Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Julio/Agosto – 2023

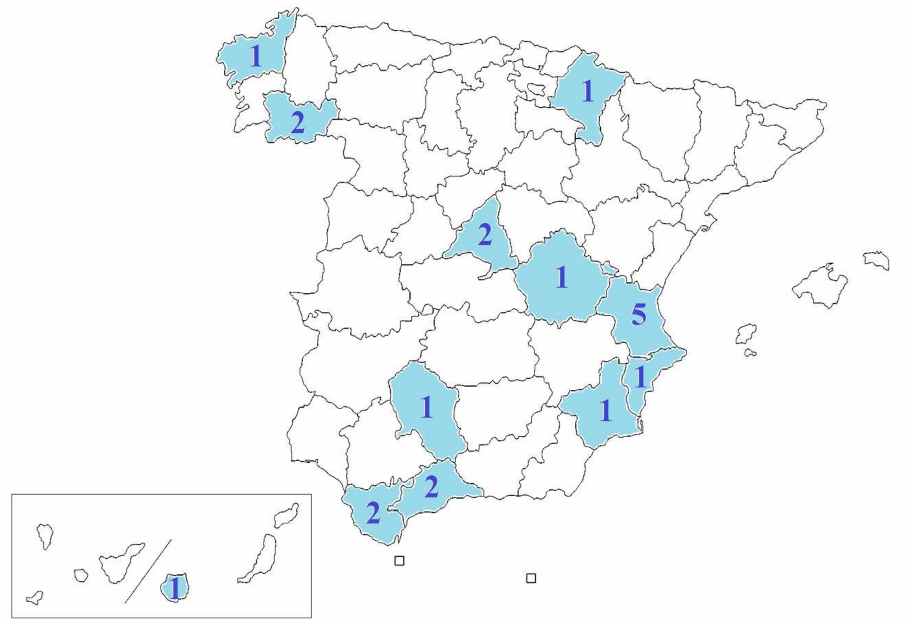
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
034	✓	✓	✓	✓	✓	✓
035	✓	✓	✓	✓	✓	✓
036	✓		✓		✓	

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

32 respuestas de 20 participantes (19 chicos / 1 chica)



Alevín (5º/6º Primaria) / Infantil (1º/2º ESO)

A-036 / I-036. Tarjetas numeradas.

Dispones de estos cuatro tipos de tarjetas numeradas:

1 **4** **7** **10**

Eligiendo 10 tarjetas, de forma que tengas de todos los tipos, ¿de cuántas formas puedes conseguir que sumen exactamente, en honor al número del problema, 36.

Solución-1

Como hay que elegir de todos los tipos, con una de cada, ya sumamos 22. Así, faltan por elegir 6 tarjetas para sumar 14.

- Eligiendo la de 10, no podríamos obtener los 4 restantes con tres tarjetas
- Sin elegir la de 10, como mucho podemos elegir una de 7 *(con dos de 7 lo habríamos logrado pero empleando sólo 6 monedas).* Así sumamos 29 con 5 tarjetas y no hay forma de sumar los 7 restantes con 5 tarjetas más.
- Y, finalmente, sólo con tarjetas de $\boxed{1}$ y $\boxed{4}$ podemos lograr 14 de estas únicas cuatro formas:

$\boxed{1}$	14	10	6	2	
$\boxed{4}$	0	1	2	3	
Total	14	11	8	5	nunca con 6 tarjetas

En conclusión, con 10 tarjetas, de forma que tengamos de todos los tipos, <u>no hay forma alguna</u> de conseguir sumar exactamente 36.

Solución-2

- Observemos que todas las tarjetas llevan inscrito un número que divido por tres deja resto uno, esto es, todas llevan inscrito un número múltiplo de tres más uno.

La suma de los números de diez tarjetas de este tipo nos dará un número múltiplo de tres más diez, esto es, un número múltiplo de tres más uno *(diez también deja resto uno al dividirse por tres)*, nunca un múltiplo de tres como es 36. Por tanto, no hay <u>ninguna forma</u> de que con diez de estas tarjetas obtengamos esa suma.

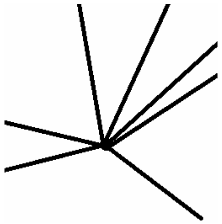
*Bien resuelto por: **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Bruno Martínez Vañó** (IES Cabañal. Valencia), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Darío Moreno Sánchez-Cogolludo** (Sta Mª Expectación. Cuenca), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Jubilado-Ourense), **Ander Bodegas Díez** (Valencia), **Javier González Pedrón** (IES La Eliana), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante) y **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas)*

Cadete (3º/4º ESO) / Juvenil (1º/2º Bachillerato)

C-036 / Jv-036. Ángulos alrededor de un punto.

Dibuja siete ángulos alrededor de un punto de forma que cubran, sin solapamiento alguno, todo el plano y que sus medidas en ángulos vengan dadas por números naturales que dejen el mismo resto al dividirse por quince. Prueba que, lo hagas como lo hagas, no podrás evitar que haya al menos dos ángulos de igual medida.

Solución



Sean a_i con $i = 1$ a 7 las medidas en grados de los siete ángulos. Como rodean sin solapamiento alguno todo el plano alrededor del punto donde confluyen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 360^\circ$$

Y como todos dejan el mismo resto al dividirse por quince:

$a_i = 15 \cdot c_i + r$ siendo todos los cocientes c_i números naturales para $i = 1$ a 7 y los restos $r \in \{0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, ..., 14^\circ\}$

Así: $360^\circ = 15 \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7) + 7r$

$$15 \cdot 24^\circ = 15 \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7) + 7r$$

y esto exige que $7r$ sea múltiplo de 15, lo que solo es posible si $r = 0^\circ$

Luego: $\underline{24^\circ = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7}$

Si los siete ángulos tuvieran una medida diferente en grados, entonces serian también diferentes estos siete cocientes. Y como la suma, en grados, de los siete naturales más pequeños es: $1^\circ+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ+6^\circ+7^\circ = 28^\circ > 24^\circ$, queda claro que, para cumplirse la igualdad, al menos dos de esos cocientes han de ser iguales y, por tanto, al menos dos ángulos han de tener la misma medida c.q.d.

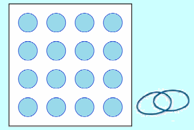
*Bien resuelto por: **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **David Ortí Pascual** (B1-IES Luis Vives. Valencia), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Javier Ruiz de Larriva** (Centro Inglés. Pto Sta María), **Cristina Ceaus** (ES Dunas de las Chapas. Marbella), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Ander Bodegas Díez** (Valencia), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina) y **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Júnior / Senior

Jn-036 / S-036. Evitando isosceles.

¿Cuál es el máximo número de clavos que se pueden escoger en un geoplano 4×4 de manera que la goma que envuelva a cualquier terna de ellos nunca forme un triángulo isósceles?. Prueba claramente que con ese número no es posible formar un triángulo isósceles, pero que con uno más, sí.

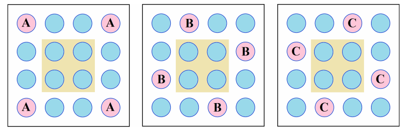


Solución

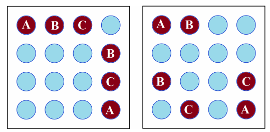
La respuesta es <u>seis</u>. Para probarlo distinguiremos dos casos:

Caso-I: Todos los clavos elegidos están en el perímetro exterior del geoplano

Distribuimos los doce clavos en tres conjuntos disjuntos A, B y C formando los vértices de tres cuadrados como se ve en la figura.

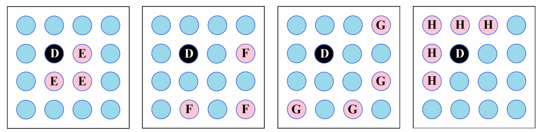


Obviamente, eligiendo tres en alguno de ellos, la goma que los envolvería formaría un triángulo isósceles. Luego, en este caso, el máximo número posible de clavos a elegir para que estar seguro de que no sean vértices de un triángulo isósceles serían seis, dos de cada conjunto, como se ve aquí en un par de ejemplos.

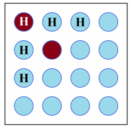


<u>Caso-II:</u> **Entre los clavos elegidos hay al menos uno en el interior del geoplano**

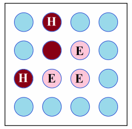
Ahora, análogamente como en el caso anterior, distribuimos los otros quince clavos en cinco conjuntos disjuntos, D, E, F, G y H como se ve en la figura.

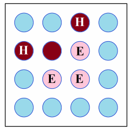


Fijémonos que, elegido sin pérdida de generalidad el vértice D, de los conjuntos E, F y G solo podemos elegir un clavo más, y del conjunto H, dos, para, así, evitar formar un triangulo isósceles. Luego, en este segundo caso, el máximo número posible de clavos a elegir para que estar seguro de que no sean vértices de un triángulo isósceles parece que también serían seis. Pero bastan **cinco**, pues la elección de los dos clavos en el conjunto H conlleva la imposibilidad de elegir en otro conjunto, por ejemplo en E como aquí vemos:



Elegir el clavo de la esquina colindante con el del interior impide escoger un segundo clavo de **H**, pues con cualquier otro se formaría siempre un triángulo isósceles





Y, lo mismo ocurre al elegir estos otros dos pares, menos intuitivos, de clavos del conjunto **H**, que no se evitaría formar un triángulo isósceles al escoger cualquier otro clavo de **E**.

Bien resuelto por: ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***Ander Bodegas Díez*** *(Valencia)*

Se recibieron también cuatro soluciones incompletas y dos incorrectas.