos concluir que el total de jornadas de trabajo necesarias para acabar el viernes como estaba programado fueron: $10+11+12+13+14=60$

Por tanto, para acabar en cinco días, se hubieran necesitado $60/5=$ 12 obreros.

*Bien resuelto por: **Samuel Dussart Pedrón** (IES Uno. Requena), **Irene Navarro Espada** (IES Uno. Requena), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA MM. Torre Pacheco), **Carlota Dávila Broseta** (Domus. Godella), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Hugo Hernández Climent** (IES Oleana. Requena), **Francisco Burgos Valle** (E4-IES Oleana), **Mª del Rocío Rotili Guillén** (P5-CEIP. Villafranca de los Barros), **Pelayo Palacio Pérez** (IES Alpajés. Aranjuez), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Alfonso Gadea Mayo**(Valladolid), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina) y **Héctor Ariño Leal** (C. Nuestra Señora de las Nieves Madrid)*

Infantil (1º/2º ESO)

I-034. A, b y c primos.

Determina todos los números $\overline{abc}$ de tres cifras, sabiendo que cada una de ellas es un número primo y, además, que $2a+3b+6c+6c^2=348$

Solución

Tres términos del primer miembro de la igualdad son claramente pares, pues llevan coeficiente par. El cuarto término con coeficiente impar, $3b$, también ha de serlo pues el total, 348, también es par. Por tanto, $\underline{b=2}$, único número primo par.

Así, $2a+3\cdot 2+6c+6c^2=348 \;\rightarrow\; 2a+6c+6c^2=342 \;\rightarrow\; a+3c+3c^2=171$

De nuevo, dos términos del primer miembro de la igualdad son claramente múltiplos de tres y, el tercero, a, también ha de serlo pues el total, 171, también es múltiplo de tres. Por tanto, $\underline{a=3}$

Con todo: $3+3c+3c^2=171 \rightarrow 3c+3c^2=168 \rightarrow c+c^2=56 \rightarrow c(c+1)=56$

Por tanto, $\underline{c=7}$

Luego el único número de tres cifras que cumple lo pedido es: $\underline{\overline{abc}=327}$

Bien resuelto por: ***Samuel Dussart Pedrón*** *(IES Uno. Requena),* ***Irene Navarro Espada*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA MM. Torre Pacheco),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Hugo Hernández Climent*** *(IES Oleana. Requena),* ***Francisco Burgos Valle*** *(E4-IES Oleana),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES Alpajés. Aranjuez),* ***Xunuo Huang*** *(C Juan XXIII. Burjassot),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Iván López Márquez*** *(Colegio Inmaculada. Alicante),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Javier Suárez Godoy*** *(IES Mesa y López. Las Palmas),* ***Alfonso Gadea Mayo*** *(Valladolid),* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina),* ***Rubén Ortí Pascual*** *(IES Luis Vives. Valencia)*

Cadete (3º/4º ESO)

C-034. Capataz diligente.

Para hacer una obra en 40 días, el capataz contrata k obreros. Cuando han hecho la mitad del trabajo, el capataz libera a un obrero para hacer otras tareas. Cuando los obreros que han quedado han realizado la mitad de lo que quedaba de la obra, el capataz vuelve a liberar a un obrero. Sabiendo que al haber liberado a estos dos obreros se ha producido un retraso de 7 días en la realización de la obra, ¿cuántos obreros había inicialmente?

<u>*Solución*</u>

Como los k obreros acabarían la obra en 40 días, hacen falta $40k$ jornadas de trabajo para acabarla *(Nota: Entiéndase que una jornada de trabajo es el trabajo que hace una persona durante un día).*

Cuando han hecho la mitad del trabajo, es decir, $20k$ jornadas en $\underline{20}$ días y les quedan otras $20k$ jornadas por trabajar, la cantidad de obreros se reduce a $k-1$.

Los $k-1$ obreros tardarían $\dfrac{20k}{k-1}$ días en acabar las $20k$ jornadas que tenían pendientes. Pero hacen la mitad de lo que quedaba de obra, es decir, $10k$ jornadas en $\underline{\dfrac{10k}{k-1}}$ días. Y, finalmente, quedan $k-2$ obreros para hacer las $10k$ jornadas restantes, por lo que tardarán $\underline{\dfrac{10k}{k-2}}$ días.

La cantidad total de días será: $20+\dfrac{10k}{k-1}+\dfrac{10k}{k-2}$ y como se ha producido un retraso de 7 días, son 47 días, esto es:

$$20+\frac{10k}{k-1}+\frac{10k}{k-2}=47 \rightarrow \frac{10k}{k-1}+\frac{10k}{k-2}=27 \rightarrow$$

$$10k(2k-3)=27(k-1)(k-2) \rightarrow 0=7k^2-51k+54 \rightarrow k=\begin{cases}6\\9/7\end{cases}$$

Por tanto, inicialmente había <u>6 trabajadores</u>.

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA MM. Torre Pacheco),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES Alpajés. Aranjuez),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Javier Ruiz de Larriva*** *(Centro Inglés. Pto Sta María),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Ourense),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Javier Suárez Godoy*** *(IES Mesa y López. Las Palmas),* ***Alfonso Gadea Mayo*** *(Valladolid),* ***Weng Weithe*** *(Luis Vives. Valencia),* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina),* ***Eva Barrera Vázquez*** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María) y* ***Antonio García Mulero*** *(Centro Inglés. Pto Sta María),* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena) y* ***Carlos Navarro Guijarro*** *(IES P Castilla. Minglanilla)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-034. Sistema tres, uno, cuatro.

Siendo que x, y, $z \in \Re$ y $x+y+z>0$, resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\y^2+yz+z^2=1\\z^2+zx+x^2=4\end{cases}$$

<u>*Solución*</u>

Restando ecuaciones:

$$1^a\text{–}2^a: \quad x^2-z^2+xy-yz=2 \rightarrow (x-z)(x+z+y)=2$$

$$3^a\text{–}1^a: \quad z^2-y^2+zx-xy=1 \rightarrow (z-y)(z+y+x)=1$$

Dividiendo ambas expresiones: $\dfrac{x-z}{z-y}=2 \rightarrow x-z=2z-2y \rightarrow x=3z-2y$

Substituyendo en la 1^a:

$$x^2+xy+y^2=(9z^2-12zy+4y^2)+(3zy-2y^2)+y^2=3y^2-9zy+9z^2=3$$

que simplificando: $y^2-3yz+3z^2=1$ y restando de 2^a: $y^2+yz+z^2=1$ nos queda: $4yz-2z^2=0 \rightarrow 2z(2y-z)=0$ lo que nos lleva a dos posibilidades:

I: $\underline{z=0}$

De 2^a: $y^2=1 \rightarrow y=\pm 1$ / De 3^a: $x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$.

Y volviendo a 1^a: $4+xy+1=3 \rightarrow xy=-2$ lo que obliga a ambas a tener signos distintos. Esto es: $x=2\quad y=-1\quad z=0$ ó $x=-2\quad y=1\quad z=0$, pero ésta última no vale, pues no cumple que $x+y+z>0$.

Por tanto, en este caso, la única solución es: $\underline{x=2\quad y=-1\quad z=0}$

II: $\underline{z=2y}$

De 2^a: $y^2+y\cdot 2y+(2y)^2=1 \rightarrow 7y^2=1 \rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$ y $z=\pm\frac{2}{\sqrt{7}}$

Así, $\frac{1}{7}+yz+\frac{4}{7}=1 \rightarrow yz=\frac{2}{7}$ lo que obliga a ambas a tener signos iguales.

Y como $x=3z-2y=\begin{cases}\frac{6}{\sqrt{7}}-\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}\\ \frac{-6}{\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{-4}{\sqrt{7}}\end{cases}$ válida solo la primera que es la que cumple la hipótesis de $x+y+z>0$

Por tanto, en este caso, la única solución es: $\underline{x=\frac{4}{\sqrt{7}}\quad y=\frac{1}{\sqrt{7}}\quad z=\frac{2}{\sqrt{7}}}$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA MM. Torre Pacheco) y **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba)*

Se recibieron también una solución incompleta y una incorrecta.

Júnior

Jn-034. Embarazosa exponencial.

Busca todos los $(x,y)\in\Re^2$ que satisfacen esta embarazosa ecuación exponencial:

$$4^{x^2+4y}+4^{y^2+4x}=2^{-7}$$

Solución

No es para tanto. Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica:

$$4^{x^2+4y}+4^{y^2+4x}\geq 2\cdot\sqrt{4^{x^2+4y}\cdot 4^{y^2+4x}}=2\cdot\sqrt{4^{x^2+y^2+4x+4y}}=$$
$$=2\cdot\sqrt{2^{2\cdot(x^2+y^2+4x+4y)}}=2\cdot 2^{x^2+y^2+4x+4y}=$$
$$=2\cdot 2^{(x+2)^2+(y+2)^2-8}=2^{(x+2)^2+(y+2)^2-7}\geq 2^{-7}$$

Y la igualdad sólo será posible cuando $\underline{x=y=-2}$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA MM. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba) y **J Carlos L** (politecmática)*

Sénior

S-034. Camayorqueuno.

Demuestra que si $k>1$, para todo $\alpha\in\Re$ se verifica:

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{k}+\frac{\sin 2\alpha}{k^2}+\frac{\sin 3\alpha}{k^3}+\frac{\sin 4\alpha}{k^4}+\ldots\ldots}{\frac{\cos\alpha}{k}+\frac{\cos 2\alpha}{k^2}+\frac{\cos 3\alpha}{k^3}+\frac{\cos 4\alpha}{k^4}+\ldots\ldots}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\frac{1}{k}}$$

Solución

Sea la sucesión: $a_n=\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{k}\right)^n$

Por un lado, por la fórmula de De Moivre, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{k}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{k^n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{k^n}$$

Por los que el numerador de la expresión a calcular es la parte imaginaria de la expresión anterior, y el denominador, la parte real.

Y por otro lado, $a_n = \left(\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{k}\right)^n$ es una progresión geométrica con módulo de su razón entre 0 y 1, por lo que suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{k}\right)^n = \frac{\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{k}}{1-\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{k}} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{k-\cos\alpha - i\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{k-\cos\alpha - i\sin\alpha}\cdot\frac{k-\cos\alpha + i\sin\alpha}{k-\cos\alpha + i\sin\alpha} =$$

$$= \frac{k\cos\alpha - \cos^2\alpha + -\sin^2\alpha + ik\sin\alpha}{(k-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{k\cos\alpha - 1}{k^2+1-2k\cos\alpha} + i\frac{k\sin\alpha}{k^2+1-2k\cos\alpha}$$

Por tanto:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{k^n}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{k^n}} = \frac{\frac{k\sin\alpha}{k^2+1-2k\cos\alpha}}{\frac{k\cos\alpha-1}{k^2+1-2k\cos\alpha}} = \frac{k\sin\alpha}{k\cos\alpha - 1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \frac{1}{k}}$$

q.e.d.

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco) que nos advierte con tino que la expresión del problema no está bien definida, al menos el miembro de la derecha, si cos(α)=1/k,* ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***Sergio Sánchez Zufia*** *(Navarra),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Antonio José Arjona Moreno*** *(IES Tolosa. La Linea de la Concepción) y* ***Larry Andrés Matta Plaza*** *(Sevila. España)*