Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Septiembre – 2023

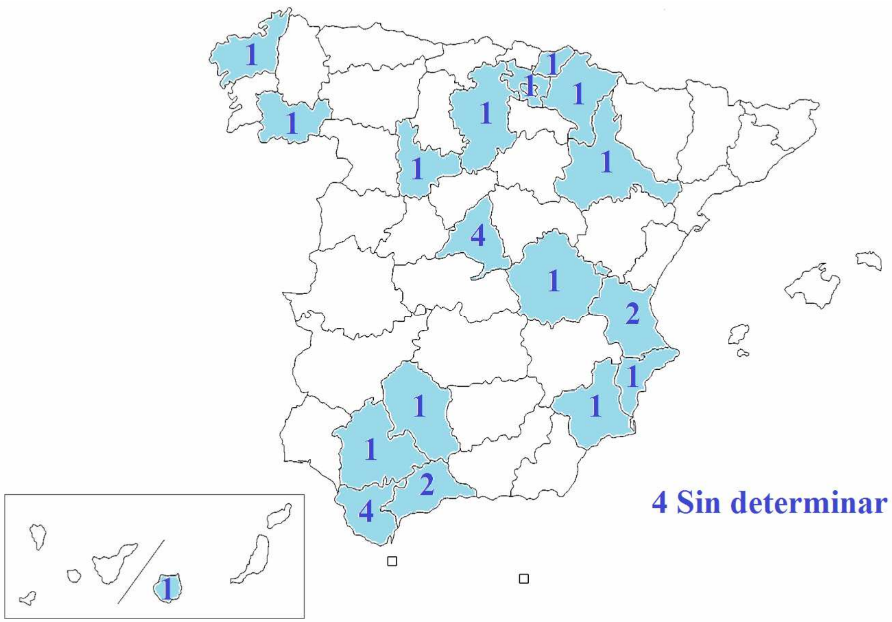
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
035	✓	✓	✓	✓	✓	✓
036	✓		✓		✓	
037	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

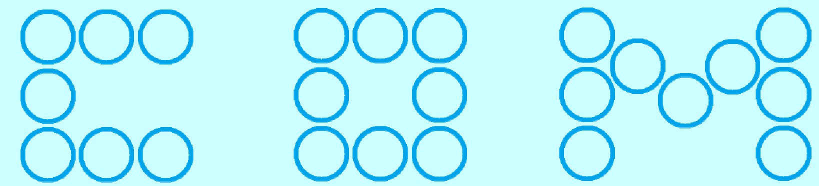
66 respuestas de 30 participantes (27 chicos / 3 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

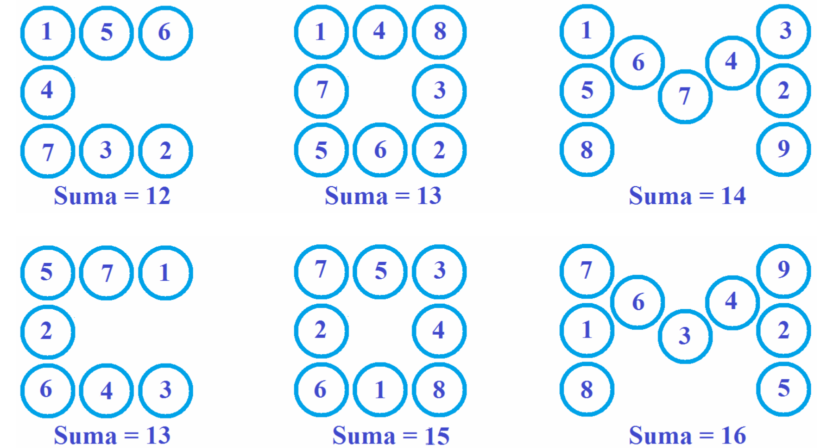
A-037. Letras C, O, M.

Estas letras están formadas por 7, 8 y 9 círculos donde has de colocar los números desde el 1 hasta el 7, 8 ó 9 respectivamente de forma que los de cada grupo ó rama del mismo número de círculos alineados (3, 4 ó 4 respectivamente) sumen lo mismo.



Solución

He aquí dos soluciones de cada:



Y seguro que has detectado pautas para encontrar muchas más.

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Pablo Freire Fernández*** *(IES As Lagoas. Orense),* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina),* ***Javier Suárez Godoy*** *(IES Mesa y López. Las Palmas) y* ***Ander Bodegas Díez*** *(Valencia)*

Infantil (1º/2º ESO)

I-037. Diferencia tresene treseme.

Encuentra los posibles valores de m y n para los que $3^n - 3^m = 174960$

Solución

Claramente ha de ser $n > m$ y llamando k al entero positivo que las diferencia, esto es, si $n = m + k$, tendremos: $3^n - 3^m = 3^m \cdot (3^k - 1) = 174960 = 3^7 \cdot 2^4 \cdot 5$

Y claramente ha de ser $m = 7$ y $3^k - 1 = 2^4 \cdot 5 = 80$, esto es, $3^k = 81 \quad \to \quad k = 4$

En conclusión: $\underline{n = 11}$ y $\underline{m = 7}$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Bruno Martínez Vañó** (IES Cabañal. Valencia), **Cristina Ceaus** (IES Dunas de las Chapas. Marbella), **Julio J. Zárate Pinto** (IES La Bureba. Briviesca), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Tyler Hamilton Harris King** (Andalucía), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Alfonso Gadea Dávila** (Valladolid), **Juan Navarro Loidi** (Guipúzcoa) y **Ander Bodegas Díez** (Valencia)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

C-037. Al cubo.

Si $a = \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 \cdot \ldots}}}}}}$ ¿qué vale a^3?

Solución

Operando: $a^2 = 3 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 \cdot \ldots}}}}}$

$$a^4 = 3^2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{7 \cdot \ldots}}}}}} = 3^2 \cdot 7 \cdot a = 63 \cdot a$$

Y como $a \neq 0$, simplificando: $\underline{a^3 = 63}$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **José Mangas Toro** (Centro Inglés. Pto Sta María), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Cristina Ceaus** (IES Dunas de las Chapas. Marbella), **Julio J. Zárate Pinto** (IES La Bureba. Briviesca), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Pablo Morales Martín** (CEIP Agustín de Argüelles. Alcorcón), **Alfonso Gadea Dávila** (Valladolid), **Juan Navarro Loidi** (Guipúzcoa) y **Ander Bodegas Díez** (Valencia)*

Se recibieron también una solución incompleta y dos incorrectas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-037. Emene con radicales

Demuestra detalladamente que para todo par de números m y n naturales se cumple la desigualdad: $\dfrac{m^2}{4 \cdot \sqrt{2}} + \dfrac{n^2}{4 \cdot \sqrt{3}} \geq \dfrac{m \cdot n}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Solución

Racionalicemos la expresión. Multiplicando todo por $4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ hemos de probar que: $\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \cdot m^2 + \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \cdot n^2 \geq 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot m \cdot n$, esto es, que $\sqrt{6} \cdot m^2 + 3 \cdot m^2 + 2 \cdot n^2 + \sqrt{6} \cdot n^2 \geq 4 \cdot \sqrt{6} \cdot m \cdot n$. Y que reordenando nos queda así: $\sqrt{6} \cdot \left(m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n\right) + 3 \cdot m^2 + 2 \cdot n^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot m \cdot n \geq 0$

Expresión equivalente a esta otra $\sqrt{6} \cdot (m - n)^2 + \left(\sqrt{3} \cdot m - \sqrt{2} \cdot n\right)^2 \geq 0$ que, como vemos, es claramente cierta y demuestra lo pedido.

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Ekai Goitia Tejado** (IES Ekialdea. Vitoria), **Alfonso Gadea Dávila** (Valladolid) y **Ander Bodegas Díez** (Valencia)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y una incorrecta.

Jn-037. De treinta y siete a treinta y ocho.

Prueba, sin hacer uso de calculadora alguna, que:

$$1+\frac{1}{37}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{37}\right)>\sqrt[37]{38}$$

Solución

Basta operar y aplicar la desigualdad de las medias aritmética y geométrica:

$$1+\frac{1}{37}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{37}\right)=\frac{37}{37}+\frac{1}{37}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{37}\right)$$

$$=\frac{1}{37}\cdot\left[(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{37}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{37}\cdot\left[2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{38}{37}\right]=$$

$$>\sqrt[37]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{38}{37}}=\sqrt[37]{38}$$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco) y **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba)*

S-037. Inicio del curso 2023-2024.

¿Es el número $2023^4+2^{2026}\cdot 121^{2024}$ primo?

Solución

Cuestión aparentemente artificiosa, pero no tanto si se conoce la factorización de la expresión a^4+4b^4 debida a la gran matemática francesa Sophie Germaine.

$$(a^2+2b^2)^2=a^4+4a^2b^2+4b^4$$

$$a^4+4b^4=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$$

$$\boxed{a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)\cdot(a^2+2b^2-2ab)}$$

En nuestro caso: $a=2023$ y $b=(2\cdot 121)^{506}=242^{506}$

Luego el número $2023^4+2^{2026}\cdot 121^{2024}$ no, <u>no es primo</u>, pues:

$$2023^4+2^{2026}\cdot 121^{2024}=2023^4+4\cdot 2^{2024}\cdot 121^{2024}=2023^4+4\cdot(242^{506})^4=$$

$$=\left[2023^2+2\cdot\left(242^{506}\right)^2+2\cdot 2023\cdot 242^{506}\right]\cdot\left[2023^2+2\cdot\left(242^{506}\right)^2-2\cdot 2023\cdot 242^{506}\right]$$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES JS. Arganda del Rey), **Javier Badesa Pérez** (Leonardo Chabacier. Calatayud), **José Antonio Rama López** (Santiago de Compostela), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Larry Andrés Matta Plaza** (Sevilla), **Sergio Sánchez Zufía** (Navarra), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Alberto Fernández de Marcos** (IES Juan de Mairena), **J Carlos L** (Politecmática), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Alfonso Gadea Dávila** (Valladolid), **Juan Navarro Loidi** (Guipúzcoa) y **Ander Bodegas Díez** (Valencia)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Tal y como se hizo la pregunta, el problema resultó extremadamente fácil. Debimos pedir, al menos, una factorización como muestra la solución oficial y que sólo algún participante apostilló.