Real Sociedad Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Octubre – 2023

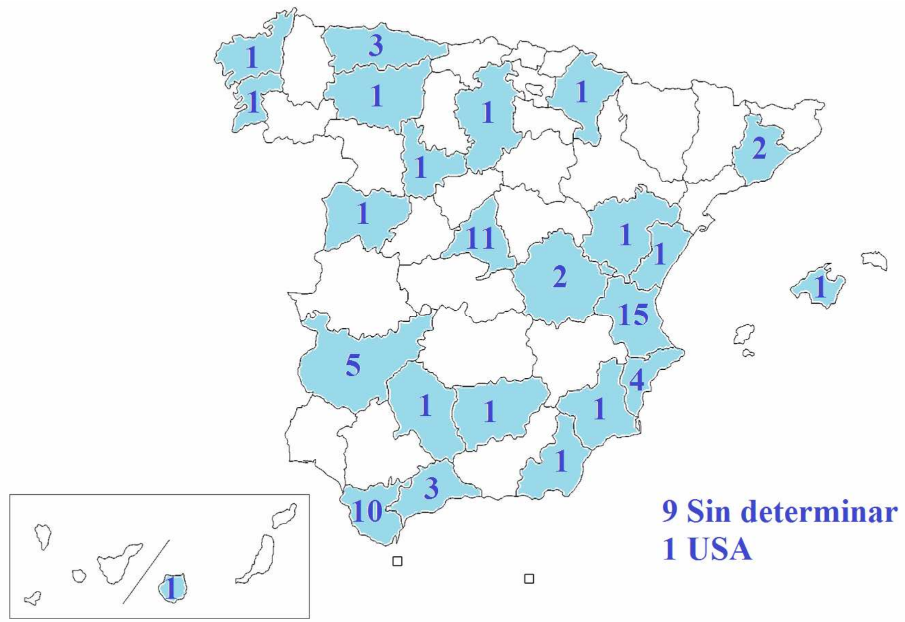
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
036	✓ (Alevín–Infantil)		✓ (Cadete–Juvenil)		✓ (Júnior–Sénior)	
037	✓	✓	✓	✓	✓	✓
038	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

80 participantes (61 chicos / 19 chicas) **135 respuestas**



Alevín (5º/6º Primaria)

A-038. Números felinos.

Juanito, jovenzuelo amante de los números y de los grandes felinos, es muy meticuloso coloreando las siluetas de los números. Lo hace siempre siguiendo estas dos reglas:

- La silueta del ***cero*** la pinta como la piel moteada de un jaguar, la del ***uno*** como la de un leopardo y la del ***dos*** como la de un guepardo.
- La silueta de un número natural cualquiera n y la del número $n+3$ las pinta siempre con el mismo moteado

Dinos tu edad, busca la silueta del número correspondiente y coloreála siguiendo las reglas de Juanito. ¿Qué año, a partir del presente, la silueta de su correspondiente cardinal iría coloreada de igual manera?

__*Solución*__

Moteados con la piel del jaguar:  3 6 9 12 15 18 ... 3k

Moteados con la piel del leopardo  4 7 10 13 16 19 ... 3k + 1

Moteados con la piel del guepardo:  5 8 11 14 17 20 ... 3k + 2

Como el resultado depende de tu edad, ponemos como ejemplos algunos casos:

· Edad: $\underline{11} = 3\times 3 + 2$ años, moteado de guepardo como $\underline{2024} = 3\times 674 + 2$

· Edad: $\underline{15} = 3\times 5$ años, moteado de piel de jaguar como $\underline{2025} = 3\times 675$

· Edad: $\underline{19} = 3\times 6 + 1$ años, moteado de leopardo como $\underline{2023} = 3\times 674 + 1$

*Bien resuelto por: **Samuel Dussart Pedrón** (IES Uno. Requena), **Adrián Burgos Valle** (IES Oleana. Requena), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba)*

Se recibieron también tres soluciones incompletas y tres incorrectas.

Infantil (1º/2º ESO)

I-038. Buscando una mñn.

Busca tres enteros positivos distintos m, $ñ$ y n tales que:

$$\frac{4}{1+m} + \frac{9}{m+ñ} + \frac{30}{m+ñ+n} \geq 10$$

Solución

$1+m\geq 2 \quad \rightarrow \qquad \frac{4}{1+m}\leq\frac{4}{2}=2$ y la igualdad se cumple sólo para $m=1$

$m+ñ\geq 3 \quad \rightarrow \qquad \frac{9}{m+ñ}\leq\frac{9}{3}=3$ y la igualdad se cumple sólo para $m+ñ=3$

$m+ñ+n\geq 6 \rightarrow \quad \frac{30}{m+ñ+n}\leq\frac{30}{6}=5$ y la igualdad se cumple sólo si $m+ñ+n=6$

Sumando todo, vemos que: $\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+ñ}+\frac{30}{m+ñ+n}\leq 2+3+5=10$

Luego de la expresión dada en el enunciado sólo se cumple la igualdad, esto es:

$$\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+ñ}+\frac{30}{m+ñ+n}=10 \text{ para } \underline{m=1},\ \underline{ñ=2} \text{ y } \underline{n=3}$$

Bien resuelto por: ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***Samuel Dussart Pedrón*** *(IES Uno. Requena),* ***Adrián Burgos Valle*** *(IES Oleana. Requena),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Marcos López Martín*** *(IES Playa San Juan. Alicante),* ***Andrés Gutiérrez Bonete*** *(IES Playa San Juan. Alicante),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Rocío Mangas Toro*** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María),* ***Rubén Ortí Pascual*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Aitor Espada García*** *(CEIP Puerta Castilla. Minglanilla),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES Alpajés. Aranjuez),* ***Bruno Martínez Vañó*** *(IES Cabañal. Valencia),* ***Miguel Puig Navarro*** *(CEIP Puerta de Castilla. Minglanilla),* ***Marc Borreguero Mellado*** *(IES Les Alfabegues. Bétera),* ***Javier Vidal Gasulla*** *(IES Matarraña. Valderrobres),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Mario Cervantes Blanes*** *(C. Dominicas. Paterna),* ***David Oliver Granero, David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina),* ***Alfonso Gadea Dávila*** *(Valladolid) y* Javier Suárez Godoy *(E3-IES Mesa y López. Las Palmas)*

Se recibieron también una soluciones incompletas y tres incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-038. Buscando otra mñn.

¿Existirán tres números naturales m, $ñ$ y n que cumplan: $3^m+3^ñ+3^n=81^{38}$? En su caso, indica cuáles y si no, justifica el porqué.

Solución

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $m\leq ñ\leq n$ y, así, la expresión dada quedaría: $3^m+3^ñ+3^n=3^m\cdot(1+3^{ñ-m}+3^{n-m})=81^{38}=3^{152}$, que es un múltiplo de 3, lo que exige que el primer sumando también lo sea y, en consecuencia, el factor $1+3^{ñ-m}+3^{n-m}$ también. Y este factor sólo es múltiplo de 3 si $ñ-m=0$ y $n-m=0$, esto es, si $m=ñ=n$. Con todo:

$$3^m+3^m+3^m=3^m\cdot(1+1+1)=3^{m+1}=3^{152} \quad \rightarrow \quad m=151$$

Luego sí existen esos tres números naturales $\underline{m=ñ=n=151}$

Bien resuelto por: ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***Samuel Dussart Pedrón*** *(IES Uno. Requena),* ***Adrián Burgos Valle*** *(IES Oleana. Requena),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***David Ortí Pascual*** *(IES Luís Vives. Valencia),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES Alpajés. Aranjuez),* ***Rubén Ortí Pascual*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Luis Juan Navarro*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Iván López Márquez*** *(C. Inmaculada. Alicante),* ***Pelayo Escribano Pérez*** *(IES Isla de la Deva. Castrillón),* ***Marina Sánchez Caballero*** *(IES Castuera),* ***Violeta Murillo Morillo*** *(IES Castuera),* ***Zaina Mufeez*** *(IES Castuera),* ***Íker Martín López*** *(IES Castuera),* ***Berta Lorenzo Berenguer*** *(IES Luis Vives. Valencia)* ***Andrea Silvestre Bort*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Bruno Martínez Vañó*** *(IES Cabañal. Valencia),* ***Daniel Sava*** *(Col. NS de las Nieves. Madrid),* ***Julio J. Zárate Pinto*** *(IES La Bureba. Briviesca),* ***Andreu Gascón*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Inés Moral Villora*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Luis Adiego Guillot*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Juan José Asensio García*** *(IES Riu Turia. Quart de Poblet),* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina) y* ***Alfonso Gadea Dávila*** *(Valladolid)*

Se recibieron también once soluciones incorrectas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-038. Diferencia entre potencias.

Sabiendo que la ecuación cuadrática $x^2-x+k=0$ tiene por raíces reales x_1 y x_2 y que $\left|x_1^2-x_2^2\right|=1$, demuestra que, para cualquier número n natural, también se cumple que $\left|x_1^n-x_2^n\right|=1$.

Solución

Por las relaciones de Cardano-Vieta sabes que $x_1+x_2=1$.

Por tanto: $\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|(x_1+x_2)(x_1-x_2)\right|=\left|x_1-x_2\right|=1 \quad \rightarrow \quad x_1-x_2=\pm 1$

Luego, tenemos dos casos:

$$\text{(I)} \quad \left.\begin{matrix} x_1+x_2=1 \\ x_1-x_2=1 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \quad \text{y} \quad x_2=0$$

$$\text{(II)} \quad \left.\begin{matrix} x_1+x_2=1 \\ x_1-x_2=-1 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \text{y} \quad x_2=1$$

Y, así, en cualquier caso: $\left|x_1^n-x_2^n\right|=1$ para cualquier n natural

Bien resuelto por: ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***David Arso Civil*** *(IES Miquel Tarradell. Barcelona),* ***Javier Monfort Llorente, F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES*

*Alpajés. Aranjuez), **Miguel García Azcarreta** (Colegio Nuestra Señora de las Nieves. Madrid), **Carolina Almagro Fernández** (Colegio Inglés. Puerto de Santa María), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **Eduardo García Trobajo** (IES Juan de la Enzina. León), **Cristina Ceaus** (IES Victoria Kent. Marbella), **Javier Ruiz de Larriva** (Centro Inglés. Puerto de Santa María), **Lucía Adsuara Almela** (C La Magdalena. Castellón), **Laura Rivas Nova** (Col. NS de las Nieves. Madrid), **Roger Fernández Lopera** (Tordera), **Julio J. Zárate Pinto** (IES La Bureba. Briviesca), **Hugo Serrano Macías** (El Centro Inglés. Puerto de Santa María), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Pablo Barral Tigeras** (Col. NS de las Nieves. Madrid), **Alfonso Gadea Dávila** (Valladolid), **Paco Esteve** (IES Inca. Mallorca) y **Rodrigo Martínez** (El Centro Inglés. Puerto de Santa María).*

Se recibieron también cuatro soluciones incompletas y dos incorrectas.

Júnior

Jn-038. No es tan complejo el problema.

Siendo $x \in C$, encuentra todos los valores reales de k para los que se verifica $x+\frac{1}{x}=x^7+\frac{1}{x^7}=k\in\Re$

Solución

Tenemos que $\underline{x+\frac{1}{x}=k}$ y $\underline{x^7+\frac{1}{x^7}=k}$. Así, simplemente, operando:

- $$k^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=$$
$$=x^3+3\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=x^3+3\cdot k+\frac{1}{x^3}$$

  Luego: $\underline{x^3+\frac{1}{x^3}=k^3-3k}$

- $$k^5=\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=x^5+5\cdot x^4\cdot\frac{1}{x}+10\cdot x^3\cdot\frac{1}{x^2}+10\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^3}+5\cdot x\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}=$$
$$=x^5+5\cdot\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+10\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=$$
$$=x^5+5\cdot(k^3-3k)+10\cdot k+\frac{1}{x^5}=x^5+5k^3-5k+\frac{1}{x^5}$$

  Luego: $\underline{x^5+\frac{1}{x^5}=k^5-5k^3+5k}$

- Y, por último, análogamente:
$$k^7=\left(x+\frac{1}{x}\right)^7=x^7+7\cdot\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+21\cdot\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+35\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^7}=$$
$$=x^7+7\cdot(k^5-5k^3+5k)+21\cdot(k^3-3k)+35\cdot k+\frac{1}{x^7}=$$
$$=k+7k^5-35k^3+35k+21k^3-63k+35k=$$
$$=7k^5-14k^3+8k$$

  Luego: $\underline{k^7-7k^5+14k^3-8k=0}$ que –puedes aplicar la regla de Ruffini– resulta fácilmente descomponible en factores: $\underline{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-2)=0}$

  Luego k puede tomar estos siete valores reales: 0, $\underline{\pm1}$, $\underline{\pm2}$ y $\underline{\pm\sqrt{2}}$

*Bien resuelto por: **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Julio J. Zárate Pinto** (IES La Bureba. Briviesca), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia) y **Eva Sánchez González** (IES Benalmádena. Arroyo de la miel. Benalmádena)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y cuatro incorrectas.

Sénior

S-038. Aes serán clave.

Determinar para qué valores de $a>1$, la ecuación $a^x=x$ tiene solución única, y, para ese valor de a, determinar dicha solución.

Solución:

Sea la función $f(x)=a^x-x$, una función claramente continua y derivable y con tendencia, al principio y al final de su domino que es todo $\Re$, hacia infinito, pues, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Así, la ecuación $f(x)=a^x-x=0$ tendrá solución única si el valor mínimo es precisamente el 0. Sea x_0 el valor donde se alcanza el mínimo. Entonces,

por un lado, $f'(x_0)=0 \;\to\; a^{x_0}\ln a-1=0 \;\to\; a^{x_0}=\frac{1}{\ln a} \;\to\; x_0=\log_a\frac{1}{\ln a}$

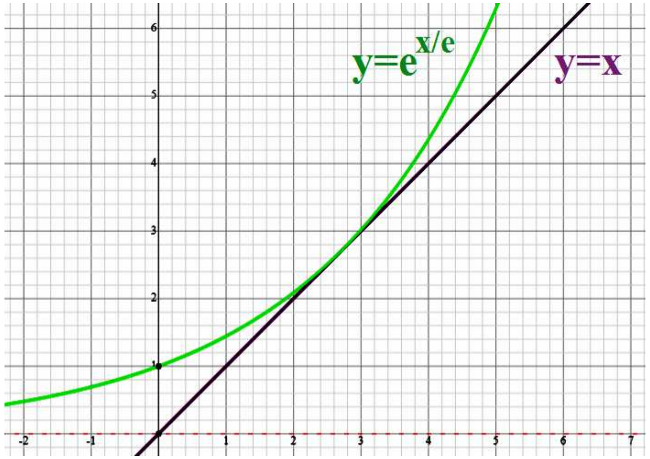
y por otro, $f(x_0)=0 \;\to\; a^{\log_a\frac{1}{\ln a}}-\log_a\frac{1}{\ln a}=0 \;\to\; \frac{1}{\ln a}-\frac{\ln\frac{1}{\ln a}}{\ln a}=0 \;\to$

$$\ln\frac{1}{\ln a}=1 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\ln a}=e \quad\rightarrow\quad \ln a=\frac{1}{e} \quad\rightarrow\quad \underline{a=e^{1/e}=\sqrt[e]{e}}$$

La solución a la ecuación será:

$$x_0=\log_a\frac{1}{\ln a}=\log_a e=\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{\ln e^{1/e}}=\frac{1}{1/e}=e \quad\rightarrow\quad \underline{x_0=e}$$

Constatación gráfica del hecho:



Bien resuelto por: ***David Arso Civil*** *(IES Miquel Tarradell. Barcelona),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Sergio Sánchez Zufía*** *(Navarra),* ***Juan Francisco Cuevas Rodríguez*** *(IES Campos de Najar. Campohermoso),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES Alpajés. Aranjuez),* ***Alejandro Camblor Fernández*** *(IES Rey Pelayo. Cangas de Onis),* ***Joaquín Cos Córcoles*** *(IES Mediterráneo. Torrevieja),* **José Antonio Rama López** *(Santiago de Compostela),* **Francisco Merchán Cid** *(IES La Vaguada de la Palma),* ***Julio J. Zárate Pinto*** *(IES La Bureba. Briviesca),* ***Alfonso Gadea Dávila*** *(Valladolid),* ***Francisco Manuel López López*** *(Linares) y* ***Paco Esteve*** *(IES Inca. Mallorca)*

Se recibieron también cuatro soluciones incorrectas.