Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Junio – 2023

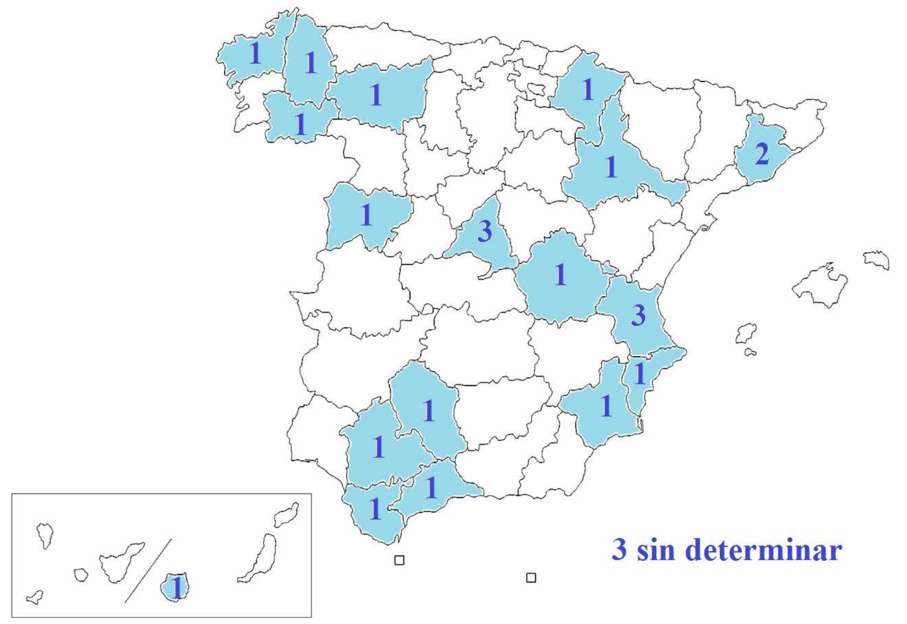
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
033	✓	✓	✓	✓	✓	✓
034	✓	✓	✓	✓	✓	✓
035	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

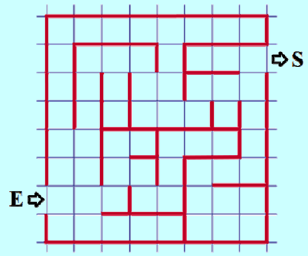
57 repuestas de 26 participantes (23 chicos / 03 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

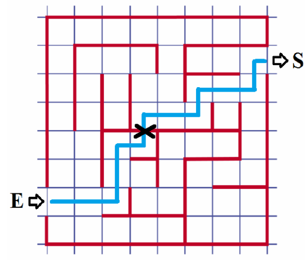
A-035. El laberinto de Mateaventura.

He aquí el plano detallado de un laberinto del parque temático de **Mateaventura**. Intenta atravesarlo, desde la entrada **E** hasta la salida **S**, por el camino más corto posible sabiendo que te dejan llevar una maza de un solo uso que te permitirá romper uno, uno solo, de los tabiques por los que transcurra tu trayecto. Y explica bien por qué ese camino que has elegido es el más corto posible.



Solución

Para atravesar el laberinto desde la entrada **E** hasta la salida **S**, hay que avanzar, como mínimo, 8 pasos a la derecha y 5 hacia arriba. Y, se puede lograr con, exactamente, $8+5=13$ pasos. Es fácil de ver, basta romper el tabique superior de la celda $(4, 4)$



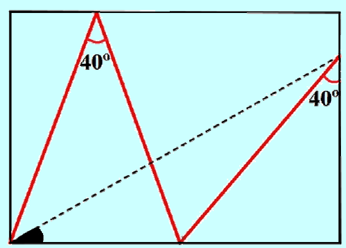
*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Samuel Dussart Pedrón** (IES Uno. Requena), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Pablo Morales Martín** (CEIP Agustín de Argüelles. Alcorcón), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas) y **Alicia Seijas Vázquez** (IES Xograr Afonso Gómez de Sarria)*

Se recibieron también tres soluciones incompletas.

Infantil (1º/2º ESO)

I-035. Línea roja quebrada.

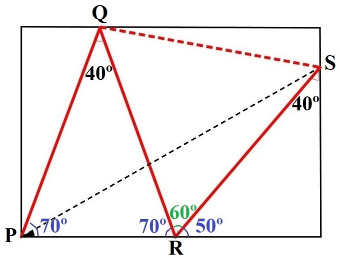
Los segmentos de la línea quebrada roja que te mostramos en el interior del rectángulo de la figura son todos de la misma longitud. También hemos señalado dos ángulos de 40º de amplitud. Con estos datos, ¿puedes deducir qué mide exactamente el ángulo ensombrecido?



Solución

Sean, P, Q, R y S los extremos de los segmentos de la línea quebrada. $PQ = QR = RS$

Vemos que los dos primeros forman con la base del rectángulo un triángulo isósceles de ángulos: $70°:40°:70°$ y que el tercero forma con los lados del rectángulo un triángulo rectángulo de ángulos $40°:90°:50°$. Así, el segundo y tercer segmento que confluyen en R forman un ángulo de $60°$, lo que le falta a $70°+50°$ para forman un llano. Luego, QRS resulta ser claramente un triángulo equilátero: $QS = QR = RS$

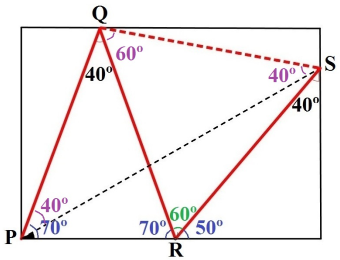


Con todo: $PQ = QS$ y, por tanto, PQS también es isósceles con ángulos: $40°:100°:40$

Así, como bien vemos en la figura, el ángulo ensombrecido mide:

$$\angle SPR = \angle QPR - \angle QPS = 70° - 40° = 30°$$

$$\underline{\angle SPR = 30°}$$



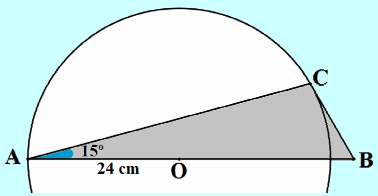
Bien resuelto por: ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Orense),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Javier Suárez Godoy*** *(IES Mesa y López. Las Palmas),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Xograr Afonso Gómez de Sarria),* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina),* ***Bianca Sandoaia Ion*** *(Zaragoza) y* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

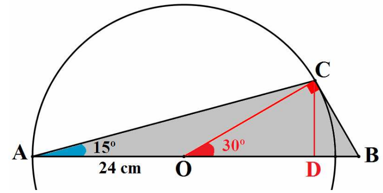
C-035. Triángulo escorado.

Halla el área del triángulo ABC de ángulo conocido $\hat{A} = 15°$ y siendo su lado BC, como muestra la figura, tangente a la circunferencia con centro en el punto O y radio 24 cm.



Solución

El ángulo $\hat{A} = 15°$ es inscrito, por tanto, el ángulo central que abarca el mismo arco medirá 30º. Así, como el lado BC es tangente a la circunferencia, el triángulo OCB es un cartabón esto es, medio triángulo equilátero:



un triangulo con ángulos 30º, 60º y 90º y lados en proporción: $1:\sqrt{3}:2$. En nuestro caso concreto, como el radio es 24 cm: $BC = 8\sqrt{3}$, $OC = 24$, $OB = 16\sqrt{3}$.

Y, mirando la figura, con D el pie de la altura trazada desde C, el triangulito OCD también es un cartabón y, por tanto, $CD = 12$.

Con todo esto, ya podemos calcular el área.

$$\underline{[ABC]} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{(24+16\sqrt{3}) \cdot 12}{2} = \underline{144 + 96\sqrt{3}} \text{ cm}^2$$

Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Orense),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Javier Ruiz de Larriva*** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Javier Suárez Godoy*** *(IES Mesa y López. Las Palmas),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Xograr Afonso Gómez de Sarria),* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina),* ***Bianca Sandoaia Ion*** *(Zaragoza) y* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-035. Ene se va por la tangente.

Dada esta relación trigonométrica: $(1+\tan 1°)\cdot(1+\tan 2°)\cdot \ldots \cdot(1+\tan 45°) = 2^n$, determina el valor de n.

Solución-1

El último factor vale 2: $1 + \tan 45° = 2$

Y, los demás, emparejándolos así, también:

$$(1+\tan\alpha)\cdot[1+\tan(45°-\alpha)] = (1+\tan\alpha)\cdot\left[1+\frac{\tan 45° - \tan\alpha}{1+\tan 45° \cdot \tan\alpha}\right] =$$

$$= (1+\tan\alpha)\cdot\left[1+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right] = 1+\tan\alpha+1-\tan\alpha = 2$$

con $\alpha = 1°, 2°, \ldots, 22°$

Por tanto: $(1+\tan 1°)\cdot(1+\tan 2°)\cdot \ldots \cdot(1+\tan 45°) = 2^{22}\cdot 2 = 2^{23}$, esto es, $\underline{n = 23}$

Solución-2

Haciendo uso de la expresión:

$$1+\tan\alpha = 1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(90^\circ-\alpha)+\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot \operatorname{sen}45^\circ\cdot\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$$

Y, análogamente: $1+\tan(45^\circ-\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{\cos(45^\circ-\alpha)}$

Por tanto: $(1+\tan\alpha)\cdot[1+\tan(45^\circ-\alpha)] = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{\cos(45^\circ-\alpha)} = 2$

Y, así, de nuevo: $(1+\tan 1^\circ)\cdot(1+\tan 2^\circ)\cdot\ldots\cdot(1+\tan 45^\circ) = 2^{22}\cdot 2 = 2^{23}$

Luego $\underline{n = 23}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Alba López Gabaldón*** *(IES Mª Blasco. San Vicente del Raspeig),* ***Roger Fernández Lopera*** *(Tordera),* ***J Carlos L*** *(Politecmática),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Xograr Afonso Gómez de Sarria) y* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina)*

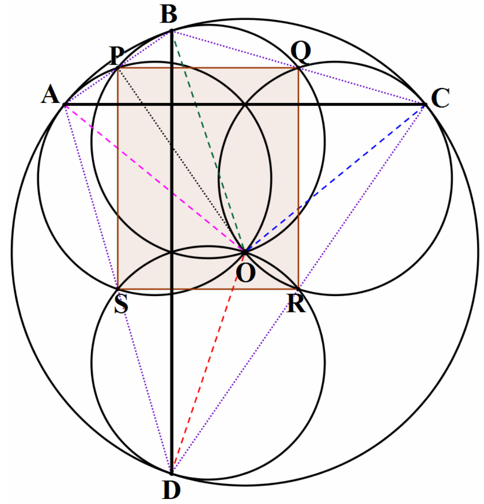
Jn-035. El dibujo lo haces tú.

Sí, el dibujo lo haces tú. De entrada, traza una circunferencia con centro en el punto **O** y marca dos cuerdas **AC** y **BD** perpendiculares entre sí. Y, luego, también:

- Los círculos de diámetros **OA** y **OB** que se cortan, además de en **O**, en el punto **P**.
- Los círculos de diámetros **OB** y **OC** que se cortan, además de en **O**, en el punto **Q**.
- Los círculos de diámetros **OC** y **OD** que se cortan, además de en **O**, en el punto **R**.
- Los círculos de diámetros **OD** y **OM** que se cortan, además de en **O**, en el punto **S**.

Con todo, demuestra que el cuadrilátero **PQRS** es un rectángulo

Solución



· Veamos que **P** es el punto medio de la cuerda o segmento **AB**:

Como **P** está en la circunferencia de diámetro **OA**, sabemos que $\angle OPA = 90^\circ$

Como **P** está en la circunferencia de diámetro **OB**, sabemos que $\angle OPB = 90^\circ$

Luego $\angle APB = 180^\circ$, es decir, los puntos **A**, **P** y **B** están alineados y **OP** es perpendicular a la cuerda **AB**. Y, como el triángulo **AOB** es isósceles, **P** es el punto medio del segmento **AB**.

Igualmente se puede ver que **Q** es el punto medio del segmento **BC**.

Así, fijándonos en el triángulo **ABC**, si unimos los puntos medios de dos de sus lados, **P** de **AB** y **Q** de **BC**, obtenemos una paralela al otro lado, a **AC**, esto es, una **paralela media** del triángulo. Hemos visto, en definitiva, que <u>**PQ** es paralelo a **AC**</u>.

Análogamente, viendo que **R** y **S** son los puntos medios de los segmentos **CD** y **DA** respectivamente, se puede deducir que también <u>**RS** es paralelo a **AC**</u>.

· Con similar razonamiento, podemos deducir que <u>**PS** y **QR** son paralelos a **BD**</u>.

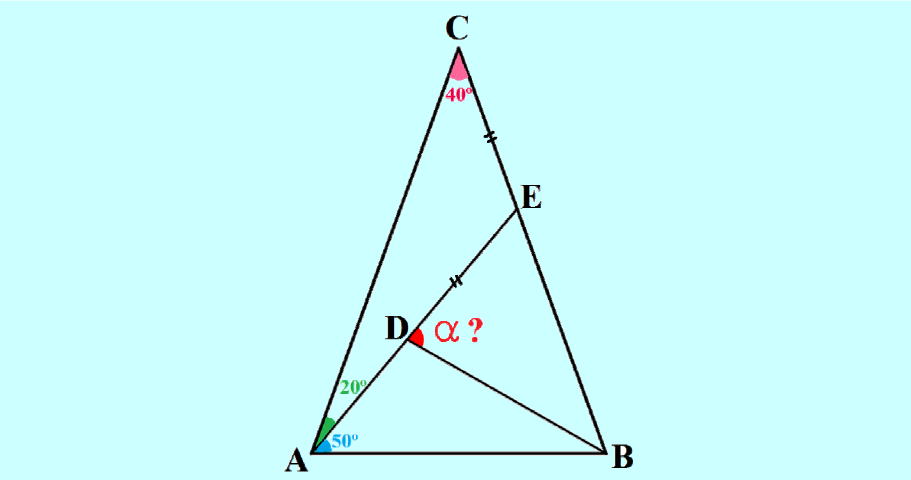
· En conclusión **PQRS** es un rectángulo c.q.d.

Bien resuelto por: ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Orense),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba) y* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Xograr Afonso Gómez. Sarria)*

Se recibió también una solución incompleta.

Sénior

S-035. A por alfa.



Solución de Ramón Esteban (UVEG)

· Como $\angle EAC = 20°$ y $\angle ACE = 40°$, tenemos que $\angle CEA = 120°$

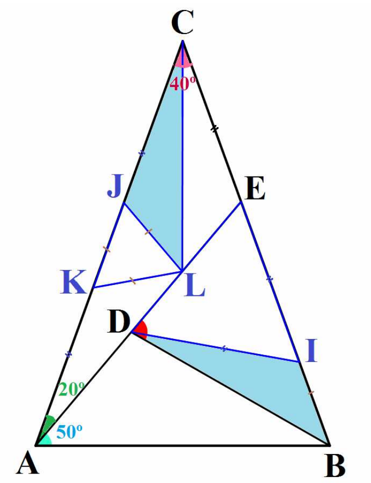
· Consideremos L el punto de corte de la bisectriz interior del $\angle ACE$ con AE.

Como $\angle ACL = 20°$ y $\angle LAC = 20°$, el triángulo ACL es isósceles: $LA = LC$

· Construimos los puntos J y K en el lado AC de modo que $\angle LJC = \angle AKL = 120°$.

Obtenemos que los triángulos LJC y AKL son congruentes entre sí y, también, con el triángulo LCE.

Además, el triángulo JLK es equilátero: $JK = KL = JL$. Por tanto, $AC = 2 \cdot CJ + JK$



· Construimos ahora el punto I del lado BC de manera que $\angle IDE = 60°$.

Como $\angle DEI = 60°$, el triángulo DEI es equilátero y $EI = ID = DE = EC = CJ$. Así, concluimos que $2 \cdot CJ + JK = AC = BC = 2 \cdot EC + IB$ con lo que $IB = JK$ y además que $\angle DIB = \angle LJC = 120°$. Esto nos lleva a que los triángulos BDI y LJC son congruentes. En particular, $\angle BDI = \angle JCL = 20°$

Por consiguiente: $\underline{\alpha} = \angle BDE = \angle BDI + \angle IDE = 20°+60° = \underline{80°}$

*Bien resuelto por: **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES JS. Arganda del Rey), **César Gil Espinasa** (Esplugues de LLobregat Barcelona), **Sergio Sánchez Zufia** (Navarra), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Orense), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **José Antonio Rama López** (Santiago de Compostela), **J Carlos L** (Politecmática), **Larry Andrés Matta Plaza** (Sevila), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Xograr Afonso Gómez. Sarria) y por otro participante sin identificar.*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.